


HARVARDIANAE IN NOV ANG
SIGILLUM ACADEMIAE
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS



ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1859—1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

R. MEHMKE IN STUTTGART. UND **C. RUNGE** IN HANNOVER.

50. BAND.

MIT 76 FIGUREN IM TEXT UND AUF EINER TAFEL.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1904.

Inhalt.

Kleinere Mitteilungen.

Preisaufgaben aus der angewandten Mathematik und Physik für 1905.

Auskünfte.

Bücherschau.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1859—1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

R. MEHMKE IN STUTTGART. UND **C. RUNGE** IN HANNOVER.

50. BAND. 1. UND 2. (DOPPEL-) HEFT.

MIT 53 FIGUREN IM TEXT UND AUF EINER TAFEL.

Ausgegeben am 3. März 1904.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASZE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Hannover-Kirchrode, Kaiser Wilhelmstr. 9, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN DOPPELHEFTES.

Seite

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

V. Bjerknes, A. Börsch, G. Bohlmann, M. Distell, K. Doehlemann, E. Häntzschel, K. Heun, M. Laue, R. Mehmke, O. Mohr, E. Müller, † J. Petzval, H. Rothe, C. Runge, G. Scheffers, Fr. Schilling, J. Schnöckel, A. Sommerfeld, P. Stäckel, S. Trozewitsch, G. Valentin, C. W. Wirtz, E. Wölffing.

Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik.

Von Georg Hamel in Karlsruhe.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Die Untersuchung nicht holonomer, d. h. nicht integrabler Bedingungsgleichungen in der Mechanik hat die Mathematiker in den letzten 20 Jahren vielfach beschäftigt. Einmal handelte es sich darum, das Vorkommen derartiger Bedingungsgleichungen darzutun und zu zeigen, wie sie bei kinetischen Problemen zu behandeln sind; dann aber vor allen Dingen zu fragen, wie weit die fundamentalen Sätze der Mechanik noch auf sie angewendet werden dürfen. Soweit das

Prinzip der virtuellen Arbeiten, das sogenannte Hamiltonsche Prinzip und das Prinzip der kleinsten Wirkung in Frage kommen, dürfte wohl so ziemlich alles klargestellt sein; es genüge, an die Untersuchungen der Herren Voß, Routh, C. Neumann, Hertz und Hölder[1]) zu erinnern.

Übrigens kennt bereits Lagrange[2]) nicht holonome Bedingungsgleichungen, wenn auch nur in der Statik. Obgleich er nun in den Transitivitätsgleichungen und in seiner Zentralgleichung alle Mittel besaß, auch kinetische Probleme mit nicht-holonomen Bedingungsgleichungen zu lösen, so hat er solche doch nicht behandelt.

Einer Erledigung bedürfen noch die beiden folgenden Fragen:

1. Kann man, wenigstens unter gewissen Voraussetzungen, beim Auftreten nicht-holonomer Bedingungsgleichungen noch die Lagrangeschen Gleichungen anwenden und zwar so, daß man in dem Ausdruck der lebendigen Kraft T die nicht-holonomen Bedingungsgleichungen zur Elimination solcher Koordinaten benutzt, deren Ableitungen allein in T vorkommen?

2. Welche Gleichungen treten im allgemeinen Falle an die Stelle der Lagrangeschen Gleichungen?

Daß die erste Frage im allgemeinen mit „Nein" zu beantworten sei, erkannte bereits Herr C. Neumann[3]); am gründlichsten hat sie wohl bis jetzt Herr Hadamard[4]) untersucht. Aus zwei Gründen aber sehe ich die Frage damit noch nicht als erledigt an; einmal sind die Bedingungen des Herrn Hadamard für ihre Bejahung nur im allgemeinen auch notwendig; dann aber fällt, wie wir sehen werden, erst das rechte Licht auf die erste Frage, wenn wir sie mit der zweiten verknüpfen.

---

1) Voß: „Über die Differentialgleichungen der Mechanik", Math. Ann. 25, 1884. — Routh: Advanced Rigid Dynamics 1884. S. 329, § 445 der deutschen Übersetzung. Siehe auch die Bemerkung von F. Klein in der deutschen Übersetzung S. 534. — C. Neumann: „Grundzüge der analytischen Mechanik, insbesondere der Mechanik starrer Körper", Leipziger Berichte 1887 und 1888. — Hertz: „Die Prinzipien der Mechanik" Werke III, Leipzig 1894. — Hölder: „Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis", Göttinger Nachrichten 1896. S. 122. — Siehe auch Richard Greiner: „Über die Einführung der Bedingung in das Hamiltonsche Prinzip." Dissertation (Teubner 1901).

2) Lagrange: „Mécanique analytique". t. I. Première Partie, Sect. IV § II Nr. 13 p. 77. (Dritte Ausgabe Bertrand.)

3) Außer dem schon erwähnten Aufsatze siehe noch: C. Neumann: „Über die rollende Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Horizontalebene unter dem Einfluß der Schwere". Math. Ann. Bd. 27, auch Leipziger Berichte 1885.

4) Hadamard: „Sur les mouvements de roulement". Mémoire de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. (4) t. V 1895. Abgedruckt in Appell: „Les mouvements de roulement en Dynamique", Scientia Nr. 4. 1899.

Antworten auf die zweite Frage sind auch bereits in der Literatur vorhanden. Herr Voß behandelt in der erwähnten Arbeit das allgemeine Problem, aber nur unter Benutzung von Lagrangeschen Multiplikatoren.[1]) Vielfach werden dann von verschiedenen Autoren spezielle Probleme mit speziellen Methoden erledigt. Herr Appell[2]) hat die Beantwortung der Frage wieder allgemein in Angriff genommen; doch ist die erste Form, die er gegeben hat, noch wenig durchgearbeitet: an die Stelle von $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ tritt ein Ausdruck, den Herr Appell, ohne ihn weiter zu diskutieren, mit R_i bezeichnet. Aber was bedeutet dieses R_i? Der zweite Versuch des Herrn Appell, in dem er statt der lebendigen Kraft T eine neue Funktion S der Beschleunigungen einführt, kann ebenfalls trotz seiner ästhetischen Vorzüge methodisch nicht befriedigen. Einmal bedarf es der Transformation der zweiten Ableitungen der Koordinaten, dann aber verliert bei ihm die lebendige Kraft T gänzlich ihre dominierende Rolle, sodaß die Systeme mit nicht-holonomen Bedingungsgleichungen durch eine so tiefe Kluft von den Systemen mit holonomen Bedingungsgleichungen getrennt werden, wie es nicht dem Unterschiede beider Probleme entspricht. Bilden doch schließlich die holonomen Bedingungsgleichungen nur einen speziellen Fall der nicht-holonomen.

Aus diesem Grunde sollte auch in den allgemeinen Bewegungsgleichungen die Verwandtschaft mit den Lagrangeschen Gleichungen deutlich hervortreten, sodaß diese klar als Spezialfall aus jenen hervorgehen. Und eine derartige allgemeine Form der Bewegungsgleichungen der Mechanik ist möglich; sie aufzustellen, soll das erste Ziel der folgenden Untersuchungen sein. Ich nenne diese Gleichungen die Lagrange-Eulerschen Gleichungen (siehe § 6); sie sind im Texte mit (IV) resp. (IV′) bezeichnet. Ich stieß auf sie, als ich mir folgende sehr allgemeine Frage stellte:

Welche Gleichungen treten in der Mechanik an Stelle der Lagrangeschen Gleichungen, wenn ich außer den n ortsbestimmenden Parametern (Lagrangeschen Koordinaten) $q_1 \dots q_n$ irgendwelche n unabhängigen, linearen Verbindungen $\omega_1 \dots \omega_n$ der $\frac{dq_\lambda}{dt}$ an Stelle dieser einführe?

1) Wesentlich auf demselben Standpunkte steht die Arbeit des Herrn Korteweg: „Über eine ziemlich verbreitete unrichtige Behandlungsweise eines Problemes der rollenden Bewegung ....“ Nieuw archief voor wiskunde 1899.

2) Siehe die schon zitierte Monographie in der Sammlung Scientia und zwar Nr. 23. Die weiteren Arbeiten des Herrn Appell über diesen Gegenstand findet man in dem Artikel des Herrn Voß in der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften IV, 1, Nr. 38, S. 82 erwähnt.

Diese Fragestellung findet sich bereits in einer Arbeit des Herrn Boltzmann[1]), die ich leider erst während des Druckes durch freundliche Vermittlung des Verfassers kennen lernte. Herr Boltzmann gibt auch bereits wesentlich die richtige Antwort[2]): die Lagrange-Eulerschen Gleichungen leisten das Verlangte.[3]) Der Weg, sie zu erhalten, führte mich vom Prinzip der virtuellen Verrückungen über die Lagrangesche Zentralgleichung (§ 4) und unter Benutzung der Transitivitätsgleichungen (§ 2) zum gewünschten Ziele (§ 5). Dieses Ziel aber klar, allgemein und in seinen einzelnen Teilen recht zu erkennen, das wurde erst möglich durch das Licht Liescher Gedanken: das Studium der Lagrange-Eulerschen Gleichungen führte mich immer tiefer in die Gruppentheorie. Daher habe ich schon in § 3 auf den zunächst nur formellen Zusammenhang meiner Untersuchungen mit den Lieschen hingewiesen.[4])

1) Boltzmann: „Über die Form der Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome, generalisierte Koordinaten." Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. CXI. Abt. IIa. Dez. 1902.

2) l. c. Seite 1612, Gleichungen 24). Nur sind diese Gleichungen noch nicht völlig durchgebildet. Dagegen sind sie hinsichtlich des Vorkommens der Zeit allgemeiner als die Lagrange-Eulerschen Gleichungen.

3) Über den Zusammenhang der Lagrange-Eulerschen mit den ganz allgemeinen von Lagrange und Poisson durch Transformation abgeleiteten Gleichungen siehe die Anmerkung auf Seite 17.

4) Inwieweit Lie selbst an eine Anwendung seiner Vorstellungen auf Mechanik gedacht hat, konnte ich nicht klar erkennen. In den von den Herren Engel und Scheffers herausgegebenen Werken fand ich keine Anwendungen auf Mechanik; die von Lie selbst geschriebene Einleitung zum dritten Abschnitt der „Transformationsgruppen" enthält zwar auf Seite VII den Ausspruch: „Die Prinzipien der Mechanik haben einen gruppentheoretischen Ursprung"; doch bleibt der Sinn des Satzes ein Rätsel für den Leser. Fast möchte ich glauben, daß Lie nur an die Integrationstheorie der Differentialgleichungen der Mechanik, an den Zusammenhang von Jacobis kanonischen Substitutionen mit seinen Berührungstransformationen und an eine Ausdehnung der Theorie der geodätischen Linien gedacht hat. Die auf die zitierte Stelle folgenden Äußerungen lassen mich dieses noch mehr vermuten; der Satz: „Die Kinematik und ihre Sätze ordnen sich zum Teil als ganz spezielle Fälle unter meine allgemeinen Sätze" ist besonders wegen des „zum Teil" schwer in seiner Bedeutung zu ermessen. Auch die Arbeiten der von Lie genannten Herren Painlevé (Comptes rendus 114 und 116), Staude (Leipziger Berichte 1892 und 1893) und Stäckel (Leipziger Berichte 1893, 1897, Crelles Journal 107, Comptes rendus 119) haben mit meinen Untersuchungen wohl kaum Berührungspunkte. Dagegen sei hervorgehoben, daß Herr Hadamard in einer zweiten kurzen Note: „Sur certains systèmes d'équations aux différentielles totales" (Procès-verbaux des séances de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 1894—95, wiederabgedruckt in der schon genannten Nummer der Scientia) auf den Zusammenhang seiner Untersuchungen mit der Lieschen Gruppentheorie hingewiesen hat.

Daß von der obigen allgemeinen Fragestellung aus auch eine systematische Erledigung der ersten auf Seite 1 gestellten Frage möglich wurde, dürfte einleuchten. Mit ihrer Beantwortung beschäftigen sich die §§ 7 und 8 der vorliegenden Arbeit.

Daß für spezielle Fälle (abgesehen von den allgemeinen schon genannten Boltzmannschen Untersuchungen) schon die Lagrange-Eulerschen Gleichungen aufgestellt worden sind, ist nicht verwunderlich. Gehören doch die Impulsgleichungen sowie die gewöhnlichen Eulerschen Gleichungen des starren, um einen festen Punkt drehbaren Körpers dazu; die einen ergeben sich, wenn man für ω_1, ω_2, ω_3 die π, $\varkappa$, ϱ, die Komponenten des Rotationsvektors nach drei im Raume festen Achsen, setzt, die zweiten aber, wenn man für ω_1, ω_2, ω_3 die p, q, r, die Komponenten des Rotationsvektors nach drei im Körper festen Achsen, einführt. Die Ableitung der Eulerschen Gleichungen in der allgemeinen Form verdankt man Lagrange[1]), der sie auch auf dem oben skizzierten Wege gewonnen hat. In einer Untersuchung der systematischen Stellung, welche die Impulsgleichungen und die Eulerschen Gleichungen in der Mechanik einnehmen, sehe ich einen zweiten Hauptpunkt der folgenden Betrachtungen; ich werde die Gleichungen gruppentheoretisch charakterisieren und u. a. zeigen, daß für jedes mechanische System in einem gewissen erweiterten Sinne Eulersche Gleichungen bestehen, nicht aber Impulsgleichungen (§ 9 und § 10).

Noch in zwei speziellen Fällen sind meines Wissens Lagrange-Eulersche Gleichungen aufgestellt worden; aber ohne daß die Verbindung mit gruppentheoretischen Gesichtspunkten hergestellt worden wäre: zunächst gehören die Gleichungen hierher, die Herr C. Neumann in der erwähnten Annalenarbeit unter Nr. 45 auf Seite 492 angibt, dann die Gleichungen, welche Herr Carvallo[2]) in seiner preisgekrönten Arbeit für das Rollen eines Körpers auf einer Ebene aufgestellt hat. Abgesehen von dem speziellen Falle des Reifens sind aber seine Gleichungen nicht so weit entwickelt wie die des Herrn Neumann, sie bedeuten insofern keinen Fortschritt gegenüber den ersten Gleichungen des Herrn Appell und übertreffen diese vielleicht nur durch die allgemeinere Auffassung hinsichtlich der verwendeten Geschwindigkeitsparameter.

Meine allgemeineren Impulsgleichungen (§ 9) sind dadurch charak-

1) Lagrange l. c. t. II. Sektion IX. Chap. I, § II Nr. 22, S. 208.

2) Carvallo: „Théorie du mouvement du monocycle et de la bicyclette". Journal de l'École Polytechnique Paris, II. Série, Cahiers 5, 6 (1900 und 1901) Speziell cahier 6 Nr. 72, p. 36.



terisiert, daß T die infinitesimalen Transformationen gestattet, welche konstanten infinitesimalen und zwar virtuellen Werten der Geschwindigkeitsparameter entsprechen. Setzen wir also $d\vartheta_\lambda = \omega_\lambda \cdot dt$, so wird hier die Variation von T so ausgeführt, daß $d\delta\vartheta_\lambda = 0$ angenommen wird. Die allgemeineren Eulerschen Gleichungen dagegen (§ 10) erhält man dann, wenn T die obigen Transformationen gestattet, aber unter der Annahme, daß die Geschwindigkeitsparameter selbst bei der Variation ungeändert bleiben, daß also $\delta\omega_\lambda = 0$, d. h. $\delta d\vartheta_\lambda = 0$ gesetzt wird. Nun besteht beim starren Körper zwischen den beiden Annahmen $d\delta\vartheta_\lambda = 0$ und $\delta d\vartheta_\lambda = 0$ die merkwürdige Beziehung, daß sie beide dasselbe aussagen, wenn man nur das erste Mal für die ω die π, $\varkappa$, ϱ, das zweite Mal die p, q, r einsetzt. So stelle ich denn in § 11 die allgemeinere Frage: Wann kann man durch eine lineare Transformation mit variablen Koeffizienten die ω in solche ω' überführen, daß die Annahme $d\delta\vartheta_\lambda = 0$ in die Annahme $\delta d\vartheta'_\lambda = 0$ übergeht, wodurch dann auch Impulsgleichungen in Eulersche Gleichungen transformiert werden? Die Antwort ist sehr einfach und merkwürdig: „Es müssen die den $\delta\vartheta_\lambda$ entsprechenden infinitesimalen Transformationen eine endliche n-gliedrige Gruppe erzeugen. Und diese Bedingung ist auch hinreichend." Weiterhin ergibt sich noch, daß die zu den ω' gehörende Gruppe gerade die reziproke Gruppe der gegebenen ist (§ 11).

Für den starren Körper sind die Koeffizienten der eben genannten Transformation die Richtungskosinus des einen Achsenkreuzes gegen das andere. Fragt man, wann im allgemeinen die Koeffizienten diesen Charakter haben, so stößt man auf eine besondere Klasse von Gruppen — ich nenne sie „Drehgruppen", — die dadurch charakterisiert sind, daß die Lieschen Konstanten der Zusammensetzung $c_{i,k,s}$ bei geeigneter Auswahl der infinitesimalen Transformationen eine cyklische Permutation ihrer Indices gestatten. Ich nenne dann ein mechanisches System von n Freiheitsgraden, das eine n-gliedrige Drehgruppe gestattet, einen „starren Körper von n Freiheitsgraden" (§ 12).[1])

Da „starre Körper", die zur selben Drehgruppe gehören, in bezug auf die mathematische Durchführung eng verwandt sind, indem ihre rein kinematischen Gleichungen durch eine Punkttransformation in einander übergeführt werden können, während ihre Eulerschen Gleichungen der Form nach identisch sind, so gehört zu jeder Drehgruppe nur ein Typus von „starren Körpern".

---

1) Ich will übrigens bemerken, daß ich trotz derartiger Ausdrücke nirgendwo die Mechanik des dreidimensionalen Raumes verlasse.

Daher rechtfertigt es sich, daß ich mich in den letzten Paragraphen nur noch mit den Drehgruppen beschäftige. Indem ich mich auf die schönen Untersuchungen der Herren Killing und Cartan[1]) stütze, gelingt es, die reellen Drehgruppen bis zu einem gewissen Grade zu erledigen; bei den komplexen bleibt noch eine Schwierigkeit zu überwinden, auf die ich in § 14 hinweise. Endlich zeige ich noch, daß die einzigen Typen „starrer Körper“ von weniger als 8 Freiheitsgraden durch solche Systeme repräsentiert werden können, die sich aus unabhängigen gewöhnlichen starren Körpern und aus Punkten mit Translationsbewegungen zusammensetzen.

Das wäre kurz der Inhalt der vorliegenden Arbeit. Ich will noch bemerken, daß die rein mechanischen Teile ohne tiefere Kenntnisse der Gruppentheorie verstanden werden können, es genügt fast, wenn man die Begriffe „infinitesimale Transformation“ und „Gruppe“ kennt. Wo ich an anderen Stellen weitere Sätze der Gruppentheorie brauche, zitiere ich nach den beiden Werken: Lie-Engel: „Theorie der Transformationsgruppen“ in drei Abschnitten, Leipzig bei Teubner 1888 bis 1893, Lie-Scheffers: „Kontinuierliche Gruppen“, Leipzig bei Teubner 1893, und zwar nenne ich im Text kurz die Namen der Verfasser. Ebenso verfahre ich mit der Monographie von Klein und Sommerfeld: „Über die Theorie des Kreisels“, Leipzig bei Teubner 1897, die ich häufiger zur bequemeren Information des Lesers zitiere, wenn ich den starren Körper als Beispiel behandle.

Kapitel I.

Geometrisch-kinematische Betrachtungen.

§ 1. Einführung neuer Geschwindigkeitsparameter.

Betrachten wir ein mechanisches System von n Freiheitsgraden; $\bar{x}$ sei der ortsbestimmende Vektor eines beliebigen Systempunktes zu irgend einer Zeit, $q_1 \ldots q_n$ seien n unabhängige, Lagrangesche Koordinaten, welche die Lage des Systems eindeutig festlegen, a, b, c drei Parameter, welche gestatten, den einzelnen Punkt des Systems zu charakterisieren. (Man kann etwa a, b, c als die drei rechtwinkligen Koordinaten des Punktes in irgend einer willkürlichen, aber bestimmten und möglichen Lage des Systems ansehen.) Dann ist

$$\bar{x} = \bar{x}(a, b, c; q_1 \cdots q_n)^{2})$$

1) Literaturangabe Seite 54.

2) Von Systemverbindungen, welche die Zeit enthalten, sehen wir hier ab; daher kommt die Zeit explizit nicht in $\bar{x}$ vor.



und der Geschwindigkeitsvektor

$$(1) \qquad \bar{v} \equiv \frac{d\bar{x}}{dt} \equiv \dot{\bar{x}} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda,$$

wenn wir mit t die Zeit und durch einen Punkt die Ableitung nach der Zeit bezeichnen.

Nicht-holonome Bedingungsgleichungen einzuführen, behalten wir uns für später vor.

Nun denken wir uns statt der $\dot{q}_\lambda$ durch die linearen Gleichungen

$$(\mathrm{A}) \qquad \dot{q}_\lambda = \sum_\varrho \xi_{\varrho,\lambda} \omega_\varrho$$

neue geschwindigkeitsbestimmende Parameter ω_ϱ definiert. Die $\xi_{\varrho,\lambda}$ sollen in dem für die Bewegung in Betracht kommenden Bereiche — wie übrigens alle vorkommenden Funktionen — reguläre Funktionen der q sein, sonst aber willkürlich bis auf die eine Bedingung, daß die Determinante

$$|\xi_{\lambda,\varrho}|$$

von Null verschieden sei. Diese Einschränkung sagt offenbar nur aus, daß die ω_ϱ imstande sind, den Geschwindigkeitszustand vollständig zu beschreiben.

Wir können daher die Gleichungen (A) nach den ω auflösen und erhalten so

$$(\mathrm{A}') \qquad \omega_\varrho = \sum_\lambda \pi_{\varrho,\lambda} \dot{q}_\lambda.$$

Zwischen den ξ und π bestehen die Relationen

$$(2) \qquad \sum_\varrho \xi_{\varrho,\lambda} \pi_{\varrho,\mu} = \delta_{\lambda,\mu},$$

wo $\delta_{\lambda,\mu}$ gleich Null ist oder gleich 1, je nachdem λ und μ verschieden oder gleich sind.

Führen wir die ω in die Gleichung (1) ein, so wird $\bar{v}$ die Form erhalten:

$$(3) \qquad \bar{v} = \sum_\varrho \bar{e}_\varrho \omega_\varrho,$$

wo

$$(4) \qquad \bar{e}_\varrho = \sum_\lambda \frac{\partial \bar{x}}{\partial q_\lambda} \xi_{\varrho,\lambda}$$

oder

$$(4') \qquad \frac{\partial \bar{x}}{\partial q_\lambda} = \sum_\varrho \bar{e}_\varrho \cdot \pi_{\varrho,\lambda}.$$

Wir wollen auch hier der Einfachheit halber annehmen, daß die ξ von der Zeit t nicht explizit abhängen; eine wesentliche Voraussetzung bedeutet das nicht.

Daß wir die Gleichungen (A) in den ω linear angesetzt haben, mag Brauch und Zweckmäßigkeit rechtfertigen; in den wenigen schon behandelten Fällen (siehe Einleitung) hat man es stets mit linearen Gleichungen zu tun gehabt, und auch die nicht holonomen Bedingungsgleichungen, von denen wir später noch reden werden, sind stets linear gewesen. Ob man gerade mit dem Hertzschen Beweise, daß nur lineare Bedingungsgleichungen möglich seien, völlig einverstanden sein kann, bleibe hier unerörtert.

§ 2. Die Transitivitätsgleichungen.

Bezeichnen wir mit δq_λ eine virtuelle, unendlich kleine Änderung der Koordinate q_λ, so seien virtuelle Verschiebungen $\delta\vartheta_\varrho$ durch die zu (A′) analogen Gleichungen

$$\text{(A'')} \qquad \delta\vartheta_\varrho = \sum_\varrho \pi_{\varrho,\lambda}\,\delta q_\lambda$$

definiert, wobei aber nicht gesagt sein soll, daß es Koordinaten ϑ_ϱ geben müßte. Trotzdem werden wir im folgenden statt ω_ϱ häufig die Schreibweise

$$\frac{d\vartheta_\varrho}{dt} = \omega_\varrho$$

gebrauchen.

Wenn aber insbesondere ortsbestimmende Koordinaten ϑ_ϱ existieren, so bestehen die auch aus der Variationsrechnung bekannten Gleichungen

$$d\delta\vartheta_\varrho = \delta d\vartheta_\varrho.$$

Wenn das aber nicht der Fall ist, so treten an Stelle dieser Gleichungen andere, die wir nach Heun[1]) die Lagrangeschen Transitivitätsgleichungen nennen wollen, da sie bereits Lagrange[2]) für den Fall eines starren Körpers aufgestellt hat, der sich um einen festen Punkt dreht. (Hier benutzt man drei ω, nämlich die drei Komponenten des Eulerschen Rotationsvektors. Übrigens haben für diesen Fall auch Kirchhoff [in seiner Mechanik S. 59, Gleichungen 9] und C. Neumann [in den erwähnten Arbeiten] die Transitivitätsgleichungen abgeleitet.)

1) Heun: „Die Bedeutung des d'Alembertschen Prinzips für starre Systeme und Gelenkmechanismen." Archiv der Mathematik und Physik III, 2, S. 300.

2) Lagrange:, ‚Mécanique analytique" t. II Sec. Partie, Sektion IX, Chap. I, § 1, p. 200.



In unserem allgemeinen Falle folgt aus (A''):

$$d\delta\vartheta_\varrho = \sum_\lambda \pi_{\varrho,\lambda}\, d\delta q_\lambda + \sum_{\lambda,\sigma} \frac{\partial \pi_{\varrho,\lambda}}{\partial q_\sigma} dq_\sigma \delta q_\lambda;$$

aus (A') dagegen:

$$\delta d\vartheta_\varrho = \sum_\lambda \pi_{\varrho,\lambda}\, \delta d q_\lambda + \sum_{\lambda,\sigma} \frac{\partial \pi_{\varrho,\lambda}}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma d q_\lambda.$$

Subtrahieren wir diese beiden Gleichungen voneinander und beachten wir, daß

$$d\delta q_\lambda - \delta d q_\lambda = 0$$

ist, so ergibt sich, wenn wir noch in der zweiten Gleichung in der letzten Summe λ und σ vertauschen,

$$d\delta\vartheta_\varrho - \delta d\vartheta_\varrho = \sum_{\lambda,\sigma} \left(\frac{\partial \pi_{\varrho,\lambda}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial \pi_{\varrho,\sigma}}{\partial q_\lambda}\right) dq_\sigma \delta q_\lambda.$$

Führen wir nun nach den Gleichungen (A) statt der dq_σ und δq_λ die $d\vartheta$ und $\delta\vartheta$ ein, so bekommen wir

(I) $$d\delta\vartheta_\varrho - \delta d\vartheta_\varrho = \sum_{\mu,\nu} \beta_{\mu,\nu,\varrho}\, \delta\vartheta_\mu d\vartheta_\nu,$$

wo

(5) $$\beta_{\mu,\nu,\varrho} = \sum_{\sigma,\lambda} \left(\frac{\partial \pi_{\varrho,\lambda}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial \pi_{\varrho,\sigma}}{\partial q_\lambda}\right) \xi_{\mu,\lambda}\, \xi_{\nu,\sigma}$$

gesetzt ist.

Die Gleichungen (I) sind die gesuchten Transitivitätsgleichungen; sie drücken die Differenz $d\delta\vartheta_\varrho - \delta d\vartheta_\varrho$ als bilineare Funktion der $d\vartheta$ und der $\delta\vartheta$ aus; die Koeffizienten β hängen mit den π resp. mit den ξ durch die Relationen (5) zusammen.

Nur wenn die β Null sind, sind die ϑ wirkliche Koordinaten; und die β werden nur dann Null, wenn

$$\frac{\partial \pi_{\varrho,\lambda}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial \pi_{\varrho,\sigma}}{\partial q_\lambda} = 0$$

ist, wenn also die ϑ wirkliche Koordinaten sind. Denn wir können die Gleichungen (5) auflösen und erhalten dabei

(5') $$\frac{\partial \pi_{\varrho,\lambda}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial \pi_{\varrho,\sigma}}{\partial q_\lambda} = \sum_{\mu,\nu} \beta_{\mu,\nu,\varrho}\, \pi_{\mu,\lambda} \pi_{\nu,\sigma}.$$

§ 3. Zusammenhang mit Lies Gruppentheorie.

Es dürfte nützlich sein, schon hier auf den formalen Zusammenhang mit Lies Gruppentheorie hinzuweisen.

Die Gleichungen (A) und die allgemeineren für virtuelle Verschiebungen

(A''') $$\delta q_\lambda = \sum_\varrho \xi_{\varrho,\lambda}\,\delta\vartheta_\varrho$$

können wir als Gleichungen infinitesimaler Transformationen auffassen. Die $\delta\vartheta_\varrho$ sind die infinitesimalen Änderungen der Parameter, hier also als konstant anzusehen; die $\xi_{\varrho,\lambda}$ sind die Größen, die Lie ebenfalls mit $\xi_{\varrho,\lambda}$ bezeichnet.

Dieser Auffassung entspricht als Symbol der ϱten infinitesimalen Transformation

(B) $$X_\varrho f = \sum_\lambda \xi_{\varrho,\lambda}\frac{\partial f}{\partial q_\lambda}.$$

Ob diese n Transformationen eine endliche Gruppe erzeugen, ist noch nicht gesagt. Wohl aber ergeben zwei mögliche, d. h. mit den Bedingungen des vorgelegten Systems verträgliche Verrückungen wieder eine solche und infolgedessen müssen die n partiellen Differentialgleichungen $X_\varrho f = 0$ ein vollständiges System bilden, d. h. es müssen Relationen der Form

$$(X_\varrho, X_\sigma) = \sum_\tau \gamma_{\varrho,\sigma,\tau} X_\tau$$

bestehen, wobei (X_ϱ, X_σ) das Jacobische Klammersymbol bedeutet. Das ist übrigens hier selbstverständlich, da die in den $\frac{\partial f}{\partial q_\lambda}$ $(\lambda = 1, 2 \cdots n)$ linearen (X_ϱ, X_σ) sich natürlich auch linear durch die n völlig unabhängigen X_τ ausdrücken lassen müssen.

Nun behaupte ich, daß die γ nichts anderes sind als die oben (§ 2) eingeführten β. Es ist nämlich

$$q_\lambda + dq_\lambda = q_\lambda + \sum_\nu X_\nu d\vartheta_\nu,$$

wobei sich, wie auch im folgenden, die Operation X_ν auf $f = q_\lambda$ beziehen soll. Weiterhin wird

$$q_\lambda + dq_\lambda + \delta q_\lambda + \delta d q_\lambda = q_\lambda + \sum_\nu X_\nu d\vartheta_\nu + \sum_\mu X_\mu \delta\vartheta_\mu$$
$$+ \sum_{\nu,\mu} X_\mu X_\nu d\vartheta_\nu \delta\vartheta_\mu + \sum_\nu X_\nu \delta d\vartheta_\nu,$$

dagegen

$$q_\lambda + \delta q_\lambda + dq_\lambda + d\delta q_\lambda = q_\lambda + \sum_\mu X_\mu \delta\vartheta_\mu + \sum_\nu X_\nu d\vartheta_\nu$$
$$+ \sum_{\nu,\mu} X_\nu X_\mu d\vartheta_\nu \delta\vartheta_\mu + \sum_\mu X_\mu d\delta\vartheta_\mu.$$

Da die linken Seiten einander gleich sind (da nach der Auffassungsweise der Variationsrechnung $d\delta q = \delta d q$), so müssen es auch die rechten sein; daher erhält man durch Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten, wenn man das Jacobische Symbol

$$(X_\nu, X_\mu) = X_\nu X_\mu - X_\mu X_\nu$$

einführt:

$$O = \sum_{\nu,\mu} (X_\nu, X_\mu) d\vartheta_\nu \delta\vartheta_\mu + \sum_\nu X_\nu (d\delta\vartheta_\nu - \delta d\vartheta_\nu)$$

oder, wenn man die Formel für (X_ν, X_μ) benutzt und in der letzten Summe den Summationsindex ν in ϱ umändert,

$$O = \sum_{\nu,\mu,\varrho} \gamma_{\nu,\mu,\varrho} d\vartheta_\nu \delta\vartheta_\mu X_\varrho + \sum_\varrho (d\delta\vartheta_\varrho - \delta d\vartheta_\varrho) X_\varrho.$$

Nun ist aber $X_\varrho(q_\lambda) = \xi_{\varrho,\lambda}$; daher folgt

$$\begin{aligned} d\delta\vartheta_\varrho - \delta d\vartheta_\varrho &= -\sum \gamma_{\nu,\mu,\varrho} d\vartheta_\nu \delta\vartheta_\mu \\ &= \sum \gamma_{\mu,\nu,\varrho} d\vartheta_\nu \delta\vartheta_\mu, \end{aligned}$$

d. h. wegen der Gleichungen I (§ 2)

$$\gamma_{\mu,\nu,\varrho} = \beta_{\mu,\nu,\varrho}$$

und

(II) $$(X_\varrho, X_\sigma) = \sum_\tau \beta_{\varrho,\sigma,\tau} X_\tau.$$

Die in den Gleichungen (II) bei Bildung der Klammersymbole auftretenden Koeffizienten $\beta_{\varrho,\sigma,\tau}$ sind genau dieselben Koeffizienten, die wir in den Transitivitätsgleichungen kennen lernten.

Nun ist nach Lie[1]) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Transformationen (B) eine endliche, n-gliedrige Gruppe erzeugen, die, daß die β konstant sind. (Zweiter Fundamentalsatz.) Daher haben wir den Satz:

Dann und nur dann sind die Koeffizienten β in den Lagrangeschen Transitivitätsgleichungen konstant, wenn die zugehörigen infinitesimalen Transformationen (B) des Systems eine n-gliedrige Gruppe erzeugen.

In diesem Falle wollen wir auch nach Lie

$$\beta_{\sigma,\varrho,\tau} = c_{\sigma,\varrho,\tau}$$

setzen. Auch ist dann noch weiterhin zu bemerken:

Integrieren wir die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \sum_\lambda \bar{e}_\lambda \omega_\lambda$$

1) Lie-Engel I, Kap. 9.

bei konstanten aber beliebigen ω, *so erhalten wir aus der Anfangslage* $\bar{x}_0$ *jede mögliche Lage;* $\omega_1 t, \ldots \omega_n t$ *sind die sogenannten kanonischen Parameter der durch die Integration erhaltenen endlichen Gleichungen der Gruppe* (d. h. der isomorphen Gruppe in $\bar{x}$).

Nun behaupte ich weiter, daß die Transitivitätsgleichungen im engsten Zusammenhange mit den Gleichungen stehen, welche die infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe definieren.[1])

Es ist nämlich das Symbol dieser infinitesimalen Transformationen[2]):

$$E_\nu f = \sum_{\mu, \varkappa} c_{\mu, \nu, \varkappa}\, \omega_\mu \frac{\partial f}{\partial \omega_\varkappa},$$

also ist für $f = \omega_\varkappa$

$$\delta_\nu \omega_\varkappa = \sum_\mu c_{\mu, \nu, \varkappa}\, \omega_\mu\, \delta \vartheta_\nu$$

und

$$\delta \omega_\varkappa \equiv \sum_\nu \delta_\nu \omega_\varkappa = \sum_{\nu, \mu} c_{\mu, \nu, \varkappa}\, \omega_\mu\, \delta \vartheta_\nu.$$

Das sind aber unsere Transitivitätsgleichungen, nur daß $d\delta\vartheta_\varkappa = 0$ gesetzt ist, was ja auch der hier notwendigen Annahme konstanter $\delta\vartheta$ entspricht. In den allgemeinen Transitivitätsgleichungen ist diese Annahme nicht gemacht; und außerdem bleiben diese Gleichungen noch gültig, wenn die β nicht konstant sind.

Wenn aber die β konstant sind, werden natürlich die beiden charakteristischen Relationen[3]) Lies erfüllt:

$$(6') \qquad \begin{cases} c_{\varrho, \sigma, \tau} + c_{\sigma, \varrho, \tau} = 0 \\ \sum_\sigma (c_{\iota, \varkappa, \sigma} c_{\sigma, \lambda, \tau} + c_{\varkappa, \lambda, \sigma} c_{\sigma, \iota, \tau} + c_{\lambda, \iota, \sigma} c_{\sigma, \varkappa, \tau}) = 0, \end{cases}$$

von denen die erste unmittelbar nach (5) einleuchtet, die zweite aus der Jacobischen Identität

$$((X_\iota X_\varkappa) X_\lambda) + ((X_\varkappa X_\lambda) X_\iota) + ((X_\lambda X_\iota) X_\varkappa) \equiv 0$$

folgt. Es wird nützlich sein, die diesen entsprechenden allgemeineren Gleichungen abzuleiten.

Daß die Gleichung

$$(6a) \qquad \beta_{\varrho, \sigma, \tau} + \beta_{\sigma, \varrho, \tau} = 0$$

bestehen bleibt, ist klar.

---

1) In diesem Zusammenhange liegt natürlich der eigentliche Erkenntnisgrund der Gleichung $\gamma_{\mu, \nu, \varrho} = \beta_{\mu, \nu, \varrho}$. Aus der Bedeutung der adjungierten Gruppe kann man die Transivitätsgleichungen I (§ 2) direkt ableiten.

2) Lie-Engel I, S. 275. Theorem 48. Lie-Scheffers, S. 464, Gleichung (19). Den dort mit e bezeichneten Größen entsprechen unsere ω.

3) Lie-Engel I, S. 170. Theorem 27.

Des weiteren bleibt die Jacobische Identität

$$((X_\iota X_\varkappa) X_\lambda) + ((X_\varkappa X_\lambda) X_\iota) + ((X_\lambda X_\iota) X_\varkappa) \equiv 0$$

in Geltung; d. h.

$$\Big(\sum_\sigma \beta_{\iota,\varkappa,\sigma} X_\sigma, X_\lambda\Big) + \Big(\sum_\sigma \beta_{\varkappa,\lambda,\sigma} X_\sigma, X_\iota\Big) + \Big(\sum_\sigma \beta_{\lambda,\iota,\sigma} X_\sigma, X_\varkappa\Big) = 0$$

oder

$$\sum_{\sigma,\tau} (\beta_{\iota,\varkappa,\sigma} \beta_{\sigma,\lambda,\tau} + \beta_{\varkappa,\lambda,\sigma} \beta_{\sigma,\iota,\tau} + \beta_{\lambda,\iota,\sigma} \beta_{\sigma,\varkappa,\tau}) X_\tau$$
$$-\sum_{\sigma,\varrho} \Big(\frac{\partial \beta_{\iota,\varkappa,\sigma}}{\partial q_\varrho} \xi_{\lambda,\varrho} + \frac{\partial \beta_{\varkappa,\lambda,\sigma}}{\partial q_\varrho} \xi_{\iota,\varrho} + \frac{\partial \beta_{\lambda,\iota,\sigma}}{\partial q_\varrho} \xi_{\varkappa,\varrho}\Big) X_\sigma = 0.$$

Und daraus folgt, weil die X_σ vollkommen unabhängig sind,

$$\text{(6b)} \quad \begin{cases} \sum_\sigma (\beta_{\iota,\varkappa,\sigma} \beta_{\sigma,\lambda,\tau} + \beta_{\varkappa,\lambda,\sigma} \beta_{\sigma,\iota,\tau} + \beta_{\lambda,\iota,\sigma} \beta_{\sigma,\varkappa,\tau}) \\ = \sum_\varrho \Big(\frac{\partial \beta_{\iota,\varkappa,\tau}}{\partial q_\varrho} \xi_{\lambda,\varrho} + \frac{\partial \beta_{\varkappa,\lambda,\tau}}{\partial q_\varrho} \xi_{\iota,\varrho} + \frac{\partial \beta_{\lambda,\iota,\tau}}{\partial q_\varrho} \xi_{\varkappa,\varrho}\Big). \end{cases}$$

Das ist die zweite Gleichung, die an Stelle der Lieschen Gleichung (6') zu setzen ist.

Kapitel II.

Kinetische Betrachtungen.

§ 4. Die Lagrangesche Zentralgleichung.

An die Spitze unserer eigentlichen mechanischen Betrachtungen stellen wir die fundamentale Gleichung, die wir als die Lagrangesche Zentralgleichung bezeichnen wollen. Sie bildet den eigentlichen Kern des sogenannten Hamiltonschen Prinzips, ist aber umfassender; denn sie enthält auch noch das Prinzip der variierenden Wirkung. Da sie weniger bekannt zu sein scheint, sei es erlaubt, sie hier kurz abzuleiten.

Es sei $m(a, b, c)$ die Masse eines Systempunktes und

$$\text{(C)} \qquad T = \tfrac{1}{2} \mathfrak{S}\, m \dot{\bar{x}}^2$$

die kinetische Energie. (Wir bezeichnen mit S die Summation über die Punkte des Systems, indem wir es dahin gestellt sein lassen, ob wir die Summe über eine diskrete Punktmenge oder ein Integral vor uns haben.) Dann besteht, wenn wir das innere (skalare) Produkt zweier Vertoren $\bar{x}$ und $\bar{y}$ mit $\bar{x} \cdot \bar{y}$ bezeichnen, die Identität:

$$\frac{d}{dt}\Big[\mathfrak{S}\, m \big(\delta \bar{x} \cdot \dot{\bar{x}}\big)\Big] = \mathfrak{S}\, m \big(\delta \bar{x} \cdot \ddot{\bar{x}}\big) + \delta T$$

für alle virtuellen $\delta \bar{x}$.

Machen wir nun den d'Alembertschen Ansatz:

$$m\ddot{\bar{x}} = \bar{K} + \bar{R}, \tag{D}$$

wo $\bar{K}$ die eingeprägte, auf den Punkt wirkende Elementarkraft bedeutet, $\bar{R}$ aber die Reaktionskraft, so wird nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten

$$\mathsf{S}\bar{R}\cdot\delta\bar{x} = 0$$

für alle mit den Bedingungen des Systems verträglichen Verschiebungen, d. h. für alle δq_λ, also auch für alle $\delta\vartheta_\lambda$.

Definieren wir daher n Systemkräfte Q_λ durch die Identität in den $\delta\vartheta_\lambda$:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} Q_\lambda\delta\vartheta_\lambda = \mathsf{S}\bar{K}\cdot\delta\bar{x}, \tag{E}$$

so können wir unsere frühere Identität in die folgende, für alle $\delta\vartheta_\lambda$ gültige Gleichung umformen:

$$\frac{d}{dt}\mathsf{S}\,m(\dot{\bar{x}}\cdot\delta\bar{x}) = \sum_\lambda Q_\lambda\delta\vartheta_\lambda + \delta T.$$

Definieren wir endlich n Impulskomponenten J_λ durch die (E) entsprechenden Identitäten

$$\sum_\lambda J_\lambda\delta\vartheta_\lambda = \mathsf{S}\,m\dot{\bar{x}}\cdot\delta\bar{x}, \tag{E'}$$

so lautet unsere Gleichung

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_\lambda J_\lambda\delta\vartheta_\lambda\Big) = \sum Q_\lambda\delta\vartheta_\lambda + \delta T. \tag{III}$$

Und das ist die Lagrangesche Zentralgleichung[1]); ihre Bedeutung läßt sich so aussprechen:

Die totale Änderung der virtuellen Arbeit des Impulses ist gleich der virtuellen Arbeit der eingeprägten Kräfte, vermehrt um die virtuelle Änderung der kinetischen Energie.

---

1) Lagrange l. c. t. I. Seconde Partie, Sect. IV. Nr. 1 bis 5, speziell Nr. 3 S. 283. Streng genommen hat Lagrange nur die zu Anfang dieses Paragraphen hingeschriebene Identität. Und da zu seiner Zeit das Prinzip der kleinsten Aktion im Vordergrunde des Interesses stand, so strebte Lagrange vor allem diesem Prinzip zu. (Siehe auch t. I. Sec. Partie, Sect. III, § VI und Sect. IV, Nr. 6. An diesen beiden Stellen geht er direkt zum Integralprinzip über.) Den Namen „Zentralgleichung" gebraucht übrigens bereits Herr Heun in seinen Vorlesungen über Mechanik.



Diese Gleichung hat den ganzen Inhalt der Kinetik zeitlich wirkender Kräfte in sich aufgenommen; aus ihr folgt durch Integration das sogenannte Hamiltonsche Prinzip, wenn man noch an den Grenzen des Integrals die δq_λ gleich Null annimmt.

§ 5. Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen.

Führen wir nun in die Gleichung (III) unsere Substitution

$$\bar{x} = \sum_\lambda \bar{e}_\lambda \omega_\lambda \tag{3}$$

ein. Dann wird zunächst die kinetische Energie

$$T = \tfrac{1}{2} \mathfrak{S}\, m \sum_\lambda \bar{e}_\lambda \omega_\lambda \cdot \sum_\mu \bar{e}_\mu \omega_\mu \quad \text{oder}$$

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu} \omega_\lambda \omega_\mu \mathfrak{S}\, m \bar{e}_\lambda \cdot \bar{e}_\mu. \tag{7}$$

Natürlich ist T eine quadratische Form der geschwindigkeitsbestimmenden Parameter ω_λ.

Auch folgt nach (3) (§ 1) sofort aus (E') (§ 4)

$$J_\lambda = \mathfrak{S}\, m \sum_\mu \bar{e}_\mu \omega_\mu \bar{e}_\lambda \quad \text{oder nach (7)}$$

$$J_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \omega_\lambda}. \tag{IVa}$$

Die λte Impulskomponente ist gleich der partiellen Ableitung der kinetischen Energie nach dem λten Geschwindigkeitsparameter.

Infolgedessen können wir (III) auch schreiben:

$$\sum_\lambda \frac{dJ_\lambda}{dt} \delta \vartheta_\lambda + \sum_\lambda J_\lambda \frac{d}{dt} \delta \vartheta_\lambda = \sum_\lambda Q_\lambda \delta \vartheta_\lambda + \sum_\lambda J_\lambda \delta \omega_\lambda + \sum_\lambda \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda.$$

Beachten wir nun die Transitivitätsgleichung

$$\frac{d}{dt} \delta \vartheta_\lambda - \delta \omega_\lambda = \sum_{\mu,\nu} \beta_{\mu,\nu,\lambda} \delta \vartheta_\mu \omega_\nu,$$

fernerhin die Gleichungen (A''') (§ 3) und bedenken wir, daß die obige Gleichung für alle $\delta \vartheta_\lambda$ gelten muß, so erhalten wir

$$\frac{dJ_\lambda}{dt} + \sum_{\mu,\varrho} \beta_{\lambda,\mu,\varrho} \omega_\mu J_\varrho - \sum_\varrho \frac{\partial T}{\partial q_\varrho} \xi_{\lambda,\varrho} = Q_\lambda. \tag{IV'b}$$

Damit haben wir schon die allgemeinen Gleichungen der Mechanik gefunden, die wir suchten. Führen wir noch den nach Analogie

wirklicher Differentialquotienten gebildeten symbolischen Differentialquotienten ein:

(F) $$\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_\lambda}\right) = \sum_\varrho \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varrho} \xi_{\lambda,\varrho},$$

so können wir auch schreiben:

(IV b) $$\frac{dJ_\lambda}{dt} + \sum_{\mu,\varrho} \beta_{\lambda,\mu,\varrho}\, \omega_\mu J_\varrho - \left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_\lambda}\right) = Q_\lambda.$$

Wir wollen diese Gleichungen als **die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik** bezeichnen.[1])

Wir haben somit das *Theorem* gefunden:

Führen wir bei der Betrachtung eines mechanischen Systems von n Freiheitsgraden außer den ortsbestimmenden Koordinaten $q_1 \ldots q_n$ die geschwindigkeitsbestimmenden Parameter $\omega_1 \ldots \omega_n$ als unabhängige, lineare Funktionen der $\dot{q}_1 \ldots \dot{q}_n$ ein, so treten an Stelle der Lagrangeschen Gleichungen die allgemeineren Gleichungen IV. In diesen bedeuten: T die kinetische Energie, J_λ die zu den ω_λ nach (E') gehörenden Impulskomponenten, während die β die Koeffizienten der Transitivitätsgleichungen

$$d\delta\vartheta_\lambda - \delta d\vartheta_\lambda = \sum_{\mu,\nu} \beta_{\mu,\nu,\lambda}\, \delta\vartheta_\mu\, d\vartheta_\nu \qquad \left(\omega_\nu = \frac{d\vartheta_\nu}{dt}\right)$$

sind. $\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_\lambda}\right)$ *bedeutet nichts anderes als* $\sum_\varrho \frac{\partial T}{\partial q_\varrho} \xi_{\lambda,\varrho}$ *und geht in* $\frac{\partial T}{\partial \vartheta_\lambda}$ *über, wenn sämtliche ϑ_λ wirkliche ortsbestimmende Koordinaten sind. In diesem Falle sind dann auch alle β Null, wie überhaupt die β durch die ξ bestimmt sind vermöge der Gleichungen (5) (Seite 10) und (2) (Seite 8).*

Es sei noch hervorgehoben, daß man zur Aufstellung dieser Gleichungen nur den Ausdruck der kinetischen Energie T und die Größen $\xi_{\lambda,\varrho}$ zu kennen braucht, welche den Zusammenhang der $\dot{q}_\lambda$ mit den ω_λ festlegen.

---

1) Drückt man in den Gleichungen (IV) T durch die q_λ und die J_λ aus, so erhält man nach einigen andern geringfügigen Änderungen Gleichungen, welche einen speziellen Fall der Lagrange-Poissonschen Transformierten darstellen. (Lagrange: t. I. p. 315; siehe auch Cayley: „Report on the recent progress of theoretical dynamics." Werke III Nr. 195). Sie drücken $\frac{dJ_\lambda}{dt}$ und $\frac{dq_\lambda}{dt}$ linear durch die $\frac{\partial T}{\partial q}$ und $\frac{\partial T}{\partial J}$ aus mit Koeffizienten, welche die Poissonschen Klammersymbole für die speziellen Substitutionen $q_\lambda = q_\lambda$ und $J_\lambda = \sum_\tau \xi_{\lambda,\tau} p_\tau$ (wo $p_\tau = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\tau}$) bedeuten.

§ 6. Diskussion der Lagrange-Eulerschen Gleichungen. Beispiel des starren Körpers.

Daß ich die Gleichungen IV als **Lagrange-Euler**sche Gleichungen der Mechanik bezeichnet habe, möchte ich so begründen:

Zunächst umfassen sie die **Lagrange**schen Gleichungen; man braucht ja nur anzunehmen, daß die ϑ Koordinaten sind, und wir erhalten sofort

$$J_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \omega_\lambda},$$

$$\frac{dJ_\lambda}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta_\lambda} = Q_\lambda,$$

d. h. die **Lagrange**schen Gleichungen. Außerdem erinnern aber auch in der allgemeinen Form das erste und letzte Glied der linken Seite in ihrer Bauart an die **Lagrange**schen Gleichungen; und schließlich verdankt man **Lagrange** die Methoden zu ihrer Herleitung.

Um die Benutzung von **Eulers** Namen zu rechtfertigen und um zugleich ein **Beispiel** zu geben, sei es mir gestattet, die ganze Theorie auf den starren Körper anzuwenden, der sich um einen festen Punkt dreht.

Nehmen wir als ortsbestimmende Koordinaten die **Euler**schen Winkel ϑ, φ, ψ und seien p, q, r die Komponenten des Rotationsvektors in bezug auf die im Körper festen Hauptträgheitsachsen durch den festgehaltenen Punkt, so sind p, q, r solche lineare Verbindungen von $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, wie wir sie in den Gleichungen (A) vorausgesetzt haben. Es ist nämlich[1]):

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= r - \operatorname{ctg}\vartheta(p\sin\varphi + q\cos\varphi),\\
\dot{\psi} &= \frac{1}{\sin\vartheta}(p\sin\varphi + q\cos\varphi),\\
\dot{\vartheta} &= p\cos\varphi + q\sin\varphi.
\end{aligned}$$

Die kinetische Energie nimmt in den p, q, r die Gestalt an:

$$T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

wo A, B, C die (konstanten) Hauptträgheitsmomente sind.[2]) Unsere J werden jetzt:

$$J_1 = \frac{\partial T}{\partial p} = Ap; \quad J_2 = \frac{\partial T}{\partial q} = Bq; \quad J_3 = \frac{\partial T}{\partial r} = Cr,$$

---

1) **Klein-Sommerfeld** S. 45 Gleichungen (7) und (9).

2) Ebenda S. 100 Gleichung 13.

also genau das, was Klein und Sommerfeld die Impulskomponenten L, M, N nennen.[1]) Um nun die Transitivitätsgleichungen abzuleiten, bilden wir aus den obigen Gleichungen die Symbole der drei infinitesimalen Transformationen

$$X_p = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(-\operatorname{ctg}\vartheta \sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\cos\varphi,$$
$$X_q = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(-\operatorname{ctg}\vartheta \cos\varphi) + \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta} - \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\sin\varphi,$$
$$X_r = \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Berechnen wir daraus den Klammerausdruck (X_p, X_q), so erhalten wir gerade $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$, d. h. X_r usw. Mithin bestehen die Relationen:

$$(X_p, X_q) = X_r, \quad (X_q, X_r) = X_p, \quad (X_r, X_p) = X_q.$$

(Es sei ausdrücklich bemerkt, daß diese Relationen nur gelten, wenn p, q, r sich auf im Körper feste Achsen beziehen; für π, $\varkappa$, ϱ, die Komponenten desselben Vektors nach drei im Raume festen Achsen, dreht sich gerade das Zeichen um.)

Also sind alle β konstant (was ja nicht grade verwunderlich ist) und zwar ist:

$$\beta_{1,2,1} = 0, \quad \beta_{1,2,2} = 0, \quad \beta_{1,2,3} = 1,$$
$$\beta_{2,3,1} = 1, \quad \beta_{2,3,2} = 0, \quad \beta_{2,3,3} = 0,$$
$$\beta_{3,1,1} = 0, \quad \beta_{3,1,2} = 1, \quad \beta_{3,1,3} = 0.$$

Da schließlich noch die $\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_\lambda}\right)$ alle Null sind, so lauten unsere Gleichungen (IVb):

$$\frac{dJ_1}{dt} + \omega_2 J_3 - \omega_3 J_2 = Q_1,$$
$$\frac{dJ_2}{dt} + \omega_3 J_1 - \omega_1 J_3 = Q_2,$$
$$\frac{dJ_3}{dt} + \omega_1 J_2 - \omega_2 J_1 = Q_3.$$
$$(\omega_1 = p, \ \omega_2 = q, \ \omega_3 = r)$$

Und das sind bis auf die Bezeichnung genau die Gleichungen, die z. B. Klein-Sommerfeld S. 141 (3′) geben; es sind die Eulerschen Gleichungen für die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Übrigens hat diese Gleichungen, wie schon in der Einleitung bemerkt, bereits Lagrange in ihrer allgemeinen Form und auf wesentlich demselben Wege abgeleitet (l. c. t. II. Section IX, Chap. I. § II Nr. 22.)

1) Lagrange hat keine besondere Benennung dafür, die Sache ist aber bereits bei ihm vollständig vorhanden. (t. II, p. 206.)

Aus diesem Beispiel aber geht deutlich hervor, daß die an zweiter Stelle stehenden Glieder der Gleichungen (IVb) ganz vom Typus derjenigen Glieder sind, die in den Eulerschen Gleichungen zu den Ableitungen der Impulskomponenten hinzutreten. Und darum dürfte der Name „Lagrange-Eulersche Gleichungen“ berechtigt sein. Übrigens wird in den späteren Betrachtungen gerade noch die spezifisch vektorielle Auffassungsweise Eulers in Verbindung mit den Ideen Lies stärker hervortreten.

§ 7. Nicht-holonome Bedingungsgleichungen.

Der Hauptvorteil der Lagrange-Eulerschen Gleichungen besteht darin, daß sie gestatten, auftretende nicht-holonome Bedingungsgleichungen in ebenso systematischer Weise zu behandeln, wie es Lagrange mit den holonomen Bedingungen gelungen ist.

Nehmen wir an, daß für die δq $\nu < n$ lineare, unabhängige und im allgemeinen nicht-integrable Bedingungsgleichungen gegeben sind, welche die Zeit explizit nicht enthalten. Wir können dann durch geeignete Wahl der ω jedenfalls erreichen, daß die Bedingungsgleichungen einfach lauten:

$$\text{(G)} \qquad \delta\vartheta_{n-\nu+1} = 0, \quad \delta\vartheta_{n-\nu+2} = 0, \ \ldots \ \delta\vartheta_n = 0.$$

Dementsprechend sind natürlich während der Bewegung noch die ν Gleichungen

$$\text{(Va)} \qquad \omega_{n-\nu+1} = 0, \ \ldots \ \omega_n = 0$$

zu erfüllen.

An unseren früheren Untersuchungen ändert sich prinzipiell garnichts. Wir haben nur jetzt $n - \nu$ statt n willkürliche, unabhängige Verschiebungen $\delta\vartheta_1 \ldots \delta\vartheta_{n-\nu}$; für die durch die Gleichungen (Va) neu hinzutretenden Reaktionen gilt das Gesetz der virtuellen Verrückungen, wenn wir nur (G) berücksichtigen, und daher bekommen wir die Bewegungsgleichungen, wenn wir zu den Gleichungen (Va) noch die $n - \nu$ ersten der Gleichungen (IVb) hinzufügen, wobei zu beachten ist, daß die $Q_1 \ldots Q_{n-\nu}$ allein aus den äußeren eingeprägten Kräften nach den Formeln (E) (§ 4) zu berechnen sind. Da wir die Gleichungen (Va) mit berücksichtigen können, so erhalten wir die $n - \nu$ Gleichungen

$$\text{(Vb)} \qquad \frac{dJ_\lambda}{dt} + \sum_{\substack{\mu=1,2\ldots n-\nu \\ \varrho=1,\ldots n}} \beta_{\lambda,\mu,\varrho}\, \omega_\mu J_\varrho - \left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_\lambda}\right) = Q_\lambda. \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots n-\nu)$$

Die Gleichungen (Va), (Vb), (IVa) und (A) genügen dann vollständig zur Bestimmung der Bewegung. Wir haben somit das Theorem:

Wenn bei einem mechanischen Problem von n Freiheitsgraden ν im allgemeinen nicht-holonome Bedingungsgleichungen gegeben sind, so führe man nach den Gleichungen (A) (Seite 7) die linearen Kombinationen der $\dot{q}$ so ein, daß die Bedingungsgleichungen die Gestalt $\delta\vartheta_{n-\nu+1}=0 \ldots \delta\vartheta_n=0$ annehmen. Die Kräfte Q_λ berechne man nach (E) (Seite 14) allein aus den eingeprägten Kräften. Alsdann bestimmen die Gleichungen (Va), (Vb), (IVa) und (A) vollständig die Bewegung des Systems. Es sei aber noch bemerkt, daß man bei der Berechnung der lebendigen Kraft T noch im allgemeinen die in $\omega_{n-\nu+1}, \ldots \omega_n$ linearen Glieder kennen muß, da man in den Gleichungen (Vb) die $J_{n-\nu+1} \ldots J_n$ benötigt.

Am wichtigsten ist jetzt natürlich der Fall, daß man für $\omega_1 \ldots \omega_{n-\nu}$ einfach $\dot{q}_1 \ldots \dot{q}_{n-\nu}$ nimmt, d. h. die Geschwindigkeiten von $n-\nu$ geeignet ausgewählten Koordinaten.

Dann sind natürlich alle diejenigen

$$\beta_{\lambda,\mu,\varrho} = 0,$$

für die $\varrho \leqq n - \nu$. Denn für solche ϱ ist jetzt

$$d\delta\vartheta_\varrho = \delta d\vartheta_\varrho.$$

Die Gleichungen (Vb) nehmen daher die Gestalt an

$$\text{(Vb}'\text{)} \qquad \frac{dJ_\lambda}{dt} + \sum_{\substack{\mu=1,2\ldots n-\nu \\ \varrho=n-\nu+1,\ldots n}} \beta_{\lambda,\mu,\varrho}\, \dot{q}_\mu J_\varrho - \left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_\lambda}\right) = Q_\lambda. \qquad (\lambda=1,2\ldots n-\nu)$$

Der zu $\frac{dJ_\lambda}{dt}$ links hinzutretende Ausdruck ist genau derselbe, den Herr Appel mit $-R_\lambda$ bezeichnet. (Siehe Einleitung.) In dem vorliegenden Falle ist natürlich auch für $\lambda \leqq n-\nu$

$$\xi_{\lambda,\lambda} = 1 \quad \text{und} \quad \xi_{\varrho,\lambda} = 0 \quad \text{für alle} \quad \varrho \gtrless \lambda.$$

(Siehe die Gleichungen A).

§ 8. Wann darf man bei nicht-holonomen Bedingungsgleichungen die Lagrangeschen Gleichungen und die „illegitime Form" der lebendigen Kraft benutzen?

Beschäftigen wir uns jetzt mit der von vielen Autoren[1]) in neuerer Zeit behandelten Frage, wann man statt der Gleichungen (Vb′) einfach die Lagrangeschen setzen und dabei zugleich die durch Nullsetzen von $\omega_{n-\nu+1} \ldots \omega_n$ aus T entstehende „illegitime Form"[2]) der lebendigen

1) Siehe die in der Einleitung angegebene Literatur.

2) Von C. Neumann gebrauchter Ausdruck. Siehe „Beiträge zur analytischen Mechanik" Leipziger Berichte 1899, Seite 437; auch Voß, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften IV, 1, Nr. 38.

Kraft benutzen darf, falls man noch annimmt, daß die Koordinaten $q_{n-\nu+1} \dots q_n$ in dem so verkürzten T gar nicht vorkommen.

Es wird nach der letzten Bemerkung des vorigen Paragraphen für $\lambda \leqq n - \nu$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_\lambda}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} + \sum_{\varrho = n-\nu+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_\varrho} \xi_{\lambda,\varrho}.$$

Wenn nun das illegitime T von $q_{n-\nu+1} \dots q_n$ frei ist, so bleibt, wenn wir schon (Va) benutzen[1]), allein

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_\lambda}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_\lambda}. \qquad (\lambda = 1, 2 \dots n - \nu)$$

Also kommt es nur noch darauf an, zu untersuchen, wann

$$\sum_{\substack{\varrho > n-\nu \\ \mu \leq n-\nu}} \beta_{\lambda,\mu,\varrho}\, \omega_\mu J_\varrho = 0^{2)}$$

ist und zwar identisch in allen ω_μ für $\mu \leqq n - \nu$.

Nun ist unter Berücksichtigung von (Va)

$$J_\varrho = \sum_{\varkappa \leq n-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_\varrho \partial \omega_\varkappa} \omega_\varkappa.$$

Also muß sein

$$\sum_{\varrho > n-\nu} \beta_{\lambda,\mu,\varrho} \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_\varrho \partial \omega_\varkappa} = 0 \tag{8}$$

für alle $\lambda, \mu, \varkappa = 1, 2 \dots n - \nu$.

Das sind die notwendigen und die hinreichenden Bedingungen dafür, daß man für $q_1 \dots q_{n-\nu}$ einfach die Lagrangeschen Gleichungen, die aus dem verkürzten T entstammen, benutzen darf.

Es gilt, diese Bedingungen zu diskutieren. Wenn $\nu = 1$ ist, wenn also nur eine nicht-holonome Bedingungsgleichung ($\omega_n = 0$) da ist, so ist die Sache sehr einfach. Entweder müssen dann nämlich alle $\frac{\partial^2 T}{\partial \omega_n \partial \omega_\varkappa}$ ($\varkappa < n$) verschwinden, d. h. die gesamte kinetische Energie T setzt sich aus dem von ω_n freien Teil und aus einem Gliede mit ω_n^2 zusammen, oder aber alle $\beta_{\lambda,\mu,n}$ sind Null, d. h. die zu $q_1 \dots q_{n-1}$ gehörenden infinitesimalen Transformationen sind mit einander vertauschbar, die Bedingungsgleichung ist integrabel.

1) was hier gestattet ist.

2) Der Satz des Herrn Korteweg (l. c.), daß man bei unendlich kleinen Bewegungen die illegitime Form von T benutzen dürfe, folgt hier unmittelbar aus der Form der in Frage kommenden Glieder.

Dasselbe Resultat erhalten wir, wenn mehr als eine Bedingungsgleichung vorhanden ist. Wir verfahren dann so:

Statt der $\omega_{n-\nu+1}\ldots\omega_n$ können wir auch irgend welche neuen linearen und unabhängigen Verbindungen derselben einführen. Demnach setzen wir

$$\omega_\sigma = \sum_\varrho \alpha_{\sigma,\varrho}\,\omega'_\varrho \qquad (\varrho, \sigma = n-\nu+1 \ldots n)$$

wo nur $|\alpha_{\sigma,\varrho}| \neq 0$ sein muß. Führen wir diese Substitution in T ein, so wird

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \omega'_\varrho \partial \omega_\varkappa} = \sum_{\sigma > n-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_\sigma \partial \omega_\varkappa}\,\alpha_{\sigma,\varrho} \quad \begin{pmatrix}\varrho = n-\nu+1, \ldots n \\ \varkappa = 1, 2 \ldots n-\nu\end{pmatrix}.$$

Bilden wir jetzt aus den $\beta_{\lambda,\mu,\sigma}$ eine Matrix von ν (oder weniger) Spalten und $(n-\nu)^2$ Zeilen, indem wir den verschiedenen σ die Spalten, den verschiedenen μ und λ die Zeilen zuordnen. Doch wollen wir gleich die Spalten fortlassen, für deren σ schon alle $\frac{\partial^2 T}{\partial \omega_\varkappa \partial \omega_\sigma}$ Null sind $(\varkappa \leqq n-\nu)$. Es sei dann ε der Rang dieser Matrix, d. h. es sei die höchste darin enthaltene Determinante, welche nicht verschwindet, vom Grade ε und es treffe dies gerade für die letzten Zeilen und Spalten $\varrho, \sigma = n, n-1, \ldots n-\varepsilon+1$ zu, was wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können. Dann setzen wir

$$\alpha_{\sigma,\varrho} = \beta_{\lambda,\mu,\sigma}$$

für alle $\sigma > n-\nu$ und $\varrho = n, n-1, \ldots n-\varepsilon+1$, indem wir jedem ϱ ein geeignetes Wertepaar aus den λ, μ zuordnen, nämlich solche, für welche die ε-gliedrige Determinante nicht verschwindet. Alle anderen $\alpha_{\sigma,\varrho}$ setzen wir gleich Null, mit Ausnahme von

$$\alpha_{\varrho,\varrho} = 1$$

für

$$\varrho = n-\varepsilon,\ n-\varepsilon-1 \ldots n-\nu+1.$$

Die Determinante der so bestimmten $\alpha_{\varrho,\sigma}$ verschwindet nicht, dagegen wird für $\varrho = n,\ n-1, \ldots n-\varepsilon+1$ und $\varkappa \leqq n-\nu$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \omega'_\varrho \partial \omega_\varkappa} = \sum_\sigma \frac{\partial^2 T}{\partial \omega_\sigma \partial \omega_\varkappa}\,\beta_{\mu,\lambda,\sigma},$$

und das muß jetzt Null sein nach den Gleichungen (8). Wir haben also durch diese Substitution erreicht, daß Glieder mit $\omega_\varkappa \omega_\varrho$, wo $\varkappa = 1, 2 \ldots n-\nu$ und $\varrho = n, n-1 \ldots n-\varepsilon+1$ ist, in T nicht mehr vorkommen (falls 8 erfüllt sein soll), während die Koeffizienten von $\omega_\varkappa \omega_\varrho$, wo $\varrho = n-\varepsilon,\ n-\varepsilon-1, \ldots n-\nu+1$ ist, ungeändert bleiben, also auch verschwinden, wenn sie es vorher taten.

Bestimmen wir zu den neueingeführten ω die zugehörigen β und sind diese noch nicht alle Null, so können wir obiges Verfahren fortsetzen; man kann immer mehr der mit $\omega_\varkappa \cdot \omega_\varrho$ $(\varrho > n - \nu, \varkappa \leqq n - \nu)$ behafteten Koeffizienten von T zum Verschwinden bringen. Dieser Prozeß muß ein Ende haben, da die Zahl dieser Koeffizienten eine endliche ist, d. h. entweder lassen sich alle Koeffizienten von $\omega_\varkappa \omega_\varrho$ zum Verschwinden bringen, oder wenn das nicht der Fall ist, so verschwinden alle $\beta_{\mu,\lambda,\varrho}$, für welche nicht alle Koeffizienten von $\omega_\varkappa \omega_\varrho$ verschwinden. Denn endlich muß die genannte Matrix den Rang Null erhalten. Und damit sind wir am Ziele. Wir haben folgenden Satz gewonnen:

Wenn es erlaubt sein soll, für die $n - \nu$ ersten Koordinaten die Lagrangeschen Gleichungen aus dem verkürzten, d. h. illegitimen T anzusetzen, so müssen sich die r Bedingungsgleichungen durch lineare Kombination in eine solche Form bringen lassen:

$$\omega_{n-\nu+1} = 0 \cdots \omega_{n-\nu+\tau} = 0; \quad \omega_{n-\nu+\tau+1} = 0 \cdots \omega_n = 0,$$

daß in dem Ausdruck der lebendigen Kraft Glieder mit $\omega_\varkappa \cdot \omega_{n-\nu+\varrho}$ $(\varrho = 1, 2 \cdots \tau,\ \varkappa = 1, 2 \cdots n - \nu)$ nicht vorkommen, während für $\lambda, \mu = 1, 2 \cdots n - \nu$

$$\beta_{\lambda,\mu,n-\nu+\tau+\sigma} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2 \cdots \nu - \tau)$$

ist, sodaß sich der Klammerausdruck (X_λ, X_μ) allein aus $X_{n-\nu+1} \ldots X_{n-\nu+\tau}$ linear zusammensetzt. Dabei kann τ alle Werte von 0 bis ν haben. Ist insbesondere $\tau = 0$, so müssen die $n - \nu$ ersten infinitesimalen Transformationen unter einander vertauschbar sein, die wirklich möglichen infinitesimalen Bewegungen erzeugen also eine Gruppe. Ist hingegen $\tau = \nu$, so muß sich die Energie aus zwei getrennten Teilen zusammensetzen: dem von $\omega_{n-\nu+1} \ldots \omega_n$ freien Teil und einem Teil, der nur diese nicht holonomen Geschwindigkeitsparameter enthält.

Die Bedingungen sind auch hinreichend. *In dem Falle $\tau = 0$ müssen sich übrigens die Gleichungen $\omega_{n-\nu+1} = 0 \cdots \omega_n = 0$ auf eine integrable Form bringen lassen,* sodaß dann in Wahrheit gar keine nichtholonomen Bedingungsgleichungen da sind. Denn da die mit den ν Pfaffschen Gleichungen $d\vartheta_{n-\nu+1} = 0 \cdots d\vartheta_n = 0$ verträglichen Verschiebungen durch $\delta q_1 \ldots \delta q_{n-\nu}$ dargestellt werden, diese aber nach dem Obigen eine $n - \nu$ gliedrige Gruppe in den Variabeln $q_1 \ldots q_n$ erzeugen, so existieren gerade ν endliche Bedingungsgleichungen, nämlich die ν Gleichungen, die durch Elimination der $n - \nu$ Parameter aus den endlichen Gruppengleichungen entstehen. Damit ist aber das Resultat wieder gewonnen, das Hadamard in Nr. 8 der in der Einleitung genannten Abhandlung ausspricht. Nur hätte er seiner Aussage ein „en général“ hinzusetzen müssen; diesem en général entspricht

unser $\tau = 0$, d. h. der Fall, in dem für kein $\varrho > n - \nu$ alle Koeffizienten von $\omega_\varkappa \omega_\varrho$ ($\varkappa \leqq n - \nu$) in T verschwinden.

Fragen wir jetzt allgemeiner, nicht, ob wir alle, sondern welche Bedingungsgleichungen wir von vornherein zur Elimination aus T benutzen dürfen, so ergibt sich als Kriterium eine zu (8) ganz analoge Gleichung, nur daß die Summation allein über die in Frage gestellten ϱ zu erstrecken ist. Durch wesentlich dieselben Überlegungen, wie wir sie vorhin angestellt haben, kommen wir zu folgendem Satz:

Bilden wir alle (X_λ, X_μ) *für* $\lambda, \mu = 1, 2 \cdots n - \nu$ *und wählen wir darunter die unabhängigen aus. Gibt es dann unter den* $\omega_{n-\nu+1} \cdots \omega_n$ *noch solche, für welche die ihnen zugehörigen infinitesimalen Transformationen von diesen Klammersymbolen unabhängig sind, so können wir diese unabhängigen* ω_ϱ *zur Elimination aus T benutzen.* Allgemein zu reden wird es $\nu - \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{2}$ solcher ω gehen.

Das ist genau das Hadamardsche Resultat[1]), das er am Schlusse von Nr. 7 der zuerst erwähnten Arbeit ausspricht; nur daß dieses Resultat nur im allgemeinen auch die notwendige Bedingung ergibt: *Wir können nämlich ein* ω_ϱ *auch dann noch aus T fortstreichen, wenn die zugehörige infinitesimale Transformation zwar bei der Bildung der* (X_μ, X_λ) *resultiert, aber* ω_ϱ *selbst in T nicht in Verbindung mit* ω_1, $\omega_2 \ldots \omega_{n-\nu}$ *auftritt. Und mit diesem Zusatz ist die Bedingung dann auch allgemein und notwendig.*

Am klarsten wird aber auch hier die Sache, wenn wir das Problem noch etwas allgemeiner stellen und, indem wir darauf verzichten, daß die $n - \nu$ ersten ω gerade die $\dot{q}$ seien, fragen:

Es seien ν Bedingungsgleichungen gegeben. Welche von diesen Gleichungen darf man vor der Aufstellung der $n - \nu$ Lagrange-Eulerschen Gleichungen (V^b) zur Elimination aus T benutzen?

Der Weg zur Lösung dieser Aufgabe bleibt ganz der alte, es resultieren die Gleichungen (8), und daher lautet die Antwort:

Hat man die Bedingungsgleichungen auf die Form $\omega_{n-\nu+1} = 0 \ldots \omega_n = 0$ *gebracht, so kann man außer solchen unabhängigen Kombinationen dieser* ω, *die in T nicht in Verbindung mit den* $n - \nu$ *ersten* ω *vorkommen, noch diejenigen vor Aufstellung der* $n - \nu$ *ersten Lagrange-Eulerschen Gleichungen in T gleich Null setzen, die von solchen Kombinationen der* ω *linear unabhängig sind, welche zu den aus* (X_ϱ, X_σ) $(\varrho, \sigma = 1, 2 \cdots n - \nu)$ *resultierenden infinitesimalen Transformationen*

1) Hadamard hat es in seiner zweiten Note: „Sur certains systèmes d'équations" auch in dieser gruppentheoretischen Form ausgesprochen.

gehören. Bilden also die partiellen Differentialgleichungen $X_\varrho f = 0$ $(\varrho = 1, \cdots n - \nu)$ *insbesondere ein vollständiges System, oder, was dasselbe ist, entstehen aus zwei möglichen*[1]) *infinitesimalen Verschiebungen wieder mögliche infinitesimale Verschiebungen, so kann man alle* $\omega_{n-\nu+1} \ldots \omega_n$ *von vornherein in T gleich Null setzen.*

Beispiel des zweirädrigen Wagens.

Als Beispiel betrachten wir die Bewegung eines zweirädrigen Wagens auf einer horizontalen Ebene. Die Räder mögen senkrecht stehen und an einer Achse von der Länge $2l$ befestigt sein; ihr Durchmesser sei $2r$; von ihrer Dicke wollen wir absehen. Die Wagenachse sei mit dem Wagen fest verbunden. Nehmen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z so an, daß die z-Achse in die Vertikale fällt, so möge der Mittelpunkte der Wagenachse die Koordinaten x_0, y_0 und r haben.

ϑ sei der Winkel, den die Richtung vom linken zum rechten Rade mit der x-Achse einschließt. Wir brauchen dann noch zwei Koordinaten, um die Stellung der Räder festzulegen. Dazu benutzen wir in jedem Rade den Winkel φ_1 (links) resp. φ_2 (rechts), den ein bestimmter Radiusvektor in jedem Rade mit der nach vorn gelegenen Horizontalen einschließt, und zwar wollen wir die Winkel in dem Sinne zählen, daß vorn, unten, hinten, oben aufeinander folgen, daß also φ_1 und φ_2 wachsen, wenn der Wagen nach vorn rollt.

Vom Wippen des Wagens um die horizontale Achse wollen wir absehen, sodaß die fünf Koordinaten $x_0, y_0, \vartheta, \varphi_1, \varphi_2$ vollständig zur Bestimmung der Lage des Systems ausreichen.

Seien nun a, b, c die Koordinaten eines Punktes des Wagens in bezug auf das im Wagen feste System, das von der Achse, der Deichsel und einer dazu Senkrechten gebildet wird, so ist für einen Punkt des Wagens selbst:

$$x = x_0 + a \cos \vartheta - b \sin \vartheta$$
$$y = y_0 + a \sin \vartheta + b \cos \vartheta$$
$$z = c + r$$

also

$$\dot{x} = \dot{x}_0 - (a \sin \vartheta + b \cos \vartheta)\dot{\vartheta}$$
$$\dot{y} = \dot{y}_0 + (a \cos \vartheta - b \sin \vartheta)\dot{\vartheta}$$
$$\dot{z} = 0.$$

1) d. h. mit den Bedingungsgleichungen verträglichen.

Legen wir aber einen Punkt in den Rädern durch die Polarkoordinaten ϱ_1, α_1 resp. ϱ_2 und α_2 fest, wo α_1 und α_2 von den in den Rädern festen Richtungen aus in demselben Sinne gezählt werden mögen wie φ_1 und φ_2, so ist für einen Punkt des linken Rades:

$$x = x_0 - l\cos\vartheta - \varrho_1 \cos(\varphi_1 + \alpha_1)\cdot \sin\vartheta$$
$$y = y_0 - l\sin\vartheta + \varrho_1 \cos(\varphi_1 + \alpha_1)\cos\vartheta$$
$$z = r - \varrho_1 \sin(\varphi_1 + \alpha_1)$$

also

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + [l\sin\vartheta - \varrho_1\cos(\varphi_1+\alpha_1)\cos\vartheta]\dot{\vartheta} + \varrho_1\sin(\varphi_1+\alpha_1)\sin\vartheta\cdot\dot{\varphi}_1$$
$$\dot{y} = \dot{y}_0 - [l\cos\vartheta + \varrho_1\cos(\varphi_1+\alpha_1)\sin\vartheta]\dot{\vartheta} - \varrho_1\sin(\varphi_1+\alpha_1)\cos\vartheta\cdot\dot{\varphi}_1$$
$$\dot{z} = -\varrho_1\cos(\varphi_1+\alpha_1)\dot{\varphi}_1,$$

und für einen Punkt des rechten Rades:

$$x = x_0 + l\cos\vartheta - \varrho_2 \cos(\varphi_2 + \alpha_2)\sin\vartheta$$
$$y = y_0 + l\sin\vartheta + \varrho_2 \cos(\varphi_2 + \alpha_2)\cos\vartheta$$
$$z = r - \varrho_2 \sin(\varphi_2 + \alpha_2)$$

also

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + [-l\sin\vartheta - \varrho_2\cos(\varphi_2+\alpha_2)\cos\vartheta]\dot{\vartheta} + \varrho_2\sin(\varphi_2+\alpha_2)\sin\vartheta\,\dot{\varphi}_2$$
$$\dot{y} = \dot{y}_0 - [-l\cos\vartheta + \varrho_2\cos(\varphi_2+\alpha_2)\sin\vartheta]\dot{\vartheta} - \varrho_2\sin(\varphi_2+\alpha_2)\cos\vartheta\,\dot{\varphi}_2$$
$$\dot{z} = -\varrho_2\cos(\varphi_2+\alpha_2)\dot{\varphi}_2.$$

Da nun bei der rollenden Bewegung der unterste Punkt eines jeden Rades ruhen muß, und da für diese Punkte $\varphi_1 + \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, $\varrho = r$ ist, so erhalten wir die 4 Bedingungen:

$$0 = \dot{x}_0 + l\sin\vartheta\,\dot{\vartheta} + r\sin\vartheta\,\dot{\varphi}_1$$
$$0 = \dot{y}_0 - l\cos\vartheta\,\dot{\vartheta} - r\cos\vartheta\,\dot{\varphi}_1$$
$$0 = \dot{x}_0 - l\sin\vartheta\,\dot{\vartheta} + r\sin\vartheta\,\dot{\varphi}_2$$
$$0 = \dot{y}_0 + l\cos\vartheta\,\dot{\vartheta} - r\cos\vartheta\,\dot{\varphi}_2.$$

(Die beiden $\dot{z}$ werden von selbst Null.)

Diese 4 Gleichungen sind aber nicht unabhängig von einander; man leitet aus ihnen die drei unabhängigen Bedingungsgleichungen ab:

$$\omega_3 \equiv \dot{\varphi}_1 + \frac{1}{r}(\omega_1 + l\dot{\vartheta}) = 0$$
$$\omega_4 \equiv \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{r}(\omega_1 - l\dot{\vartheta}) = 0$$
$$\omega_5 \equiv \dot{x}_0\cos\vartheta + \dot{y}_0\sin\vartheta = 0.$$

Dabei ist

$$\omega_1 \equiv \dot{x}_0 \sin \vartheta - \dot{y}_0 \cos \vartheta$$

gesetzt; ω_1 bedeutet die Komponente der Geschwindigkeit in der Richtung der Deichsel, also die Geschwindigkeit der eigentlichen Vorwärtsbewegung.

Wir wollen nun als die 5 unabhängigen Geschwindigkeitsparameter

$$\omega_1, \quad \dot{\vartheta} = \omega_2, \quad \omega_3, \quad \omega_4, \quad \omega_5$$

einführen; die Bedingungsgleichungen lauten einfach

$$\omega_3 = 0, \quad \omega_4 = 0, \quad \omega_5 = 0.$$

Die Transitivitätsgleichungen sind in diesem Falle außerordentlich leicht aufzustellen; man erhält

$$\begin{aligned}
&\beta_{5,2,1} = 1, \ \beta_{2,5,1} = -1, \text{ alle andern } \beta_{\varkappa,\lambda,1} = 0.\\
&\beta_{\varkappa,\lambda,2} = 0\\
&\beta_{\varkappa,\lambda,3} = \beta_{\varkappa,\lambda,4} = \frac{1}{r}\beta_{\varkappa,\lambda,1}\\
&\beta_{1,2,5} = -1, \ \beta_{2,1,5} = 1, \text{ alle andern } \beta_{\varkappa,\lambda,5} = 0.
\end{aligned}$$

Da nun sämtliche $\beta_{\varkappa,\lambda,3}$ und $\beta_{\varkappa,\lambda,4}$ Null sind, für die $\varkappa$ und λ die Werte 1 oder 2 haben, so kann man bei der Aufstellung von T die Bedingungen $\omega_3 = 0$ und $\omega_4 = 0$ direkt benutzen, nicht aber $\omega_5 = 0$, da $\beta_{1,2,5}$ nicht Null ist.

Bezeichnen wir nun mit M die Masse des Wagens allein, mit a^* und b^* seine Schwerpunktskoordinaten und mit k den Trägheitsradius in bezug auf eine Vertikale durch den Mittelpunkt der Achse, so wird für den Wagen ohne die Räder die lebendige Kraft:

$$\begin{aligned}
T_w &= \frac{M}{2}\{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + k^2\dot{\vartheta}^2 - 2\dot{x}_0\dot{\vartheta}(a^* \sin\vartheta + b^* \cos\vartheta)\\
&\quad + 2\dot{y}_0\dot{\vartheta}(a^* \cos\vartheta - b^* \sin\vartheta)\}\\
&= \frac{M}{2}\{\omega_1^2 + k^2\omega_2^2 - 2a^*\omega_1\omega_2 - 2b^*\omega_2\omega_5\}.
\end{aligned}$$

ω_5^2 haben wir bereits fortgelassen.

Bezeichnen wir dann die Masse eines jeden Rades mit m und nehmen wir an, daß der Schwerpunkt jedes Rades in der Nabe liege und daß das Rad um die Nabe rotatorische Symmetrie besitze, so wird die lebendige Kraft des linken Rades:

$$\begin{aligned}
T_l = \frac{m}{2}\{&\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + (l^2 + 2k_0^2)\dot{\vartheta}^2 + k_0^2\dot{\varphi}_1^2\\
&+ 2l\dot{x}_0 \sin\vartheta \cdot \dot{\vartheta} - 2l\dot{y}_0 \cos\vartheta\,\dot{\vartheta}\},
\end{aligned}$$

wobei k_0 den polaren Trägheitsradius bezeichnet. (Nach den Annahmen ist dann $2mk_0^2$ das Trägheitsmoment um eine in der Radebene gelegene Achse durch den Schwerpunkt.)

Für das rechte Rad ist

$$T_r = \frac{m}{2}\{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + (l^2 + 2k_0^2)\dot{\vartheta}^2 + k_0^2\dot{\varphi}_2^2 \\ - 2l\dot{x}_0 \sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta} + 2l\dot{y}_0\cos\vartheta\dot{\vartheta}\}.$$

Addieren wir T_l und T_r, so heben sich die beiden letzten Glieder fort und es bleibt nach Einführung der ω unter Berücksichtigung von $\omega_3 = \omega_4 = 0$:

$$T_l + T_r = \tfrac{1}{2}\left\{\omega_1^2\left[2m + 2m\frac{k_0^2}{r^2}\right] + \omega_2^2 2m\left[l^2 + 2k_0^2 + k_0^2\frac{l^2}{r^2}\right]\right\}.$$

Und somit wird die gesamte lebendige Kraft — d. h. unter Nullsetzen von ω_3 und ω_4 und unter Fortlassung des Gliedes mit ω_5^2 —

$$T = \tfrac{1}{2}\left\{\omega_1^2\left[M + 2m\left(1 + \frac{k_0^2}{r^2}\right)\right] + \omega_2^2\left[Mk^2 + 2m\left(l^2 + 2k_0^2 + \frac{k_0^2 l^2}{r^2}\right)\right] \\ - 2Ma^*\omega_1\omega_2 - 2Mb^*\omega_2\omega_5\right\}.$$

T enthält keine Koordinate mehr explizit. Daher lauten die Bewegungsgleichungen einfach:

$$\frac{dJ_1}{dt} - \omega_2 J_5 = Q_1$$

$$\frac{dJ_2}{dt} + \omega_1 J_5 = Q_2$$

und dabei sind:

$$J_1 = \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1}\right)_{\omega_5=0} = \omega_1\left[M + 2m\left(1 + \frac{k_0^2}{r^2}\right)\right] - \omega_2 Ma^*$$

$$J_2 = \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_2}\right)_{\omega_5=0} = \omega_2\left[Mk^2 + 2m\left(l^2 + 2k_0^2 + \frac{k_0^2 l_2}{r^2}\right)\right] - \omega_1 Ma^*$$

$$J_5 = \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_5}\right)_{\omega_5=0} = \omega_2\cdot Mb^*,$$

also lineare Verbindungen von ω_1 und ω_2 mit konstanten Koeffizienten.

Q_1 bedeutet die Zugkraft in der Richtung der Deichsel, Q_2 das Drehmoment in bezug auf den Mittelpunkt der Wagenachse. Das mag für die Zwecke der vorliegenden Arbeit genügen; wollte man wirklich die Bewegung eines solchen Wagens untersuchen, so würde jetzt der weit schwierigere Teil des Problems beginnen, nämlich das Studium des Kräftesystems für irgend eine Art der Fortbewegung des Wagens.

§ 9. Die Impulsgleichungen.

Wir wenden uns jetzt anderen Fragen zu. Und zwar werden wir solchen Gedanken freies Spiel gönnen, welche die Betrachtung der Bewegung des starren Körpers fast von selbst eingibt.

Es ist ja ganz klar, daß der Ausdruck für die lebendige Kraft des starren Körpers die Gruppe seiner eigenen Bewegungen, d. h. der Drehungen, gestattet.

Wir fragen allgemeiner:

Wann gestattet unser Ausdruck der lebendigen Kraft T eine der infinitesimalen Transformationen $X_\varrho f$? Nach unserer Definition von $X_\varrho f$ und im Sinne der Gruppentheorie wollen wir hier die $\delta\vartheta$ als konstant ansehen, so daß

$$d\delta_\varrho\vartheta_\lambda = 0$$

zu setzen ist.

Die Antwort ist nicht schwer. Wenn T die ϱte infinitesimale Transformation gestatten soll, und zwar die erweiterte Punkttransformation, so muß

$$X_\varrho T = 0$$

sein, d. h.

$$\sum_\sigma \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} \xi_{\varrho,\sigma} \delta\vartheta_\varrho + \sum_\sigma \frac{\partial T}{\partial \omega_\sigma} \delta_\varrho \omega_\sigma = 0.$$

(nach B) (Seite 11).

Nun ist aber nach (I) (Seite 10)

$$\delta_\varrho \omega_\sigma = -\sum_\mu \beta_{\varrho,\mu,\sigma} \omega_\mu \delta\vartheta_\varrho.$$

Also muß sein

$$(9) \qquad \sum_\sigma \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} \xi_{\varrho,\sigma} - \sum_{\sigma,\mu} \frac{\partial T}{\partial \omega_\sigma} \beta_{\varrho,\mu,\sigma} \omega_\mu = 0.$$

Bedenken wir aber, daß die erste Summe nach (F) (Seite 17) nichts anderes ist als $\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_\varrho}\right)$, während die zweite gerade $\sum_{\sigma,\mu} \beta_{\varrho,\mu,\sigma} \omega_\mu J_\sigma$ bedeutet, so erkennen wir, daß sich in der ϱten Gleichung (IVb) links alle Glieder bis auf das erste fortheben. Und da alle Schlüsse umgekehrt werden können, so haben wir den **Satz:**

Die Voraussetzung, daß der Ausdruck für die lebendige Kraft T die ϱte infinitesimale Transformation X_ϱ unter der Annahme $d\delta_\varrho\vartheta_\lambda = 0$ gestattet, hat zur Folge, daß die ϱte Lagrange-Eulersche Gleichung einfach lautet:

$$(\text{VI}) \qquad \frac{dJ_\varrho}{dt} = Q_\varrho.$$

Und umgekehrt: verlangt man, daß diese Gleichung eine solche einfache Gestalt annehme, so muß T die ϱ te infinitesimale Transformation gestatten. Der analytische Ausdruck dafür, daß T diese Transformation gestattet, ist die Gleichung (9).

Wir wollen die Gleichungen (VI) als Impulsgleichungen bezeichnen.

Nebenbei ergibt sich noch ein anderes Theorem:

Die allgemeinen Lagrange-Eulerschen Gleichungen kann man auch so schreiben:

$$\text{(IV c)} \qquad \frac{dJ_\varrho}{dt} - X_\varrho T = Q_\varrho,$$

wobei X_ϱ das Symbol der ϱ ten infinitesimalen, erweiterten Punkttransformation bedeutet.

In dieser Form treten unsere Gleichungen in anderer Weise deutlich als Verallgemeinerungen der Lagrangeschen Gleichungen zu Tage; $X_\varrho T$ hat für die Auffassung einen innigen Zusammenhang mit $\frac{\partial T}{\partial \vartheta_\varrho}$ und geht ja auch in dieses über, wenn die ϑ_ϱ wirkliche Koordinaten werden.

Beispiel: Betrachten wir einen starren Körper, der sich um einen festen Punkt dreht und führen wir die Projektionen π, $\varkappa$, ϱ[1]) des Drehvektors auf drei im Raume feste orthogonale Achsen als Parameter ω ein, so gestattet, wie bemerkt, T die Gruppe dieser Bewegungen und daher lauten die Bewegungsgleichungen einfach:

$$\frac{dJ_1}{dt} = Q_1, \quad \frac{dJ_2}{dt} = Q_2, \quad \frac{dJ_3}{dt} = Q_3,$$

wo

$$J_1 = \frac{\partial T}{\partial \pi}, \quad J_2 = \frac{\partial T}{\partial \varkappa}, \quad J_3 = \frac{\partial T}{\partial \varrho}$$

ist.[2])

Kehren wir zum allgemeinen Falle zurück.

Wenn T gerade $\nu \leq n$ der infinitesimalen Transformationen (B) gestattet, so bestehen in dem Falle einer kräftefreien Bewegung ν den Flächensätzen analoge Gleichungen, nämlich

$$J_\lambda = \text{const.}$$

Weiter gilt der Satz:

Kennen wir bei einem mechanischen System von n Freiheitsgraden irgend ν infinitesimale Transformationen

$$X_\varrho f = \sum_\lambda \xi_{\varrho,\lambda} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda}, \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots \nu)$$

1) Dieselbe Bezeichnung wie bei Klein-Sommerfeld S. 45 Gleichungen 8.

2) Ebenda S. 115, Satz IIa.

welche T zuläßt, so werden wir, bei geeigneter Wahl der anderen $\xi_{\varrho,\varkappa}$, die Substitutionen (A) ansetzen. Die ν ersten Bewegungsgleichungen lauten dann einfach

$$\frac{dJ_\varrho}{dt} = Q_\varrho.$$

Ist insbesondere die Bewegung kräftefrei, so kennen wir sofort ν erste Integrale, nämlich $J_\varrho = const.$

Es dürfte der Thomson-Helmholtzschen Auffassungsweise entsprechen, solche ω_ϱ, für die $X_\varrho T = 0$ und $Q_\varrho = 0$, also $J_\varrho = \text{const.}$ ist, *zyklische Geschwindigkeitsparameter* zu nennen; denn sie bilden die naturgemäße Verallgemeinerung der zyklischen Koordinaten resp. ihrer Ableitungen nach der Zeit.

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß nicht jedes mechanische System Impulsgleichungen besitzt.

§ 10. Die Eulerschen Gleichungen.

Im Grunde genommen ist unsere bisherige Annahme, daß bei der infinitesimalen Transformation (Variation) gerade $d\delta\vartheta_\varrho$ Null sein sollte, eine ganz willkürliche, wenn auch durch die gruppentheoretische Auffassung naheliegende. Jede andere Annahme über $d\delta\vartheta_\varrho$ ist ebenso statthaft. So können wir z. B. eine Variation betrachten, bei der insbesondere

$$d\delta\vartheta_\varrho = \sum \beta_{\lambda,\mu,\varrho}\, d\vartheta_\mu\, \delta\vartheta_\lambda$$

ist, so daß gerade

$$\delta d\vartheta_\varrho = 0$$

wird. Was heißt das?

Nun zunächst, daß wir die Geschwindigkeitsparameter bei der Variation ungeändert lassen. Denken wir aber noch einmal an den starren Körper und führen bei ihm als ω_1, ω_2, ω_3 jetzt die Komponenten p, q, r des Drehvektors nach drei im Körper festen orthogonalen Achsen ein. Dann wird die Annahme $\delta p = 0$, $\delta q = 0$, $\delta r = 0$ heißen, daß wir die variierte Bewegung gerade durch eine unendlich kleine, konstante Drehung um eine im Raume feste Achse erzeugen; denn dann und nur dann ändern sich die Geschwindigkeitskomponenten in bezug auf die im Körper festen Achsen nicht. (Analytisch gesprochen: Durch p, q, r ist die Lage des Körpers zu jeder Zeit bis auf eine Drehung des Koordinatensystems festgelegt.) Wir sehen so hier an diesem Beispiel, wie die Annahme $d\delta\vartheta_1 = 0$, $d\delta\vartheta_2 = 0$, $d\delta\vartheta_3 = 0$ — die $\delta\vartheta$ bezogen auf im Raume feste Achsen — mit der Annahme $\delta d\vartheta_1 = 0$, $\delta d\vartheta_2 = 0$, $\delta d\vartheta_3 = 0$ — diese $\delta\vartheta$ bezogen auf im Körper feste Achsen — in einen engen Zusammenhang gebracht werden kann.

Ein weiteres Studium dieser merkwürdigen Beziehung beim allgemeinen Falle soll später folgen; für jetzt mag diese Bemerkung genügen, um die Betrachtung der Annahme

$$\delta_\varrho d\vartheta_\lambda = 0$$

zu rechtfertigen.

Wir fragen wieder: *Wann gestattet unter dieser neuen Annahme T die ϱte infinitesimale Transformation?*

Offenbar muß dann sein

$$\sum_\sigma \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} \xi_{\varrho,\sigma} = 0, \tag{10}$$

oder

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_\varrho}\right) = 0,$$

und die ϱte Lagrange-Eulersche Gleichung lautet jetzt

$$\frac{dJ_\varrho}{dt} + \sum \beta_{\varrho,\mu,\lambda}\,\omega_\mu J_\lambda = Q_\varrho. \tag{VII}$$

Wir wollen eine solche Gleichung eine Eulersche Gleichung (im weiteren Sinne) nennen.

Wir haben damit den Satz gewonnen:

Die Annahme, daß der Ausdruck für die lebendige Kraft T die ϱte infinitesimale Transformation unter der Voraussetzung $\delta_\varrho d\vartheta_\lambda = 0$ (für alle λ) gestattet, hat zur Folge, daß an Stelle der ϱten Lagrange-Eulerschen Gleichung die einfache Eulersche Gleichung (VII) tritt. Und umgekehrt: verlangt man, daß die ϱte Gleichung diese Gestalt annehme, so muß T die ϱte infinitesimale Transformation unter der Annahme $\delta_\varrho d\vartheta_\lambda = 0$ gestatten.

Setzen wir voraus, daß T alle n infinitesimalen Transformationen zulasse, so erhalten wir natürlich lauter Eulersche Gleichungen. Außerdem aber folgt aus den Gleichungen (10), die jetzt für alle ϱ gelten müssen, noch

$$\frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = 0 \text{ für alle } \sigma,$$

d. h. T muß konstante Koeffizienten haben.

Theorem: *Dann und nur dann, wenn T nach Einführung der ω konstante Koeffizienten hat, wenn T also alle infinitesimalen Transformationen (B) unter der Annahme $\delta\omega_\lambda = 0$ gestattet, bewegt sich das mechanische System nach den Eulerschen Gleichungen (VII).*

Wenn insbesondere die n infinitesimalen Transformationen eine Gruppe erzeugen, wenn also alle β konstant sind, so enthalten die Eulerschen Gleichungen (VII) auf der linken Seite an Variabeln überhaupt nur noch die ω.

In diesem Falle empfiehlt es sich vielleicht, die Gleichungen (VII) als **Eulersche Gleichungen im engeren Sinne** zu bezeichnen.

Da offenbar der starre Körper die genannten Bedingungen sämtlich erfüllt, wenn man die Projektionen p, q, r des Rotationsvektors auf im Körper feste Achsen einführt, so müssen seine Bewegungsgleichungen gerade die Form (VIII) haben, wo $J_1 = \frac{\partial T}{\partial p}$, $J_2 = \frac{\partial T}{\partial q}$, $J_3 = \frac{\partial T}{\partial r}$ ist und T eine quadratische Form der p, q, r mit konstanten Koeffizienten bedeutet. Man braucht also nur noch die spezielle Form der β zu bestimmen, wie oben auf Seite 19 geschehen ist, um sofort auf Grund dieser Überlegungen und unserer allgemeinen Sätze die gewöhnlichen Eulerschen Gleichungen des starren Körpers hinschreiben zu können.

Zum allgemeinen Falle ist noch zu bemerken: Da man stets solche Geschwindigkeitsparameter ω einführen kann, daß T konstante Koeffizienten erhält — denn man kann ja jede definite quadratische Form T durch eine reelle lineare Substitution sogar auf die Form $\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2$ bringen — so gibt es für jedes System Eulersche Gleichungen im weiteren Sinne. Natürlich werden aber die β im allgemeinen nicht konstant sein.

Es besitzt also jedes System von n Freiheitsgraden Eulersche Gleichungen im weiteren Sinne, aber nicht jedes auch im engeren Sinne.

§ 11. Die Beziehung zwischen den Annahmen $\delta d\vartheta = 0$ und $d\delta\vartheta = 0$.

Wir nehmen jetzt die Frage nach der Beziehung zwischen den beiden Annahmen $d\delta\vartheta = 0$ und $\delta d\vartheta = 0$ auf, die wir schon oben kurz streiften.

Wie man beim starren Körper von den p, q, r zu den $\pi, \varkappa, \varrho$ durch eine Drehung des Koordinatensystems, d. h. durch eine lineare Transformation (mit variabeln Koeffizienten) übergehen kann, so werfen wir jetzt allgemein folgende Frage auf:

Wenn wir statt $\omega_1 \dots \omega_n$ n neue Geschwindigkeitsparameter $\omega_1' \dots \omega_n'$ durch die Gleichungen

$$\omega_\lambda = \sum_\varkappa \varepsilon_{\lambda,\varkappa} \omega_\varkappa' \tag{H}$$

einführen, wobei die Determinante $|\varepsilon_{\lambda,\varkappa}|$ nicht identisch verschwinden soll, kann man dann durch geeignete Wahl der

(von den q abhängigen) ε erreichen, daß die Annahme $d\delta\vartheta_\lambda = 0$ in $\delta d\vartheta'_\lambda = 0$ übergeht?

(Wir bezeichnen hinfort alle Größen, die sich auf die ω' beziehen, mit Strichen.)

Aus der (H) entsprechenden Gleichung

$$\delta\vartheta_\lambda = \sum_\varkappa \varepsilon_{\lambda,\varkappa}\,\delta\vartheta'_\varkappa$$

folgt

$$(11)\quad \begin{cases} d\delta\vartheta_\lambda = \sum_\varkappa d\varepsilon_{\lambda,\varkappa}\,\delta\vartheta'_\varkappa + \sum_\varkappa \varepsilon_{\lambda,\varkappa}\,d\delta\vartheta'_\varkappa \\ \text{und aus (H) selber} \\ \delta d\vartheta_\lambda = \sum_\varkappa \delta\varepsilon_{\lambda,\varkappa}\,d\vartheta'_\varkappa + \sum_\varkappa \varepsilon_{\lambda,\varkappa}\,\delta d\vartheta'_\varkappa. \end{cases}$$

Die erste Serie dieser Gleichungen kann, indem man $d\delta\vartheta_\lambda = 0$ berücksichtigt, zur Berechnung von $d\delta\vartheta'_\varkappa$ benutzt werden; aus der zweiten Serie aber folgt, wenn man links die Transitivitätsgleichungen, rechts die Annahme $\delta d\vartheta'_\varkappa = 0$ berücksichtigt,

$$-\sum_{\mu,\nu} \beta_{\mu,\nu,\lambda}\,d\vartheta_\nu\,\delta\vartheta_\mu = \sum_\varkappa \delta\varepsilon_{\lambda,\varkappa}\,d\vartheta'_\varkappa.$$

Setzt man nun nach (H) wieder

$$d\vartheta'_\varkappa = \sum_\lambda E_{\varkappa,\lambda}\,d\vartheta_\lambda,$$

wo

$$\sum_\lambda E_{\varkappa,\lambda}\,\varepsilon_{\lambda,\mu} = \delta_{\varkappa,\mu},$$

d. h. gleich 0 oder 1 ist, je nachdem $\varkappa$, μ verschieden oder gleich sind, so folgen die Gleichungen

$$-\sum_\nu \beta_{\nu,\mu,\lambda}\,\delta\vartheta_\nu = \sum_\varkappa \delta\varepsilon_{\lambda,\varkappa}\,E_{\varkappa,\mu},$$

weil die Gleichungen (11) für alle $d\vartheta$ und $\delta\vartheta$ gelten müssen. Aus demselben Grunde folgt weiter, wenn man

$$\delta\varepsilon_{\lambda,\varkappa} = \sum_\iota \frac{\partial\varepsilon_{\lambda,\varkappa}}{\partial q_\iota}\,\delta q_\iota = \sum_{\iota,\nu} \frac{\partial\varepsilon_{\lambda,\varkappa}}{\partial q_\iota}\,\xi_{\nu,\iota}\,\delta\vartheta_\nu$$

einsetzt,

$$-\beta_{\nu,\mu,\lambda} = \sum_{\varkappa,\iota} \frac{\partial\varepsilon_{\lambda,\varkappa}}{\partial q_\iota}\,\xi_{\nu,\iota}\,E_{\varkappa,\mu}.$$

Löst man diese Gleichungen noch nach den Ableitungen von $\varepsilon_{\lambda,\varkappa}$ auf, so erhält man

$$\frac{\partial \varepsilon_{\lambda,\varkappa}}{\partial q_\iota} = -\sum_{\nu,\mu} \beta_{\nu,\mu,\lambda}\,\pi_{\nu,\iota}\,\varepsilon_{\mu,\varkappa}. \tag{12}$$

Dieses sind die Bedingungsgleichungen für die $\varepsilon_{\lambda,\varkappa}$. Dann und nur dann, wenn sie erfüllt sind, geht bei der Transformation (H) die Annahme $d\delta\vartheta_\lambda = 0$ in die Annahme $\delta d\vartheta'_\lambda = 0$ über.

Nun wird es sich darum handeln, die Integrabilitätsbedingungen von (12) aufzustellen. Differentiieren wir diese Gleichungen nach q_τ und stellen dann noch einmal dieselben Gleichungen auf, indem wir ι und τ vertauschen, so müssen, weil die linken Seiten dieser beiden Gleichungen übereinstimmen, auch die rechten gleich sein. So erhalten wir, indem wir beide Seiten gleich zusammenfassen:

$$\sum_{\nu,\mu} \beta_{\nu,\mu,\lambda}\,\varepsilon_{\mu,\varkappa}\left(\frac{\partial \pi_{\nu,\iota}}{\partial q_\tau} - \frac{\partial \pi_{\nu,\tau}}{\partial q_\iota}\right) + \sum_{\nu,\mu}\left(\frac{\partial \beta_{\nu,\mu,\lambda}}{\partial q_\tau}\pi_{\nu,\iota} - \frac{\partial \beta_{\nu,\mu,\lambda}}{\partial q_\iota}\pi_{\nu,\tau}\right)\varepsilon_{\mu,\varkappa}$$
$$+\sum_{\nu,\mu}\beta_{\nu,\mu,\lambda}\left(\frac{\partial \varepsilon_{\mu,\varkappa}}{\partial q_\tau}\pi_{\nu,\iota} - \frac{\partial \varepsilon_{\mu,\varkappa}}{\partial q_\iota}\pi_{\nu,\tau}\right) = 0.$$

Setzen wir darin sowohl die Gleichungen (5′) (Seite 10, § 2) wie auch die Gleichungen (12) ein, so bekommen wir

$$\sum_{\substack{\mu,\nu\\ \varrho,\sigma}} \beta_{\nu,\mu,\lambda}\,\beta_{\sigma,\varrho,\nu}\,\pi_{\varrho,\tau}\,\pi_{\sigma,\iota}\,\varepsilon_{\mu,\varkappa} + \sum_{\mu,\nu}\left(\frac{\partial \beta_{\nu,\mu,\lambda}}{\partial q_\tau}\pi_{\nu,\iota} - \frac{\partial \beta_{\nu,\mu,\lambda}}{\partial q_\iota}\pi_{\nu,\tau}\right)\varepsilon_{\mu,\varkappa}$$
$$+\sum_{\substack{\mu,\nu\\ \varrho,\sigma}}\beta_{\nu,\mu,\lambda}(-\beta_{\sigma,\varrho,\mu}\,\pi_{\sigma,\tau}\,\varepsilon_{\varrho,\varkappa}\,\pi_{\nu,\iota} + \beta_{\sigma,\varrho,\mu}\,\pi_{\sigma,\iota}\,\varepsilon_{\varrho,\varkappa}\,\pi_{\nu,\tau}) = 0.$$

Vertauschen wir in der letzten Summe ϱ mit μ, so könnnen wir, da die Gleichungen für alle $\varkappa$ gelten, auch schreiben

$$\sum_{\nu,\varrho,\sigma}\beta_{\nu,\mu,\lambda}\,\beta_{\sigma,\varrho,\nu}\,\pi_{\varrho,\tau}\,\pi_{\sigma,\iota} - \sum\beta_{\nu,\varrho,\lambda}\,\beta_{\sigma,\mu,\varrho}\,\pi_{\sigma,\tau}\,\pi_{\nu,\iota} + \sum\beta_{\nu,\varrho,\lambda}\,\beta_{\sigma,\mu,\varrho}\,\pi_{\sigma,\iota}\,\pi_{\nu,\tau}$$
$$= \sum_\nu\left(\frac{\partial \beta_{\nu,\mu,\lambda}}{\partial q_\iota}\pi_{\nu,\tau} - \frac{\partial \beta_{\nu,\mu,\lambda}}{\partial q_\tau}\pi_{\nu,\iota}\right).$$

Wir steuern jetzt darauf los, die Formel (6b) (Seite 14, § 3) anzuwenden. Wir können die vorstehende Formel durch Vertauschung der Summationsindices so schreiben:

$$\sum_{\varrho,\sigma}\pi_{\varrho,\tau}\,\pi_{\sigma,\iota}\sum_\nu(\beta_{\varrho,\sigma,\nu}\,\beta_{\nu,\mu,\lambda} + \beta_{\mu,\varrho,\nu}\,\beta_{\nu,\sigma,\lambda} + \beta_{\sigma,\mu,\nu}\,\beta_{\nu,\varrho,\lambda})$$
$$= \sum_\varrho \pi_{\varrho,\tau}\frac{\partial \beta_{\mu,\varrho,\lambda}}{\partial q_\iota} + \sum_\sigma \pi_{\sigma,\iota}\frac{\partial \beta_{\sigma,\mu,\lambda}}{\partial q_\tau}.$$

Durch Auflösen nach der Summe über ν folgt

$$\sum_\nu (\beta_{\varrho,\sigma,\nu}\beta_{\nu,\mu,\lambda} + \beta_{\mu,\varrho,\nu}\beta_{\nu,\sigma,\lambda} + \beta_{\sigma,\mu,\nu}\beta_{\nu,\varrho,\lambda})$$
$$= \sum_\iota \xi_{\sigma,\iota} \frac{\partial \beta_{\mu,\varrho,\lambda}}{\partial q_\iota} + \sum_\tau \xi_{\varrho,\tau} \frac{\partial \beta_{\sigma,\mu,\lambda}}{\partial q_\tau}.$$

Wechseln wir in der letzten Summe noch den Summationsbuchstaben τ in ι um und vergleichen die so geänderte Formel mit der Formel (6b), so erkennt man sofort, daß man statt ihrer auch einfach schreiben kann

$$\sum_\iota \xi_{\mu,\iota} \frac{\partial \beta_{\varrho,\sigma,\lambda}}{\partial q_\iota} = 0.$$

Und da dies für alle μ gelten soll, so folgt als notwendige Integrabilitätsbedingung der Gleichungen (12)

(VIII) $$\frac{\partial \beta_{\varrho,\sigma,\lambda}}{\partial q_\iota} = 0$$

für alle ϱ, σ, λ, ι, d. h. alle β müssen konstant sein.

Wie nun aus der allgemeinen Theorie solcher Systeme partieller Differentialgleichungen wie (12)[1]) hervorgeht, ist die gefundene Bedingung auch hinreichend dafür, daß (12) Lösungen besitzt. Und zwar enthält die allgemeine Lösung von (12) gerade n^2 Konstante, etwa die Werte von $\varepsilon_{\lambda,\varkappa}$ für ein bestimmtes Wertesystem der q. Übrigens hängt jedes $\varepsilon_{\lambda,\varkappa}$ nur von n dieser Konstanten ab, da das System (12) in n unabhängige Einzelsysteme zerfällt, die durch die verschiedenen Werte des Index $\varkappa$ repräsentiert werden.

Wir haben somit folgendes Theorem:

Dann und nur dann, wenn die n infinitesimalen Transformationen $X_\varrho = \sum_\lambda \xi_{\varrho,\lambda} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda}$ eine n-gliedrige Gruppe erzeugen, ist es möglich, durch eine Transformation der Form (H) *die Bedingung $d\delta\vartheta = 0$ in die Bedingung $\delta d\vartheta = 0$ überzuführen. Die Transformationskoeffizienten ε sind bis auf ihre zu einem bestimmten Wertesystem der q gehörenden Anfangswerte durch die partiellen Differentialgleichungen* (12) *vollständig bestimmt.*

Speziell beim starren Körper transformieren sich die π, $\varkappa$, ϱ in die p, q, r gerade so wie das im Raume feste Achsenkreuz in das im Körper feste Achsenkreuz. Beim starren Körper sind daher die $\varepsilon_{\lambda,\varkappa}$ die neun Richtungskosinus, die das im Körper feste System mit dem im Raume festen bildet.

1) Siehe z. B. Lie-Engel I. S. 179 Satz I.

Wie transformieren sich nun bei der Substitution (H) die anderen Größen, namentlich die β, — für die wir jetzt c schreiben —, die $\bar{e}$, die ξ, die J und die Q? Zunächst folgt aus der ersten Zeile der Gleichungen (11)

$$\begin{aligned} d\delta\vartheta'_\varkappa &= -\sum_{\mu,\lambda} d\varepsilon_{\lambda,\mu}\,\delta\vartheta'_\mu E_{\varkappa,\lambda} \\ &= -\sum_{\mu,\lambda,\nu,\iota} \frac{\partial\varepsilon_{\lambda,\mu}}{\partial q_\iota}\xi_{\nu,\iota}\,d\vartheta_\nu\,\delta\vartheta'_\mu E_{\varkappa,\lambda} \\ &= -\sum_{\mu,\lambda,\nu,\varrho,\iota} \frac{\partial\varepsilon_{\lambda,\mu}}{\partial q_\iota}\xi_{\nu,\iota}\,\varepsilon_{\nu,\varrho} E_{\varkappa,\lambda}\,d\vartheta'_\varrho\,\delta\vartheta'_\mu. \end{aligned}$$

Daher wird, wenn wir die Indices ϱ und μ vertauschen,

$$c'_{\varrho,\mu,\varkappa} = -\sum_{\lambda,\nu,\iota} \frac{\partial\varepsilon_{\lambda,\varrho}}{\partial q_\iota}\xi_{\nu,\iota}\,\varepsilon_{\lambda,\mu} E_{\varkappa,\lambda}.$$

Setzen wir dann den Wert von $\frac{\partial\varepsilon_{\lambda,\varrho}}{\partial q_\iota}$ nach (12) ein, so bekommen wir

$$\begin{aligned} c'_{\varrho,\mu,\varkappa} &= \sum_{\alpha,\gamma,\lambda} c_{\alpha,\gamma,\lambda} \sum_{\iota,\nu} \pi_{\alpha,\iota}\,\xi_{\nu,\iota}\,\varepsilon_{\gamma,\varrho}\,\varepsilon_{\nu,\mu} E_{\varkappa,\lambda} \\ &= \sum_{\alpha,\gamma,\lambda} c_{\alpha,\gamma,\lambda}\,\varepsilon_{\alpha,\mu}\,\varepsilon_{\gamma,\varrho} E_{\varkappa,\lambda}. \end{aligned}$$

Oder schließlich etwas übersichtlicher geschrieben:

$$c'_{\varrho,\mu,\varkappa} = -\sum_{\alpha,\gamma,\lambda} c_{\alpha,\gamma,\lambda}\,\varepsilon_{\alpha,\varrho}\,\varepsilon_{\gamma,\mu} E_{\varkappa,\lambda}. \tag{13}$$

Natürlich werden die c' auch konstant, da doch zwischen den Variationen d und δ kein prinzipieller Unterschied besteht.

Um die Transformation der $\bar{e}$ zu finden, gehen wir von der Gleichung aus

$$d\bar{x} = \sum \bar{e}_\lambda d\vartheta_\lambda = \sum \bar{e}'_\lambda d\vartheta'_\lambda = \sum \bar{e}'_\lambda E_{\lambda,\varkappa} d\vartheta_\varkappa.$$

Mithin ist

$$\bar{e}_\lambda = \sum_\varkappa E_{\varkappa,\lambda}\,\bar{e}'_\varkappa. \tag{14}$$

Ebenso folgt aus

$$dq_\lambda = \sum_\varrho \xi_{\varrho,\lambda}\,d\vartheta_\varrho = \sum_\varrho \xi'_{\varrho,\lambda}\,d\vartheta'_\varrho$$

$$\xi_{\varrho,\lambda} = \sum_\varkappa E_{\varkappa,\varrho}\,\xi'_{\varkappa,\lambda} \tag{14'}$$

Und genau ebenso

(14'') $$J_\lambda = \sum_\varkappa E_{\varkappa,\lambda} J'_\varkappa,$$

(14''') $$Q_\lambda = \sum_\varkappa E_{\varkappa,\lambda} Q'_\varkappa.$$

Wenn nun die lebendige Kraft T die infinitesimalen Transformationen $\sum_\varrho \xi_{\lambda,\varrho} \frac{\partial f}{\partial q_\varrho}$ sämtlich in dem Sinne zuläßt, daß $d\delta\vartheta = 0$ zu nehmen ist, so läßt natürlich T auch die Transformationen $\sum_\varrho \xi'_{\lambda,\varrho} \frac{\partial f}{\partial q_\varrho}$ zu, selbstverständlich jetzt so, daß $\delta d \vartheta'_\varrho = 0$ zu setzen ist. Damit haben wir das Theorem:

Wenn die Bewegungsgleichungen eines Systems sich auf die Form der Impulsgleichungen bringen lassen:

$$\frac{dJ_\lambda}{dt} = Q_\lambda, \quad wo \quad J_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \omega_\lambda},$$

so kann man unter einer Bedingung durch die Substitutionen (H) *neue Geschwindigkeitsparameter* ω' *so einführen, daß die neuen Bewegungsgleichungen lauten:*

$$\frac{dJ'_\lambda}{dt} + \sum c'_{\lambda,\mu,\nu}\, \omega'_\mu J'_\nu = Q'_\lambda,$$

wo jetzt $J'_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \omega'_\lambda}$ *und die Koeffizienten der in den* ω'_λ *quadratischen Form* T *konstant sind. Diese einzige Bedingung lautet: es müssen die* $\beta = c$ *und damit auch die* $\beta' = c'$ *konstant sein, d. h. die infinitesimalen Transformationen* (B) (Seite 11, § 3) *müssen eine n-gliedrige Gruppe erzeugen.* Kurz gesagt:

Gibt es Eulersche Gleichungen im engeren Sinne, so gibt es auch Impulsgleichungen; das Umgekehrte ist aber nur dann der Fall, wenn noch die Transformationen (B) *eine Gruppe erzeugen.*

Über die $\varepsilon_{\lambda,\varkappa}$, die Koeffizienten von (H), ist noch einiges zu sagen.

Bezeichnen wir die Anfangswerte der $\varepsilon_{\lambda,\varkappa}$ mit $\varepsilon^{(0)}_{\lambda,\varkappa}$, so bilden die Integralgleichungen von (12)

$$\varepsilon_{\lambda,\varkappa} = \varphi_{\lambda,\varkappa}(q_1 \ldots q_n;\ \ \varepsilon^{(0)}_{1,\varkappa} \ldots \varepsilon^{(0)}_{n,\varkappa})$$

die endlichen Gleichungen einer Gruppe. Denn setzen wir

$$\sum_\mu c_{\mu,\nu,\lambda}\, \varepsilon_{\mu,\varkappa} = \xi_{\nu,\lambda,\varkappa},$$

so lauten die Gleichungen (12)

$$\frac{\partial \varepsilon_{\lambda, \varkappa}}{\partial q_\iota} = \sum_\nu \pi_{\nu, \iota} \xi_{\nu, \lambda, \varkappa}.$$

Da diesen Differentialgleichungen die Funktionen $\varphi_{\lambda, \varkappa}$ genügen, so stellen die n Gleichungen

$$\varepsilon_{\lambda, \varkappa} = \varphi_{\lambda, \varkappa}$$

(für $\lambda = 1, 2 \ldots n$, aber ein bestimmtes, wenn auch beliebiges $\varkappa$) nach dem ersten Fundamentalsatze Lies[1]) in der Tat eine Gruppe dar; $q_1 \ldots q_n$ spielen die Rolle von Parametern.

Aus den Gleichungen

$$\varepsilon_{\lambda, \varkappa} = \varphi_{\lambda, \varkappa}(q_1 \cdots q_n; \quad \varepsilon_{1, \varkappa}^{(0)} \ldots \varepsilon_{n, \varkappa}^{(0)})$$

$$\varepsilon'_{\lambda, \varkappa} = \varphi_{\lambda, \varkappa}(q'_1 \cdots q'_n; \quad \varepsilon_{1, \varkappa} \ldots \varepsilon_{n, \varkappa})$$

folgen also die Gleichungen

$$\varepsilon'_{\lambda, \varkappa} = \varphi_{\lambda, \varkappa}(q''_1 \ldots q''_n; \quad \varepsilon_{1, \varkappa}^{(0)} \ldots \varepsilon_{n, \varkappa}^{(0)}),$$

wo $q''_1 \ldots q''_n$ allein Funktionen von $q_1 \ldots q_n$ und $q'_1 \ldots q'_n$ sind.

Nun sind aber die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe

$$\sum_\lambda \xi_{\mu, \lambda, \varkappa} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{\lambda, \varkappa}} = \sum_{\lambda, \nu} c_{\nu, \mu, \lambda} \varepsilon_{\nu, \varkappa} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{\lambda, \varkappa}}$$

nichts anderes als die infinitesimalen Transformationen der zur Gruppe $X_\varrho = \sum_\lambda \xi_{\varrho, \lambda} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda}$ gehörenden adjungierten Gruppe.[2])

Daher haben wir den **Satz:**

Die beliebigen Werten der q nach (12) *zugeordneten ε gehen aus den beliebig gewählten Anfangswerten der ε durch Anwendung der zu der gegebenen Gruppe* (*B*) *gehörenden adjungierten Gruppe hervor, wobei die Koordinaten $q_1 \ldots q_n$ die Rolle von Parametern spielen. Die Parametergruppe dieser neuen Gruppe ist aber gerade wieder die alte Gruppe.*

Zum Beweise dieser letzten Behauptung schreiben wir (12) so:

$$\xi_{\mu, \lambda, \varkappa} = \sum_\iota \xi_{\mu, \iota} \frac{\partial \varepsilon_{\lambda, \varkappa}}{\partial q_\iota}.$$

Aus dieser Gleichung aber folgt nach einem von **Lie** bewiesenen Satze[3]), daß

$$\sum_\iota \xi_{\mu, \iota} \frac{\partial f}{\partial q_\iota},$$

1) **Lie-Scheffers** S. 376; **Lie-Engel** III, S. 563.

2) **Lie-Scheffers** S. 464 Formel (19).

3) **Lie-Engel** I, S. 407, Theorem 72.

d. h. das Symbol der μten infinitesimalen Transformation der ursprünglichen Gruppe (B) gleichzeitig das Symbol der μten infinitesimalen Transformation der Parametergruppe ist.

Noch eine weitere merkwürdige Beziehung wollen wir ableiten. Ich behaupte nämlich, *daß die gegebene Gruppe* (B) *und die den* $\xi'_{\varrho,\lambda}$ (siehe Gleichung (14')) *entsprechende Gruppe reziproke*[1]) *einfach transitive Gruppen sind.*

Setzen wir nämlich analog (B)

$$X'_\varrho = \sum_\lambda \xi'_{\varrho,\lambda} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda},$$

so behaupte ich, daß für jedes Wertepaar ϱ, σ

$$(X_\varrho, X'_\sigma) = 0$$

ist. Und da unsere Gruppen nach der Annahme

$$|\xi_{\varrho,\lambda}| \neq 0 \quad \text{und} \quad |\varepsilon_{\lambda,\varrho}| \neq 0$$

einfach transitiv sind, so folgt die erste Behauptung aus unserer neuen nach den Lieschen Sätzen des 20. Kapitels der „Transformationsgruppen."

Unsere neue Behauptung ist aber sehr leicht zu beweisen. Da

$$(X_\varrho X'_\sigma) = \sum_{\lambda,\mu} \left(\frac{\partial \xi'_{\sigma,\lambda}}{\partial q_\mu} \xi_{\varrho,\mu} - \frac{\partial \xi_{\varrho,\lambda}}{\partial q_\mu} \xi'_{\sigma,\mu} \right) \frac{\partial f}{\partial q_\lambda}$$

und nach (14')

$$\xi'_{\varkappa,\lambda} = \sum_\varrho \xi_{\varrho,\lambda} \varepsilon_{\varrho,\varkappa},$$

so folgt durch eine einfache Rechnung die Behauptung, wenn man für die $\varepsilon_{\varrho,\varkappa}$ die Gleichungen (12) und für die $c_{\lambda,\mu,\nu}$ die Gleichungen (5) (Seite 10) beachtet.

Da man aus den Gleichungen (14') die $\varepsilon_{\varrho,\varkappa}$ eindeutig aus gegebenen $\xi'_{\varkappa,\lambda}$ und $\xi_{\varkappa,\lambda}$ bestimmen kann, so ergibt sich noch der folgende rein gruppentheoretische Satz:

Haben wir zwei Klassen von je n infinitesimalen Transformationen in je n Variablen:

$$X_\varrho = \sum_\lambda \xi_{\varrho,\lambda} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda} \quad \textit{und} \quad X'_\sigma = \sum_\lambda \xi'_{\sigma,\lambda} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda},$$

und verschwindet keine der Determinanten $|\xi_{\varrho,\lambda}|$ *und* $|\xi'_{\varrho,\lambda}|$ *identisch, so können die Transformationen der einen Klasse nur dann mit allen Transformationen der andern Klasse vertauschbar sein, wenn die*

---

1) Lie-Engel I, S. 380, Theorem 68.

Transformationen jeder Klasse eine n-gliedrige Gruppe erzeugen. Natürlich sind dann die Gruppen einfach transitiv und zu einander reziprok.

Da ich diesen Satz nicht brauche, kann ich seinen Beweis wohl unterdrücken; alle notwendigen Stücke zum Beweise sind aber in den Betrachtungen dieses Paragraphen enthalten.

§ 12. Die „Drehgruppe" und der „starre Körper von n Freiheitsgraden."

Wie wir aus den Gleichungen (H) (14), (14'), (14''), (14''') erkennen, transformieren sich die $\bar{e}$, J, ξ, Q anders als die ω. Es wird ein gewisses Interesse haben, den Fall zu untersuchen, wo wie beim starren Körper die $\bar{e}$, J, ξ, Q sich genau so transformieren wie die ω.

Man erkennt aber sofort, daß dann nur

$$E_{\varkappa,\lambda} = \varepsilon_{\lambda,\varkappa} \tag{J}$$

zu sein braucht.

Aus den Gleichungen

$$\sum_\lambda E_{\varkappa,\lambda}\varepsilon_{\lambda,\mu} = \delta_{\varkappa,\mu}$$

folgt dann aber

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_\lambda \varepsilon^2_{\lambda,\varkappa} = 1 \\ &\sum_\lambda \varepsilon_{\lambda,\varkappa}\varepsilon_{\lambda,\mu} = 0, \text{ wenn } \varkappa \gtrless \mu. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Da aber nach der Annahme (J) die Unterdeterminante eines jeden Elementes der Determinante $|\varepsilon_{\lambda,\varkappa}|$[1]) diesem Elemente gleich ist, so folgt auch

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_\varkappa \varepsilon^2_{\lambda,\varkappa} = 1 \\ &\sum_\varkappa \varepsilon_{\lambda,\varkappa}\varepsilon_{\mu,\varkappa} = 0 \text{ für } \lambda \gtrless \mu. \end{aligned}\right. \tag{15'}$$

Die Größen $\varepsilon_{\lambda,\varkappa}$ haben also den Charakter von Richtungskosinus in einem n-dimensionalen Raume; es gibt, wie leicht zu erkennen ist, unter ihnen $\frac{n(n-1)}{2}$ unabhängige, die Substitution (H) wird unter der Annahme (J) orthogonal.

Wir haben somit den Satz:

Ist die Substitution (H) orthogonal, so transformieren sich die ω genau so wie die J, $\bar{e}$, ξ und Q.

---

1) welche infolge (15) den Wert ± 1 hat; wir wollen $+1$ voraussetzen.

Wir wollen den Inbegriff von n solchen Größen, die sich wie die ω transformieren, einen „Vektor in bezug auf das System“[1]) nennen. Wir sprechen demnach auch kurz vom „Geschwindigkeitsvektor“ ω, vom „Impulsvektor“ J, vom „Kraftvektor“ Q. Doch wollen wir diese Werte, um Mißverständnisse zu verhüten, stets in Anführungsstriche setzen.

Wie wirkt nun die Annahme (J) auf die Differentialgleichungen (12) des vorigen Paragraphen zurück?

Statt (12) kann man auch schreiben

$$c_{\mu,\nu,\lambda} = \sum_{\varkappa,\iota} \frac{\partial \varepsilon_{\lambda,\varkappa}}{\partial q_\iota} \xi_{\nu,\iota} E_{\varkappa,\mu},$$

also nach (J)

$$c_{\mu,\nu,\lambda} = \sum_{\varkappa,\iota} \frac{\partial \varepsilon_{\lambda,\varkappa}}{\partial q_\iota} \varepsilon_{\mu,\varkappa} \xi_{\nu,\iota}$$

Das ist aber nach (15′) dasselbe wie

$$-\sum_{\varkappa,\lambda} \frac{\partial \varepsilon_{\mu,\varkappa}}{\partial q_\iota} \varepsilon_{\lambda,\varkappa} \xi_{\nu,\iota} \text{ d. h. wie } -c_{\lambda,\nu,\mu}.$$

Mithin ist jedenfalls eine notwendige Bedingung für die Möglichkeit von (J)

$$c_{\mu,\nu,\lambda} + c_{\lambda,\nu,\mu} = 0.$$

Bringt man dies zusammen mit

$$c_{\mu,\nu,\lambda} + c_{\nu,\mu,\lambda} = 0,$$

so folgt

$$\text{(IX)} \qquad \begin{cases} c_{\mu,\nu,\lambda} = \quad c_{\nu,\lambda,\mu} = \quad c_{\lambda,\mu,\nu} \\ = -c_{\lambda,\nu,\mu} = -c_{\nu,\mu,\lambda} = -c_{\mu,\lambda,\nu}. \end{cases}$$

Ist umgekehrt (IX) erfüllt, so folgt aus den Gleichungen (12) durch Multiplikation mit $\varepsilon_{\lambda,\varkappa}$ und Summation über λ

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_\iota} \sum_\lambda \varepsilon_{\lambda,\varkappa}^2 = \sum_{\mu,\nu,\lambda} c_{\mu,\nu,\lambda} \pi_{\nu,\iota} \varepsilon_{\mu,\varkappa} \varepsilon_{\lambda,\varkappa}.$$

Und das ist null, da zu jedem Gliede rechts auch das entgegengesetzt gleiche vorkommt. Ebenso folgt

$$\sum_\lambda \left(\varepsilon_{\lambda,\varkappa} \frac{\partial \varepsilon_{\lambda,\tau}}{\partial q_\iota} + \varepsilon_{\lambda,\tau} \frac{\partial \varepsilon_{\lambda,\varkappa}}{\partial q_\iota} \right) = \sum_{\mu,\nu,\lambda} c_{\mu,\nu,\lambda} \pi_{\nu,\iota} (\varepsilon_{\mu,\varkappa} \varepsilon_{\lambda,\tau} + \varepsilon_{\mu,\tau} \varepsilon_{\lambda,\varkappa}) = 0.$$

Daher wird für alle $\varkappa, \tau$

$$\sum_\lambda \varepsilon_{\lambda,\varkappa} \cdot \varepsilon_{\lambda,\tau} = \text{const.}$$

---

1) Wir brauchen also diesen Namen in etwas engerem Sinne als Hertz.

Und indem man die Anfangswerte $\varepsilon^{(0)}_{\lambda,\varkappa}$ der ε den Gleichungen (15) entsprechend wählt, erreicht man, daß die ε überhaupt stets die Gleichungen (15) und daher auch (J) erfüllen. Daher haben wir den Satz:

Dann und nur dann wird die Substitution (H), *welche* $d\delta\vartheta = 0$ *in* $\delta d\vartheta = 0$ *überführt, orthogonal sein können, wenn die Konstanten* $c_{\mu,\nu,\lambda}$ *der Gruppe* (B) *die Gleichungen* (IX) *erfüllen, d. h. wenn sie eine cyklische Vertauschung ihrer Indices gestatten.*

Definitionen: Eine solche Gruppe wollen wir eine „Drehgruppe" nennen und ein mechanisches System von n Freiheitsgraden, dessen lebendige Kraft T eine solche n-gliedrige Drehgruppe zuläßt — ob unter der Annahme $d\delta\vartheta = 0$ oder $\delta d\vartheta = 0$ ist gleichgültig[1]) — einen „starren Körper von n Freiheitsgraden". Auch hier wollen wir stets die Anführungszeichen anwenden.

Wir wollen eine orthogonale Substitution im folgenden auch kurz als eine „Drehung" bezeichnen. Auch wollen wir sagen, der „Geschwindigkeitsvektor" ω resp. der „Impulsvektor" J sei durch die Komponenten ω' resp. J' $(\delta\omega' = 0)$ auf „ein im 'starren Körper' festes Koordinatensystem" bezogen, dagegen durch die Komponenten ω resp. $J(d\delta\vartheta = 0)$ auf „ein im Raume festes Koordinatensystem".

Nach allem Früheren haben wir jetzt folgendes Theorem: *Ein „starrer Körper von n Freiheitsgraden" bewegt sich stets nach den Eulerschen Gleichungen im engeren Sinne:*

$$\frac{dJ'_\lambda}{dt} + \sum_{\mu,\nu} c'_{\lambda,\mu,\nu}\, \omega'_\mu J'_\nu = Q'_\lambda,$$

wo $J'_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \omega'_\lambda}$ *die Komponenten des „Impulsvektors",* ω'_λ *die Komponenten des „Geschwindigkeitsvektors" und* Q'_λ *die Komponenten des „Kraftvektors" nach „einem im Körper festen Koordinatensystem" bezeichnen. Die lebendige Kraft* T *ist eine quadratische Form der* ω' *mit konstanten Koeffizienten, die* c' *sind die charakteristisehen Konstanten Lies für die Bewegungsgruppe des „Körpers" und gestatten eine zyklische Permutation ihres Indices. Bei einer „Drehung" werden alle Vektoren in gleicher Weise transformiert; speziell gibt es eine „Drehung" mit noch* $\frac{n(n-1)}{2}$ *willkürlichen Konstanten, welche die Annahme* $\delta d\vartheta'_\lambda = 0$ $\left(\frac{d\vartheta'_\lambda}{dt} = \omega'_\lambda\right.$ *gesetzt*$\left.\right)$

---

1) Denn die zu den c' gehörige Gruppe ist, wie man leicht aus (18) erkennt, auch eine Drehgruppe.

in $d\delta\vartheta_\lambda = 0$ *überführt, d. h. das im Körper feste Koordinatensystem in eines der* $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$ *„im Raume festen Koordinatensysteme".*

In bezug auf ein solches „im Raume festes Koordinatensystem" genügt aber der „starre Körper" den n Impulsgleichungen

$$\frac{dJ_\lambda}{dt} = Q_\lambda,$$

wo wieder $J_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \omega_\lambda}$. *Speziell für eine kräftefreie Bewegung existieren n erste Integrale*

$$J_\lambda = \text{const.},$$

der „Impulsvektor" bleibt im Raume konstant.

Kapitel III.

Gruppentheoretische Betrachtungen.

§ 13. Über die Gruppe aller Drehungen des n-dimensionalen Raumes.

Offenbar ist der „starre Körper von n Freiheitsgraden" durch seine Gruppe kinematisch wesentlich charakterisiert. Denn ohne die Gruppe zu ändern, d. h. durch eine lineare Transformation der ω mit konstanten Koeffizienten kann man das T des „starren Körpers" stets auf die Form $\sum_i \omega_i^2$ bringen; die Eulerschen Gleichungen enthalten daher außer den c nichts mehr, was kinematisch charakteristisch wäre. Die nach Erledigung der Eulerschen Gleichungen aber noch zu integrierenden rein kinematischen Gleichungen (A) sind ebenfalls durch die c wesentlich charakterisiert; denn die Gleichungen (A) definieren ja die Gruppe; und da unsere Gruppe natürlich einfach transitiv ist, so sind Gruppen, die zu demselben c gehören, die also gleich zusammengesetzt sind, auch ähnlich[1]), d. h. alle Gleichungen (A), die zu denselben c gehören, können durch eine Punkttransformation ineinander übergeführt werden.

Die Konstanten c bestimmen also den „Körper" kinematisch; dagegen gehören zu einer Gruppe noch mehrere „starre Körper", insofern, als die Gruppe bei irgend einer linearen Substitution der ω mit konstanten Koeffizienten ungeändert bleibt, die für T oben vorausgesetzte Form $\sum \omega_i^2$ aber, wie wir noch sehen werden, nur für alle orthogonalen Substitutionen der ω. Daher ist der Satz, daß die Gruppe den

1) Lie-Engel I, S. 340, Theorem 64. Lie-Scheffers, S. 435, Theorem 30.

„starren Körper" charakterisiere, nur dann richtig, wenn wir alle „starren Körper", die zwar zur selben Gruppe gehören, deren T aber beliebige konstante Koeffizienten enthält, zum selben Typus rechnen.[1]) In diesem Sinne zählen also z. B. alle gewöhnlichen, um einen festen Punkt drehbaren starren Körper zu demselben Typus. Nach dieser Festsetzung können wir sagen:

Wenn wir alle Typen „starrer Körper" mathematisch-kinematisch kennen lernen wollen, genügt es, alle Drehgruppen aufzustellen.

Dieser Aufgabe aber schicken wir einige Betrachtungen über die „Drehungen" voran.

Zunächst sei bemerkt, daß der Name „Drehung" für orthogonale Substitution auch insofern berechtigt ist, als für zwei „Vektoren" $\omega_1' \ldots \omega_n'$ und $\omega_1'' \ldots \omega_n''$ die Ausdrücke $\sum \omega_\lambda'^2$, $\sum \omega_\lambda''^2$ und $\sum \omega_\lambda' \omega_\lambda''$ Invarianten sind und daher auch die Entfernung ihrer Endpunkte $\sqrt{\sum(\omega_\lambda' - \omega_\lambda'')^2}$. Und dadurch sind auch umgekehrt die orthogonalen Substitutionen aus den anderen linearen eindeutig herausgehoben, und zwar genügt es bereits, die Invarianz von $\sum \omega_\lambda^2$ zu fordern. Daher bilden auch alle Drehungen wieder eine Gruppe, die „Gruppe aller Drehungen des n-dimensionalen Raumes".

Wir wollen von dieser Gruppe folgenden Satz beweisen:

Die Gruppe aller Drehungen des n-dimensionalen Raumes und die Gesamtheit ihrer Untergruppen ist dadurch charakterisiert, daß die n^2 Koeffizienten einer jeden ihrer infinitesimalen Transformationen

$$\delta_\lambda \omega_\varrho = \sum_{\mu=1\ldots n} a_{\lambda,\mu,\varrho}\, \omega_\mu\, \delta\tau_\lambda \,{}^{2)} \qquad (\varrho = 1, 2 \ldots n)$$

eine schiefe Determinante $n$ten Grades bilden und zwar für jedes vorhandene λ. Das heißt also: es ist

$$a_{\lambda,\mu,\varrho} = -a_{\lambda,\varrho,\mu}$$

und

$$a_{\lambda,\mu,\mu} = 0.$$

---

1) d. h. anstatt die Verschiedenheit der Eulerschen Gleichungen auf die Mannigfaltigkeit der dieselbe Gruppe definierenden c zu werfen, während wir die Form $T = \Sigma\omega_\lambda^2$ beibehalten, werfen wir sie jetzt zweckmäßiger auf die Mannigfaltigkeit der Konstanten von T, um so über die c frei verfügen zu können.

2) Daß die a konstant, daß also die infinitesimalen Transformationen lineare Funktionen der ω sind, ist selbstverständlich, da ja die endlichen Transformationsgleichungen linear und homogen sind.

Der Beweis lautet so:

Es muß infolge der Invarianz von $\sum \omega_\varrho^2$

$$\sum_\varrho \omega_\varrho \delta_\lambda \omega_\varrho = 0$$

sein, also

$$\sum_{\mu,\varrho} a_{\lambda,\mu,\varrho} \omega_\varrho \omega_\mu = 0$$

oder

$$\sum_{\varrho,\mu \leq \varrho} \omega_\varrho \omega_\mu (a_{\lambda,\mu,\varrho} + a_{\lambda,\varrho,\mu}) = 0$$

für alle ω.

Und daraus folgt dann die aufgestellte Behauptung. Der Beweis läßt sich auch umkehren, und daher ist die gegebene Bedingung *auch hinreichend*.

Aus diesem Satze folgt beispielsweise, daß die adjungierte Gruppe einer Drehgruppe eine n gliedrige Untergruppe der Gruppe aller Drehungen ist, ebenso die auf Seite 40 genannte Gruppe der ε, wenn die Bedingungen (IX) (Seite 43) erfüllt sind.

Wir wollen noch im folgenden den Kegel:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_n^2 = 0,$$

der natürlich bei allen „Drehungen" in sich übergeht, als den „absoluten Kegel" bezeichnen.

Wir können dann über die Gruppe aller Drehungen noch den folgenden, für uns wichtigen Satz beweisen:

Man kann in dem Raume der ω jedes lineare Gebilde durch den Nullpunkt in jedes andere gleicher Dimension durch eine Drehung überführen, wenn keines der beiden linearen Gebilde den absoluten Kegel berührt.

Wir beweisen zunächst, daß man die $(n-1)$ dimensionale Ebene

$$\sum_\nu \lambda_\nu \omega_\nu = 0$$

dann in $\omega_n = 0$ überführen kann, wenn nicht $\sum \lambda_\nu^2 = 0$ ist, wenn also die Ebene nicht den absoluten Kegel berührt.

Drehen wir also, indem wir setzen

$$\omega_\nu = \sum_\varkappa h_{\nu,\varkappa} \omega'_\varkappa,$$

wo

$$\sum_\varkappa h_{\nu,\mu}^2 = 1$$

$$\sum_\varkappa h_{\nu,\varkappa} h_{\mu,\varkappa} = 0 \text{ für } \nu \gtrless \mu,$$

und soll dann $\sum \lambda_\nu \omega_\nu$ in $\omega_n' \cdot \text{const.}$ übergehen, so muß sein

$$\sum_\nu \lambda_\nu h_{\nu,\varkappa} = 0 \text{ für } \varkappa = 1, 2 \cdots n-1,$$

während $\sum_\nu \lambda_\nu h_{\nu,n}$ nicht Null werden darf.

Nun verfahren wir folgendermaßen:

Wir wählen irgend ein Lösungssystem von

$$\sum_\nu \lambda_\nu h_{\nu,1} = 0,$$

das nicht identisch Null ist. Durch Multiplikation aller $h_{\nu,1}$ mit demselben Faktor können wir noch erreichen, daß

$$\sum h_{\nu,1}^2 = 1$$

ist. Denn wäre für alle Lösungssysteme der Gleichung $\sum \lambda_\nu h_{\nu,1} = 0$ auch $\sum h_{\nu,1}^2 = 0$, so müßte $h_{\nu,1} = \tau_0 \lambda_\nu$ sein[1]) und daher auch $\sum \lambda_\nu^2 = 0$, was ausgeschlossen sein sollte. ($\tau_0 = 0$ ist auch nicht möglich, ebensowenig $\tau_0 = \infty$.) Jetzt nehmen wir eine nicht verschwindende Lösung der Gleichungen

$$\sum_\nu \lambda_\nu h_{\nu,2} = 0 \text{ und } \sum h_{\nu,1} h_{\nu,2} = 0.$$

Wieder kann nicht $\sum h_{\nu,2}^2 = 0$ sein, da sonst

$$h_{\nu,2} = \tau_1 h_{\nu,1} + \tau_0 \lambda_\nu$$

sein müßte. Daraus folgte dann zunächst durch Multiplikation mit λ_ν und Summation $\tau_0 = 0$. Multiplikation mit $h_{\nu,1}$ und Summation über ν gäbe dann auch $\tau_1 = 0$, alle $h_{\nu,2}$ wären Null, was doch nicht so sein sollte.

Man kann also auch wieder erreichen, daß

$$\sum h_{\nu,2}^2 = 1$$

ist. So fahren wir fort.

An vorletzter Stelle haben wir die Gleichungen zu lösen:

$$\sum \lambda_\nu h_{\nu,n-1} = 0, \sum h_{\nu-1} h_{\nu,n-1} = 0 \cdots \sum h_{\nu,n-2} h_{\nu,n-1} = 0.$$

Das sind $n-1$ lineare homogene Gleichungen mit n Unbekannten;

1) weil für alle $dh_{\nu,1}$, die $\sum \lambda_\nu dh_{\nu,1} = 0$ genügen, auch $\sum h_{\nu,1} dh_{\nu,1} = 0$ sein müßte.

sie besitzen eine von Null verschiedene Lösung. Wäre für diese Lösung auch $\sum_\nu h_{\nu,n-1}^2 = 0$, so folgte

$$h_{\nu,n-1} = \tau_0 \lambda_\nu + \tau_1 h_{\nu,1} + \cdots + \tau_{n-2} h_{\nu,n-2}.$$

Daraus müßte man wieder, ebenso wie früher, nach einander $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 0 \cdots \tau_{n-2} = 0$ schließen, die $h_{\nu,n-1}$ wären alle Null, was nicht sein kann. Man kann daher auch

$$\sum h_{\nu,n-1}^2 = 1$$

erreichen.

Schließlich bleibt zu lösen:

$$\sum_\nu h_{\nu,1} h_{\nu,n} = 0, \quad \cdots \sum_\nu h_{\nu,n-1} h_{\nu,n} = 0.$$

Das sind wieder $n-1$ homogene Gleichungen, sie haben eine von Null verschiedene Lösung, und es ist auch nicht $\sum h_{\nu,n}^2 = 0$, da sonst

$$h_{\nu,n} = \tau_1 h_{\nu,1} + \cdots + \tau_{n-1} h_{\nu,n-1}$$

folgen würde, woraus man wieder das Verschwinden aller τ zu schließen hätte. Daher kann auch $\sum_\nu h_{\nu,n}^2 = 1$ gesetzt werden. Damit sind aber alle geforderten Gleichungen für die h befriedigt; es bleibt nur noch zu zeigen, daß $\sum h_{\nu,n} \lambda_\nu$ nicht verschwindet.

Wäre das nämlich der Fall, so müßte, weil die Gleichungen $\sum h_{\nu,n} h_{\nu,\varkappa} = 0$ $(\varkappa < n)$ erfüllt sind, eine lineare Relation $\tau_0 \lambda_\nu + \tau_1 h_{\nu,1} + \cdots + \tau_{n-1} h_{\nu,n-1} = 0$ bestehen, die aber nach den früheren Schlußweisen und nach den Annahmen über die λ ebenfalls unmöglich ist.

Man kann also alle Bedingungen für die h befriedigen.

Damit ist gezeigt, daß in der Tat durch eine Drehung jede Ebene $\sum \lambda_\nu \omega_\nu = 0$ in die Form $\omega_n = 0$ gebracht werden kann, wenn nicht $\sum \lambda_\nu^2 = 0$ ist, d. h. wenn nicht die Ebene den absoluten Kegel berührt.

Um nun ähnliches von jeder niederen, etwa $(n-\nu)$ dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit zu zeigen, legen wir durch diese eine nächsthöhere Mannigfaltigkeit, die auch den absoluten Kegel nicht berührt, (was stets möglich ist) usw., schließlich eine $(n-1)$-dimensionale Ebene. Diese drehen wir dann in $\omega_n = 0$. In dieser Ebene drehen wir die nächstniedere Mannigfaltigkeit in $\omega_{n-1} = 0$, und so fahren wir fort, bis wir schließlich die gegebene $n-\nu$ dimensionale Mannigfaltigkeit in die Form $\omega_n = 0$, $\omega_{n-1} = 0 \cdots \omega_{n-\nu+1} = 0$ gebracht haben.

Und damit ist der genannte Satz bewiesen.

§ 14. Die Zusammensetzung der reellen Drehgruppen.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns dem Studium der Drehgruppen zu.

Zunächst ist, wie aus den Formeln auf Seite 19 hervorgeht, die Gruppe des starren Körpers eine Drehgruppe.

Es gibt aber überhaupt nur zwei dreigliedrige Drehgruppen. Denn da stets die c mit zwei gleichen Indices verschwinden müssen, so bleibt allein $c_{1,2,3}$ übrig. Ist auch noch $c_{1,2,3}$ Null, so sind alle c Null, die Gruppe besteht aus lauter vertauschbaren Transformationen und ist mit der Gruppe der Translationen ähnlich; wenn aber $c_{1,2,3}$ nicht Null ist, so kann man durch passende Wahl der ω erreichen, daß $c_{1,2,3} = 1$ wird, sodaß also die Gruppe dann mit der Gruppe der Drehungen im dreidimensionalen Raume ähnlich ist.[1])

Nach den Bemerkungen im Anfange des vorigen Paragraphen können wir auch sagen:

Es gibt wesentlich zwei „starre Körper von drei Freiheitsgraden“: den um einen festen Punkt drehbaren gewöhnlichen starren Körper und den freibeweglichen Punkt.

Es ist ein erschwerender Umstand, daß das charakteristische Merkmal (IX) (Seite 43) der Drehgruppe nicht an allen ihren Darstellungen hervortritt. Man kann nämlich statt der ω solche linearen Verbindungen ω' einführen mit konstanten Koeffizienten

$$
\text{(K)} \qquad \begin{cases} \omega_\varkappa = \sum_\lambda h_{\varkappa,\lambda}\,\omega'_\lambda \\ \text{oder} \\ \omega'_\lambda = \sum_\varkappa H_{\lambda,\varkappa}\,\omega_\varkappa \end{cases}
$$

daß für die zu den ω' gehörenden c' die Relationen (IX) nicht mehr erfüllt sind.

Aus (K) folgt nämlich analog (14′)

$$\xi_{\varrho,\lambda} = \sum_\varkappa H_{\varkappa,\varrho}\,\xi'_{\varkappa,\lambda},$$

und daraus

$$X_\varrho = \sum_\varkappa H_{\varkappa,\varrho}\,X'_\varkappa$$

also

$$X'_\varkappa = \sum_\lambda h_{\lambda,\varkappa}\,X_\lambda.$$

---

1) Vergleiche Lie-Scheffers S. 571. Von den dort angegebenen 7 Typen können also nur der erste und letzte Typus in Drehgruppen verwandelt werden. Siehe betreffend I die Form I′ auf Seite 568.

Daraus nun ergeben sich die Formeln

$$\sum_{\lambda} h_{\tau,\lambda} c'_{\mu,\nu,\lambda} = \sum_{\varkappa,\sigma} c_{\sigma,\varkappa,\tau} h_{\sigma,\mu} h_{\varkappa,\nu}\ ^{1)}$$

oder auch

$$c'_{\mu,\nu,\lambda} = \sum_{\sigma,\varkappa,\tau} c_{\sigma,\varkappa,\tau} h_{\sigma,\mu} h_{\varkappa,\nu} H_{\lambda,\tau}. \tag{16}$$

Wenn nun auch die $c_{\sigma,\varkappa,\tau}$ die Gleichungen (IX) befriedigen, so wird doch nur dann auch

$$c'_{\mu,\nu,\lambda} + c'_{\lambda,\nu,\mu} = 0$$

sein, wenn

$$\sum_{\sigma,\varkappa,\tau} c_{\sigma,\varkappa,\tau} h_{\varkappa,\nu} (h_{\sigma,\mu} H_{\lambda,\tau} + h_{\sigma,\lambda} H_{\mu,\tau}) = 0$$

ist für alle λ, μ, ν.

Und da natürlich die Determinante der h nicht Null sein darf, so folgt

$$\sum_{\sigma,\tau} c_{\sigma,\varkappa,\tau} (h_{\sigma,\mu} H_{\lambda,\tau} + h_{\sigma,\lambda} H_{\mu,\tau}) = 0$$

oder unter Berücksichtigung von (IX)

$$\sum_{\tau,\sigma \leqq \tau} c_{\sigma,\varkappa,\tau} [h_{\sigma,\mu} H_{\lambda,\tau} + h_{\sigma,\lambda} H_{\mu,\tau} - h_{\tau,\mu} H_{\lambda,\sigma} - h_{\tau,\lambda} H_{\mu,\sigma}] = 0.$$

Im allgemeinen wird diese Bedingung nicht erfüllt sein, wohl aber stets dann, wenn $h_{\sigma,\lambda} = H_{\lambda,\sigma}$ ist, d. h. wenn die Substitution (K) orthogonal ist. Also haben wir den Satz:

Bei einer orthogonalen Substitution der ω mit konstanten Koeffizienten bleibt die Bedingung (IX) *der Drehgruppe in dieser Form erhalten,* aber im allgemeinen nicht bei allen linearen Substitutionen.

Nun wollen wir eine charakteristische Eigenschaft für die adjungierte Gruppe einer Drehgruppe beweisen. Die νte infinitesimale Transformation dieser adjungierten Gruppe lautet, wie schon oft angegeben

$$\delta_\nu \omega_\lambda = \sum_{\mu} c_{\mu,\nu,\lambda} \omega_\mu \delta\vartheta_\nu.$$

Wenn nun die Gleichungen (IX) erfüllt sind, so ist die Determinante

$$|c_{\mu,\nu,\lambda}| \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2 \dots n \\ \lambda = 1, 2 \dots n \end{pmatrix}$$

schief für alle ν.

Und daher ist nach dem auf Seite 46 bewiesenen Satze *die adjungierte Gruppe einer Drehgruppe eine n-gliedrige Untergruppe der Gruppe aller Drehungen des n-dimensionalen Raumes.*

---

1) Siehe Lie-Engel I S. 290, Formel (3).

Dieser Satz zusammen mit dem oben genannten ermöglicht uns nun ein genaueres Studium der Drehgruppen.

Wir bedienen uns zu dem Zwecke nach Lie des Hilfsmittels, daß wir jede infinitesimale Transformation unserer Gruppe durch einen Strahl $\omega_1 : \omega_2 : \cdots : \omega_n$ im n-dimensionalen Raume der ω darstellen. Dann entspricht jeder ν-gliedrigen Untergruppe eine ν-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit durch den Anfangspunkt, die bei allen Transformationen der adjungierten Gruppe, deren repräsentierende Punkte in ihr liegen, ungeändert bleibt.[1]) Ist die Untergruppe in der Gruppe invariant, so bleibt die ebene Mannigfaltigkeit bei allen Transformationen der adjungierten Gruppe ungeändert.[2])

Wir machen nun die Voraussetzung, daß die Drehgruppe reell sei.

Nehmen wir weiterhin zunächst einmal an, daß sie eine reelle invariante Untergruppe besitze.

Dann kann man durch eine Substitution (K) (Seite 50) und zwar durch eine reelle Drehung solche neuen ω einführen, daß die der Untergruppe entsprechende ebene Mannigfaltigkeit in die Mannigfaltigkeit $\omega_n = 0$, $\omega_{n-1} = 0 \cdots \omega_{\nu+1} = 0$ übergeht. (Siehe den Satz auf Seite 47.) Dadurch ist dann erreicht, daß die ν infinitesimalen Transformationen der invarianten Untergruppe gerade $X_1 \ldots X_\nu$ werden, ohne daß dabei die charakteristische Eigenschaft (IX) der $c_{\lambda,\mu,\nu}$ verloren gegangen ist. (Nach dem Satze auf Seite 51.) Weil nun zunächst die $X_1 \ldots X_\nu$ für sich eine Gruppe bilden, so ist jedes c Null, das zwei Indices aus der Reihe $1, 2 \ldots \nu$ und einen aus der Reihe $\nu + 1, \cdots n$ besitzt. Weil ferner diese Untergruppe invariant ist, und daher bei der Bildung der Klammersymbole $(X_\varkappa, X_{\nu+\lambda})$ $(\varkappa = 1, 2 \cdots \nu)$ nur lineare Verbindungen von $X_1 \ldots X_\nu$ entstehen, so verschwinden auch alle c mit einem Index aus der Reihe $1, 2 \ldots \nu$ und zwei Indices aus der Reihe $\nu + 1 \cdots n$. Infolgedessen bilden aber die Transformationen $X_{\nu+1} \ldots X_n$ selbst nicht nur wieder eine Gruppe, sondern sogar eine invariante Untergruppe der ganzen Gruppe; außerdem ist jedes Element der ersten Gruppe mit jedem Element der zweiten vertauschbar, da ja jedes c verschwindet, das einen Index aus der Reihe $1, 2 \ldots \nu$ und einen aus der Reihe $\nu + 1 \cdots n$ enthält, gleichgültig, welches der dritte Index sei.

Enthält nun eine oder beide der Untergruppen ihrerseits wieder eine invariante Untergruppe, so fahren wir so fort; schließlich müssen

---

1) Lie-Scheffers, Kap. 18, § 1 und § 3, speziell S. 478.

2) Ebenda, S. 485.



wir natürlich zum Ziele kommen, d. h. die ganze Gruppe besteht aus lauter invarianten Untergruppen, die alle mit einander vertauschbar sind, die reell und im Reellen einfach sind und also keine reelle invariante Untergruppe mehr enthalten. Mithin haben wir den Satz:

Jede reelle Drehgruppe besteht aus einer Reihe von reellen Drehgruppen $X_1 \cdots X_{\nu_1}$; $X_{\nu_1+1} \cdots X_{\nu_2}$; $\cdots X_{\nu_\varkappa+1} \cdots X_n$, *die alle mit einander vertauschbar sind und von denen jede im Reellen einfach ist.*

Wollen wir nun diese im Reellen einfachen Drehgruppen weiter kennen lernen, so bedürfen wir, wie wir sehen werden, einer kurzen Betrachtung der homogenen ganzen Invarianten zweiten Grades der zugehörigen adjungierten Gruppe.

Eine solche Invariante kennen wir, nämlich

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_n^2.$$

Denn die adjungierte Gruppe ist ja eine Untergruppe der Gruppe aller Drehungen.

Ich behaupte nun, *daß eine reelle, im Reellen einfache Drehgruppe keine weitere quadratische homogene Invariante ihrer adjungierten Gruppe haben kann.*

Existierte nämlich eine solche, so könnte man sie durch eine reelle Drehung auf die Form bringen

$$A_1 \omega_1^2 + \cdots A_n \omega_n^2.$$[1]

Soll das aber eine Invariante sein, so muß für alle ω und alle λ

$$\sum_\varkappa A_\varkappa \omega_\varkappa \delta_\lambda \omega_\varkappa = 0$$

sein, d. h.

$$\sum_{\varkappa, \tau} A_\varkappa \omega_\varkappa c_{\tau, \lambda, \varkappa} \omega_\tau = 0,$$

also auch

$$A_\varkappa c_{\tau, \lambda, \varkappa} + A_\tau c_{\varkappa, \lambda, \tau} = 0$$

für alle $\varkappa$, τ, λ.

Die Bedingung kann man nach (IX) auch schreiben

$$c_{\tau, \lambda, \varkappa}(A_\varkappa - A_\tau) = 0.$$

Entweder sind also alle A einander gleich — und das gibt allein die alte Invariante — oder es lassen sich die A in Klassen teilen, deren Individuen einander gleich sind. Dann müssen aber nach der eben hingeschriebenen Bedingungsgleichung alle $c_{\tau, \lambda, \varkappa}$ verschwinden, wenn

1) Siehe Baltzer: Determinanten Seite 187 und folgende (5. Aufl., Hirzel, Leipzig 1881).

nur zwei ihrer Indices verschiedenen dieser Klassen zugehören. Das heißt aber: entsprechend der Einteilung der A zerfällt auch die gegebene Drehgruppe in invariante Untergruppen, und zwar in reelle Drehgruppen, was doch nicht sein sollte. Also gibt es in der Tat nur die eine quadratische Invariante

$$\omega_1^2 + \cdots + \omega_n^2.$$

Nun besitzt aber nach den Untersuchungen der Herren Killing[1]) und Cartan[2]) die adjungierte Gruppe einer jeden Gruppe eine Invariante zweiten Grades; und zwar erhält man diese Invariante folgendermaßen: Man bilde die „charakteristische Determinante“:

$$\varDelta(\alpha) = \begin{vmatrix} \sum_\varrho c_{\varrho,1,1}\,\omega_\varrho - \alpha, & \sum_\varrho c_{\varrho,2,1}\,\omega_\varrho & \cdots & \sum_\varrho c_{\varrho,n,1}\,\omega_\varrho \\ \sum_\varrho c_{\varrho,1,2}\,\omega_\varrho, & \sum_\varrho c_{\varrho,2,2}\,\omega_\varrho - \alpha & \cdots & \sum_\varrho c_{\varrho,n,2}\,\omega_\varrho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_\varrho c_{\varrho,1,n}\,\omega_\varrho, & \sum_\varrho c_{\varrho,2,n}\,\omega_\varrho & \cdots & \sum_\varrho c_{\varrho,n,n}\,\omega_\varrho - \alpha \end{vmatrix}$$

und entwickle diese nach Potenzen von α. Der Koeffizient $\chi_2(\omega)$ von α^{n-2} ist dann eine quadratische Form der ω und zugleich eine Invariante der adjungierten Gruppe.

Nehmen wir einmal an, diese Form sei regulär, d. h. ihre Diskriminante sei von Null verschieden. Dann kann man durch eine geeignete lineare Substitution (K) der ω, die aber eventuell komplex sein muß, erreichen, daß diese Form die Gestalt

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_\mu^2$$

annimmt.

Durch diese Transformation muß aber die obige beliebige Gruppe in eine allerdings nicht notwendigerweise reelle Drehgruppe übergehen. Denn nach dem Satz auf Seite 46 müssen die Koeffizienten $c_{\tau,\lambda,\varkappa}$ für alle λ eine schiefe Determinante bilden, d. h. es muß sein

$$c_{\tau,\lambda,\varkappa} = - c_{\varkappa,\lambda,\tau}.$$

Und das ist ja das Charakteristikum der Drehgruppe. Damit haben wir den neuen Satz gewonnen:

1) Killing: „Die Zusammensetzung der stetigen, endlichen Transformationsgruppen“ Math. Annalen 31, 33, 34, 36 (Speziell 31, § 2).

2) E. Cartan: „Über die einfachen Transformationsgruppen“ Leipziger Berichte 1893 und: „Sur la structure des groupes de transformations finis et continus“ Thèse, Paris 1894.



Jede Gruppe, deren Killingsche Invariante $\chi_2(\omega)$ eine quadratische Form mit nicht verschwindender Diskriminante ist, kann, eventuell durch komplexe lineare Transformation der ω (natürlich mit konstanten Koeffizienten) *auf die Form einer Drehgruppe gebracht werden, d. h. einer Gruppe, deren c zyklisch vertauschbare Indices besitzen.*

Nun hat Herr Cartan gezeigt, daß für einfache Gruppen $\chi_2(\omega)$ tatsächlich regulär ist (Leipziger Berichte S. 401, Theorem I), ebenso für halbeinfache Gruppen (Thèse, Chapitre IV). Daraus folgt:

Jede einfache und jede halbeinfache Gruppe kann auf die Form einer Drehgruppe gebracht werden.

Dieses Resultat sei jetzt nur beiläufig erwähnt. Um die im Reellen einfachen Drehgruppen weiter zu untersuchen, gebrauchen wir den Satz, den die Theoreme I und IV des vierten Kapitels der Cartanschen Thèse enthalten: Jede Gruppe, für die $\chi_2(\omega)$ eine reguläre Form ist, ist entweder einfach oder ist aus einfachen, invarianten und unter einander vertauschbaren Untergruppen zusammengesetzt, d. h. sie ist einfach oder halbeinfach.

Nun besitzt unsere reell einfache Drehgruppe sicherlich eine quadratische Form mit nicht verschwindender Diskriminante als Invariante ihrer adjungierten Gruppe, nämlich $\omega_1^2 + \cdots + \omega_n^2$. Und da nach dem auf Seite 53 bewiesenen Satze eine weitere quadratische Invariante nicht vorhanden sein kann, so muß die Killingsche Invariante $\chi_2(\omega)$ gerade die Form const. $(\omega_1^2 + \cdots + \omega_n^2)$ haben.

Null kann die Konstante nicht sein, da im Falle einer Drehgruppe $\chi_2(\omega)$ die Form hat:

$$\sum_{\varrho, \sigma}\Big(\sum_{\varkappa}\omega_\varkappa c_{\varkappa, \varrho, \sigma}\Big)^2$$

(siehe Killing Annalen 31, S. 261). Dieser Ausdruck kann aber bei reellen c nur dann identisch Null sein, wenn alle c Null sind.

Daher findet der oben zitierte Satz des Herrn Cartan auf die reellen, im Reellen einfachen Drehgruppen seine Anwendung: sie lassen sich in eine Reihe invarianter, mit einander vertauschbarer einfacher Gruppen zerlegen, die dann natürlich nicht mehr reell sind (wenn nicht die reell einfache Gruppe auch schon im Komplexen einfach war).

Nehmen wir nun noch den schon oben vorweg genommenen Satz hinzu, so ergibt sich folgendes Theorem:

Jede reelle Drehgruppe läßt sich in eine Reihe invarianter miteinander vertauschbarer, einfacher, aber im allgemeinen nicht mehr reeller Gruppen zerspalten, denen man dann auch wieder die Form von Dreh-

gruppen geben kann. Denn man kann jede einfache Gruppe in eine Drehgruppe verwandeln, allerdings nicht immer im Gebiete des Reellen.

Und da die Herren Killing und Cartan alle Typen einfacher Gruppen angegeben haben, so ist damit das Problem der Untersuchung reeller Drehgruppen bis zu einem gewissen Grade erledigt. Es wäre aber z. B. noch die Frage der Untersuchung wert, ob es zu jedem Typus von einfachen Gruppen auch reell einfache Gruppen gibt, eine Frage, die wohl nicht immer zu bejahen ist.

Die Untersuchung komplexer Drehgruppen habe ich noch nicht bis zu dem für reelle Gruppen erreichten Standpunkte führen können. Zwar lassen sich im allgemeinen die Überlegungen ähnlich durchführen, doch macht ein spezieller Fall Schwierigkeiten: nämlich die Annahme, daß eine Drehgruppe auftrete, die als einzige invariante Untergruppen solche besitzt, deren repräsentierende lineare Mannigfaltigkeiten den absoluten Kegel berühren. Man kann dann deren Untergruppen nicht mehr die Form $X_1 \ldots X_\nu$ geben, ohne das Merkmal IX der Drehgruppe zu ändern. Wir sehen daher hier von der Untersuchung komplexer Drehgruppen ab.

Noch ein spezielles Resultat mag erwähnt werden, das aus der Anwendung der hier erhaltenen Resultate auf die Überlegungen zu Anfang des dritten Kapitels folgt:

Außer der eingliedrigen Gruppe der Translationen und der dreigliedrigen der Rotationen gibt es unterhalb $n = 8$ nach Killing und Cartan keine einfachen Gruppen.

Daher sind die einzigen Typen „starrer Körper“ von weniger als 8 Freiheitsgraden die folgenden:

1. Der materielle Punkt mit einer, zwei oder drei Translationsbewegungen.

2. Der um einen festen Punkt drehbare starre Körper.

3. Der um einen festen Punkt drehbare starre Körper und ein von ihm unabhängiger materieller Punkt mit einer, zwei oder drei Translationsbewegungen.

4. Zwei von einander unabhängige, je um einen festen Punkt drehbare starre Körper.

5. Zwei von einander unabhängige Punkte mit je einer, zwei oder drei Translationsbewegungen.

6.–8. Einer der drei zuletzt genannten Fälle und dazu noch ein unabhängiger materieller Punkt mit einer Translationsbewegung.

Das ist so zu verstehen: Das Gleichungssystem eines „starren Körpers" von z. B. 7 Freiheitsgraden kann auf eine solche Form gebracht werden, daß einige Gleichungen einfach lauten

$$\frac{dJ_k}{dt} = Q_k;$$

die andern lassen sich in Klassen zu je dreien zusammenfassen, so daß jede Klasse genau die Form der gewöhnlichen Eulerschen Gleichungen annimmt (siehe Seite 19). Dabei können aber alle J noch lineare Verbindungen sämtlicher sieben ω sein (mit konstanten Koeffizienten).

Diese Bemerkung gilt allgemein:

Einer Zerlegung der Gruppe entspricht zwar eine formale Zerlegung der Gleichungen; da aber die Impulskomponenten J noch lineare Verbindungen aller ω sein können, kann man nicht von einer Zerlegung des „starren Körpers" sprechen, sondern nur von einer Zerlegung des Typus. (Siehe die Erörterung über den Begriff Typus zu Anfang des dritten Kapitels.)

Karlsruhe, im Oktober 1903.

Graphische Dynamik der Getriebe.

Von FERDINAND WITTENBAUER in Graz.

(Mit einer Tafel Nro. I.)

Es ist nun ziemlich lange her, daß die graphische Methode ihren siegreichen Einzug in die technische Statik gehalten hat. Wie sehr hat sie unsere Arbeiten in diesem Gebiete verändert! Wo früher langwierige Rechnungen notwendig waren, da genügen jetzt ein paar Linien, deren durchsichtiges Gewebe uns die gestellte Aufgabe völlig überblicken und begangene Fehler leicht erkennen läßt. Und noch immer häufen sich die Fortschritte dieser neuen Methode; seit geraumer Zeit hat sie sich zu einer eigenen Wissenschaft entwickelt.

Man war wohl berechtigt, zu vermuten oder zu hoffen, daß auch die technische Dynamik einen ähnlichen Weg einschlagen werde. Bei der tiefen und wissenschaftlich fest begründeten Beziehung zwischen Statik und Dynamik, welche gestattet, Probleme der letzteren auf statische Probleme zurückzuführen, war diese Erwartung wohl gerechtfertigt. Auch schienen die vielgestaltigen und schwierigen Probleme, welche der Maschinenbau stellt, eine graphische Durchführung der Dynamik notwendig zu erheischen. Allein hier kamen wir über gewisse erste Anläufe nicht hinaus.



Nicht etwa, daß die graphische *Darstellung* gewisser Bewegungsvorgänge unbenützt geblieben wäre. Im Gegenteile: von ihr hat die Technik häufig genug Gebrauch gemacht. Ich erinnere nur an die vielfältigen Diagramme, die den Verlauf gewisser Bewegungsgrößen, z. B. der Geschwindigkeit, oder den Verlauf eines veränderlichen Widerstandes oder einer Triebkraft darstellen sollen; ich erinnere an die von Zeuner ersonnenen Schieberdiagramme, an die von Lasche gegebene räumliche Darstellung der Reibungsdiagramme (vgl. dessen Aufsatz: Reibungsverhältnisse in Lagern, Zeitschr. d. Ver. Deutscher Ing. 1902) u. dergl. m.

Allein die graphische Darstellung von Bewegungsgrößen ist noch ziemlich weit entfernt von einer graphischen Dynamik. Das Konstruieren einer Kraft oder einer Bewegung aus rein geometrischen Überlegungen oder etwa aus einer Formel ist ein wesentlich anderer Vorgang als die graphische Ermittlung einer Bewegung aus den gegebenen Kräften und mit Rücksicht auf die vorhandenen Massen.

Als in den letzten Jahrzehnten die Kinematik sich mächtig zu entwickeln begann und bei Schilderung der Bewegungsvorgänge im Getriebe allmählich die rechnerische Methode verließ und besondere graphische Methoden ersann, wandte sich ihr eine Zeitlang die Hoffnung der konstruierenden Ingenieure zu. Allein dieses Interesse erlosch, weil man sich in seinen Erwartungen getäuscht fühlte. Mit Unrecht. Man durfte von der Kinematik nicht mehr verlangen, als sie zu bieten imstande war. Als reine Bewegungslehre, die auf die Masse des bewegten Gebildes keine Rücksicht nimmt, konnte sie dynamische Fragen nicht lösen und mußte deshalb, wenn trotzdem derartige Ansprüche an sie heran traten, die Antwort schuldig bleiben. Allein das Mißtrauen, welches aus dieser Unbefriedigung entstand, ist nicht gerechtfertigt. Die Kinematik der Getriebe mit ihren Untersuchungen über Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustände wird eine der schönsten Blüten der technischen Mechanik bleiben, und es wäre nur zu wünschen, daß sich das Interesse der denkenden und forschenden Ingenieure ihr wieder zuwenden möge.

Um dynamische Fragen graphisch zu lösen, müßte zunächst gezeigt werden, wie die Masse des Bewegten ihren Einfluß auf die Bewegung geltend macht. Dies ist bisher nur rechnerisch geschehen. Allein die rechnende Dynamik, so ausgebildet sie auch ist, versagt in den meisten Fällen technischer Anwendung, weil entweder die analytischen Hilfsmittel nicht ausreichen, das Problem zu Ende zu führen oder weil die Lösung so schwierig und umständlich wird, daß der Ingenieur vor ihr zurückschreckt. Man rechne z. B. nur einmal die bei einem ein-

fachen Schubkurbelgetriebe auftretenden Trägheitskräfte oder Beschleunigungsdrücke, wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit veränderlich ist, und man wird von der Länge und Unübersichtlichkeit der entstehenden Formeln sehr unangenehm überrascht sein. Und trotzdem mußte man eine Reihe vereinfachender Annahmen machen, um nur einigermaßen zum Ziele zu kommen.

Mit der Ermittlung dieser überlangen Formeln, in denen vielleicht auch noch unausführbare Integrationen vorkommen, ist aber dem Ingenieur nicht gedient. Er braucht *Ziffern;* er muß nun erst dazu übergehen, durch mühsames Einsetzen von Zahlen, meistens mit einer Reihe von Vernachlässigungen, das Resultat aus den Formeln zu ziehen.

Alle diese Schwierigkeiten häufen sich bei einem komplizierteren Getriebe derart, daß man schließlich auf eine wissenschaftliche Lösung der gestellten Frage verzichtet und zu roher Annäherung oder Schätzung greift.

Die beliebteste dieser Annäherungen ist jene, bei der die bewegte Masse des Getriebes durch eine andere ersetzt wird, welche nur rotiert, deren Einfluß auf die Bewegung sich also nicht ändert.

In dieser Weise wird z. B. bei der sogenannten graphischen Schwungradberechnung vorgegangen. An und für sich ist diese Berechnungsmethode ein erfreulicher Anlauf gewesen, die graphischen Methoden in die technische Dynamik einzuführen. Allein eine *dynamische* Methode, das Problem des Schwungrades zu lösen, bietet sie nicht; sie arbeitet mit konstanten Massen, hat also nichts vor der Kinematik voraus.

Auch die Radingersche Methode, bei welcher wenigstens die hin und her gehenden Massen und ihre Beschleunigungsdrücke berücksichtigt werden, ist nicht als dynamische Lösung der Aufgabe zu bezeichnen; denn hier werden die Beschleunigsdrücke so konstruiert, wie wenn die Kurbelwarze mit unveränderlicher Geschwindigkeit liefe, die Konstruktion nimmt also keine Rücksicht auf den Einfluß, den die bewegten Massen uud die bewegenden Kräfte auf die Veränderung dieser Geschwindigkeit nehmen. Trotzdem werden nachträglich die Schnittpunkte der Kraft- und Lastkurve im Diagramme als die Stellen größter und kleinster Geschwindigkeit der Kurbelwarze erklärt. (Vgl. die Kritik dieser Methode in Heun: „Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik".)

Eine dynamische Methode, den Gang der Maschine zu untersuchen, müßte alle diese Voraussetzungen, durch welche Widersprüche in die Theorie gebracht werden, fallen lassen; sie müßte die tatsächliche Massenverteilung des Getriebes ohne bequeme Vernachlässigungen oder willkürliche Annahmen vollständig berücksichtigen und insbesondere

weder für Masse noch für Geschwindigkeit konstante Mittelwerte ein führen. So lange überhaupt der veränderliche Einfluß der Masse auf den Gang der Maschine nicht berücksichtigt wird, so lange nur mit konstanten Mittelwerten gearbeitet wird, sind die graphischen Lösungen mehr kinematisch, als dynamisch zu bezeichnen.

Im Jahre 1874 hat R. Proell mit seinem Buche: „Versuch einer graphischen Dynamik“ die graphischen Methoden in die Dynamik einzuführen gesucht. Allein dieser Versuch ist, entsprechend obiger Bemerkung, von vorwiegend kinematischem Charakter; denn wo die Masse eingeführt wird, hat sie unveränderlichen Einfluß auf die Bewegung. Bezüglich der beliebig verteilten Masse sagt Proell auf S. 192 a. a. O.: „Vorläufig wollen wir die Lösung dieser sehr schwierigen Aufgabe noch auf sich beruhen lassen und von jeder anderen Masse, mit Ausschluß einer einzigen rotierenden, Abstand nehmen.“

Auch die verdienstvollen Versuche G. Hermanns, die graphischen Methoden in die Dynamik einzuführen (vgl. „Die graphische Theorie der Turbinen und Kreiselpumpen“, 1887 und „Graphische Untersuchung der Zentrifugal-Regulatoren“, Z. 1886) sind rein kinematischen oder statischen Charakters. Zu einer Berücksichtigung des veränderlichen Einflusses der Massen auf die Bewegung lag in diesen Arbeiten kein Anlaß vor.

Trotzdem wird es zu einer *graphischen Dynamik* d. h. zu einer graphischen Theorie des Maschinenproblems kommen müssen. Die Arbeitsweise unserer Zeit drängt förmlich dazu. Sind denn z. B. die Indikatordiagramme, die wir aufnehmen und die uns durch eine Fläche eine geleistete Arbeit darstellen, nicht der deutlichste Hinweis, daß wir der graphischen Dynamik bedürfen? Geben uns diese Diagramme die Arbeit nicht mit solcher Schärfe an, wie wir sie durch Rechnung niemals erreichen könnten?

Mit vielem Rechte hat G. Hermann schon 1874 in der Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure geschrieben: „Die technischen Hochschulen täten gut, in ihr Lehrprogramm die Disziplin einer graphischen Maschinenlehre aufzunehmen.“ Gewiß wäre es wünschenswert, wenn die studierende Jugend schon in den ersten Semestern mit der graphischen Darstellung der Bewegungsgrößen vertraut gemacht würde. Insbesondere sollte das Wesentliche über Diagramme (Geschwindigkeit-Zeit Diagramm, Kraft-Weg Diagramm u. a.) in jede Vorlesung über technische Mechanik aufgenommen werden.

Allein zu einer graphischen Maschinenlehre kann es doch erst kommen, wenn wir in der graphischen Dynamik etwas weiter gelangt sind, sonst würde die genannte Disziplin wesentlich bei der kinematischen Methode beharren.

Wir bedürfen für die graphische Dynamik erst noch eines so monumentalen Lehrwerkes, wie es Culmann für die graphische Statik und Burmester für die Kinematik geschaffen haben. Es wird die Aufgabe gelöst werden müssen, die Bewegung eines beliebigen Getriebes, dessen Kräfte, Widerstände und Massenverteilung gegeben sind, auf graphischem Wege *ziffermäßig* zu ermitteln, *ohne willkürliche Annahme und ohne Vernachlässigung.*

Daß dieses Problem nicht auf rechnerischem, sondern nur auf graphischem Wege zu lösen möglich ist, wird jeder erkennen, der einmal vor die Aufgabe gestellt war, den genauen Bewegungsvorgang eines Getriebes rechnerisch zu verfolgen.

Vorliegende Abhandlung liefert einen Beitrag zur Lösung dieses Problems und dürfte vielleicht Anregung zu weiterem Forschen auf diesem Gebiete geben.

Stellung des Problems.

1. Es soll in den folgenden Untersuchungen ein zwangläufiges ebenes Getriebe allgemeiner Art vorausgesetzt werden. Die Punkte desselben beschreiben ganz bestimmte Bahnen in bezug auf das feststehende Glied; die Verrückung und die Geschwindigkeit eines dieser Punkte z. B. R bestimmen die Verrückungen bezw. die Geschwindigkeiten aller übrigen Punkte; man benötigt also zur Festlegung der Bewegung des Getriebes eine einzige Koordinate; hiefür soll der Bogen s der von R beschriebenen Bahn gewählt werden.

Die Bewegung des Getriebes ist dann durch die Gleichung von Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial s}$$

bestimmt. Hier ist $v = \frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Punktes R, L die Bewegungs-Energie des Getriebes, U dessen Kraftfunktion.[1])

Sind $P_1 P_2 P_3$ usw. die in verschiedenen Punkten A, B, C usw. des Getriebes wirkenden Kräfte oder Widerstände, dp_1, dp_2, dp_3 usw. die elementaren Wege der entsprechenden Angriffspunkte, λ, μ, ν usw. die Winkel zwischen der Kraft und dem elementarem Wege des Angriffspunktes, so ist

$$dU = P_1 dp_1 \cos\lambda + P_2 dp_2 \cos\mu + P_3 dp_3 \cos\nu + \cdots$$

---

1) K. Heun hat in seiner obenangeführten Arbeit die Lagrangesche Gleichung für die Behandlung der Schubkurbel benützt.

Ersetzt man diese Summe von Elementar-Arbeiten durch die gleichgroße Arbeit einer in R wirkenden ideellen Kraft $\mathfrak{P}$, so ist $dU = \mathfrak{P} ds$ und

$$\mathfrak{P} = P_1 \frac{dp_1}{ds} \cos\lambda + P_2 \frac{dp_2}{ds} \cos\mu + P_3 \frac{dp_3}{ds} \cos\nu + \cdots$$

Setzt man

$$P_1 \cos\lambda = P_1', \quad P_2 \cos\mu = P_2', \quad P_3 \cos\nu = P_3', \quad \cdots$$

und nennt $v_1\ v_2\ v_3 \cdots$ die Geschwindigkeiten der Punkte $A\ B\ C \cdots$, so ist

$$\mathfrak{P} = P_1' \frac{v_1}{v} + P_2' \frac{v_2}{v} + P_3' \frac{v_3}{v} + \cdots$$

oder

$$\mathfrak{P} = \sum \left[P_n' \cdot \frac{v_n}{v} \right] \tag{1}$$

eine Kraft, welche die nach dem Punkt R des Getriebes *reduzierte Kraft* genannt wird.

2. Die Bewegungs-Energie des Getriebes ist allgemein

$$L = \frac{1}{2} \int v_n^2 \cdot dm$$

worin dm ein Massenpunkt, v_n seine Geschwindigkeit bedeutet. Ersetzt man sämtliche Massenpunkte des Getriebes durch eine einzige, in R liegende Punktmasse $\mathfrak{M}$ von gleicher Energie, so ist $L = \frac{1}{2} \mathfrak{M} v^2$ und somit

$$\mathfrak{M} = \int \left(\frac{v_n}{v} \right)^2 \cdot dm. \tag{2}$$

Man bezeichnet $\mathfrak{M}$ als die nach R *reduzierte Masse* des Getriebes.

Die Reduktion von Kräften und Massen des Getriebes nach irgend einem Punkt desselben hat also nach dem Grundsatze zu geschehen, daß die Leistungen der Kräfte und die Bewegungs-Energie der Massen durch die Reduktion nicht verändert werden.

Es ist zu bemerken, daß sich sowohl die reduzierte Kraft $\mathfrak{P}$, als die reduzierte Masse $\mathfrak{M}$ des Getriebes als mit s veränderliche Größe darstellt.

Die Gleichung von Lagrange kann jetzt in der Form geschrieben werden.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) - \frac{\partial L}{\partial s} = \mathfrak{P}.$$

oder

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (\mathfrak{M} v^2)}{\partial v} - \frac{\partial (\mathfrak{M} v^2)}{\partial s} = 2 \mathfrak{P}$$

Sie bezieht sich jetzt nicht mehr auf das Getriebe, sondern auf einen Punkt von veränderlicher Masse $\mathfrak{M}$, welcher der Wirkung einer veränderlichen Kraft $\mathfrak{P}$ ausgesetzt ist.

Die Dynamik des ebenen, zwangläufigen Getriebes ist damit zurückgeführt auf die Dynamik eines Punktes mit veränderlicher Masse und kann durch diese dargestellt werden.

Als Reduktionspunkt kann jeder beliebige Punkt des *bewegten* Getriebes gewählt werden; mit der geänderten Wahl dieses Punktes ändert sich naturgemäß auch die reduzierte Kraft und die reduzierte Masse.

Es wird sich jedoch empfehlen, einen Reduktionspunkt zu wählen, dessen Lage besonders ausgezeichnet ist und dessen Bewegung fortschreitet, ohne umzukehren. So empfiehlt es sich, bei Getrieben, bei denen umlaufende Kurbeln vorkommen, die Kurbelwarze als Reduktionspunkt zu wählen.

Die Reduktion der Kräfte.

3. Die Gleichung (1) für die reduzierte Kraft

$$\mathfrak{P} = \sum \left[P'_n \cdot \frac{v_n}{v} \right]$$

läßt erkennen, daß für diese Reduktion das Verhältnis der Geschwindigkeiten des Kraftpunktes v_n und des Reduktionspunktes v bekannt sein muß.

Die Geschwindigkeitsverhältnisse eines Getriebes sind durch die Forschungen auf kinematischem Gebiete vollständig geklärt; sie lassen sich in höchst eleganter und übersichtlicher Weise entweder durch spezielle Konstruktionen oder in allgemeineren Fällen durch die Konfiguration der Drehpole darstellen. Diese letztere Methode, welche von Burmester ausgebildet und in seinem Lehrbuch der Kinematik an zahlreichen Beispielen erläutert wurde, gestattet die $\frac{1}{2}n(n-1)$ relativen Drehpole eines n-gliedrigen Getriebes durch einfaches Ziehen von Geraden zu finden. Sie geht hierbei von dem Satze aus, daß die relativen Drehpole 12, 13, 23 dreier Glieder 1, 2, 3 auf einer Geraden liegen müssen. Diese Methode, die wohl bei den meisten in der Praxis vorkommenden Getrieben ohne weiteres anwendbar ist, soll im folgenden als bekannt vorausgesetzt werden.

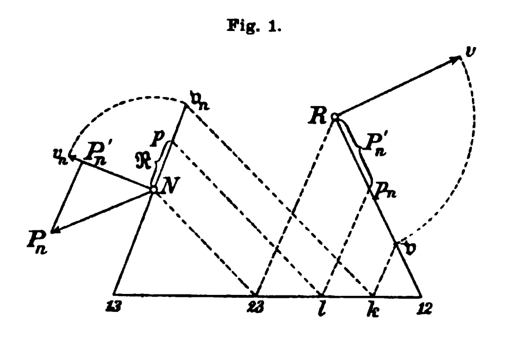


Fig. 1.

Um aus der Lage der relativen Drehpole das Verhältnis der Geschwindigkeiten $\frac{v_n}{v}$ zu finden, soll folgendes einfache Verfahren benutzt werden.

Es sei (Fig. 1) 1 das ruhende Glied des Getriebes, N ein Punkt des Gliedes 3, R ein Punkt des Gliedes 2; die relativen Drehpole der drei Glieder 1, 2, 3 seien 12, 13, 23; die Geschwindigkeit v_n von N ist also senkrecht zu $r_{13} = N$, 13, die Geschwindigkeit v von R ist senkrecht zu $r_{12} = R$, 12.

Bezeichnet man mit w_{12}, w_{13} die Winkelgeschwindigkeiten der Glieder 2 und 3 in bezug auf das ruhende Glied 1, so ist

$$v_n = r_{13} \cdot w_{13}, \quad v = r_{12} \cdot w_{12}.$$

Nun ist aber

$$w_{13} : w_{12} = a_{12} : a_{13}$$

worin

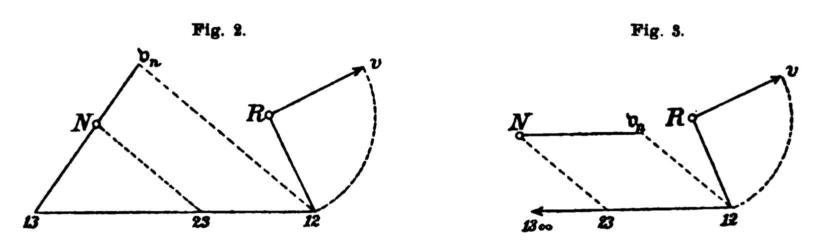
$$a_{12} = 12,\ 23; \quad a_{13} = 13,\ 23$$

bedeuten, also

$$\frac{v_n}{v} = \frac{r_{13}}{r_{12}} \cdot \frac{a_{12}}{a_{13}}.$$

Dreht man demnach v um einen rechten Winkel nach $\mathfrak{v}$, zieht $\mathfrak{v}k \parallel S, 23$, ferner $k\mathfrak{v}_n \parallel 23, N$ und dreht nun $\mathfrak{v}_n$ um einen rechten Winkel (entgegengesetzt mit früher), so erhält man Richtung und Größe der Geschwindigkeit v_n des Punktes N.

4. Diese Konstruktion vereinfacht sich noch, wenn der Geschwindigkeitsmaßstab derart gewählt wird, daß $v = r_{12}$ ist. Dann fallen die Punkte $\mathfrak{v}$ und k nach 12; dann genügt es, $12, \mathfrak{v}_n \parallel 23, N$ zu ziehen. $N\mathfrak{v}_n$ ist bereits die Größe der gesuchten Geschwindigkeit v_n (Fig. 2).



Fällt überdies, wie dies manchmal vorkommt, 13 unendlich fern, so vereinfacht sich die Konstruktion noch weiter, wie dies Fig. 3 zeigt. In diesem Falle ist also die Entfernung der Drehpole 12, 23 bereits die Größe der gesuchten Geschwindigkeit v_n.

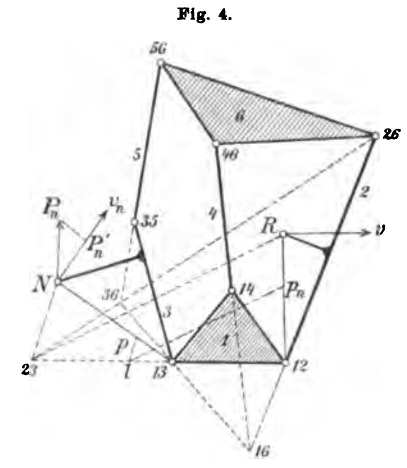
5. Es sei nun N der Angriffspunkt einer Kraft P_n; ihre orthogonale Projektion auf die Bewegungsrichtung von N sei P'_n (Fig. 1). Um diese Kraft nach R zu reduzieren, mache man $Rp_n = P'_n$; ziehe $p_n l \parallel R, 23$, ferner $lp \parallel 23, N$, so ist

$$Np = \mathfrak{P} = P'_n \cdot \frac{v_n}{v}$$

die nach R reduzierte Kraft. Die Richtung, nach welcher $\mathfrak{P}$ in R aufzutragen ist, wird dadurch entschieden, daß die Vorzeichen von $P_n' \cdot v_n$ und $\mathfrak{P}v$ dieselben sein müssen.

6. Fig. 4 zeigt ein sechsgliedriges Getriebe, dessen Glied 1 festgehalten sei. Im Punkte N des Gliedes 3 wirke eine Kraft P, welche nach dem Punkte R des Gliedes 2 reduziert werden soll.

Fig. 4.



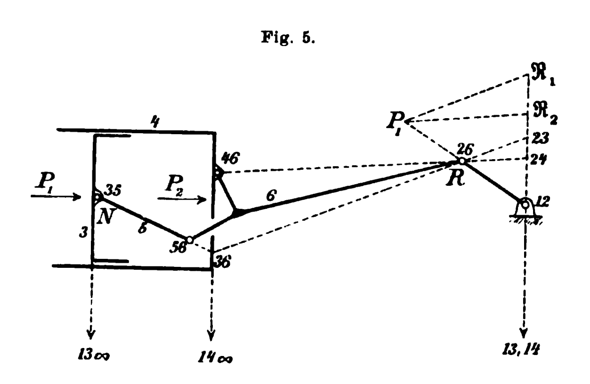
Die Drehpole 12, 13 sind hier gegebene Gelenke.

Um 23 zu finden, bringe man die Geraden 12, 26 und 14, 46 zum Schnitte; dies ist dann der Drehpol 16. Ebenso bringe man die Geraden 35, 56 und 13, 16 zum Schnitte; dies ist der Drehpol 36. Wendet man jetzt die in Fig. 1 mitgeteilte Konstruktion an, um $\mathfrak{P}$ zu finden, so sucht man zunächst die Projektion P_n' von P_n auf $v_n \perp N, 13$, trägt $Rp_n = P_n'$ auf $R, 12$ auf, zieht $p_n l \parallel R, 23$, ferner $lp \parallel 23, N$. Dann ist $Np = \mathfrak{P}$ die gesuchte reduzierte Kraft, die endlich noch in R aufgetragen wurde.

7. Als Anwendung hiervon benützen wir in Fig. 5 die Kolbenmaschine von F. Th. Goodmann (Zeitschr. d. Ver. D. Ing. 1898, S. 162).

Hier bewegen sich zwei Kolben ineinander; der Druck beider wird auf die Kurbelwarze übertragen. Das Schema dieser Maschine ist bereits durch das Getriebe Fig. 4 dargestellt worden, nur liegen die Drehpole 13 und 14 unendlich fern. Um den Kolbendruck P_1 auf

Fig. 5.



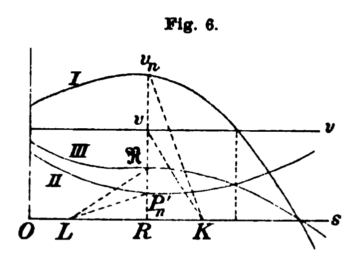
den Kolben N nach der Kurbelwarze R zu reduzieren, hat man nach der früheren Figur nur folgende Linien zu ziehen: 35, 56 bis 36; ferner 36, 26 bis 23. Trägt man den Kolbendruck P_1 auf 12, R von 12 aus auf und zieht $P_1\mathfrak{P}_1 \parallel R, 23$, so erhält man in 12, $\mathfrak{P}_1$ bereits den reduzierten Kolbendruck $\mathfrak{P}_1$. Um den Kolbendruck P_2 nach R

zu reduzieren, genügt das Ziehen der Linie 46, 26 bis 24; unter der Annahme, daß $P_1 = P_2$ ist, ziehe man $P_1 \mathfrak{P}_2 \parallel R, 24$; dann ist $12, \mathfrak{P}_2$ die andere reduzierte Kolbenkraft $\mathfrak{P}_2$.

8. Soll die Kraftreduktion während des ganzen Umlaufes eines Getriebes und für mehrere Triebkräfte und Widerstände desselben durchgeführt werden, so dürfte sich folgender Vorgang empfehlen.

Da es sich bei der Reduktion nur um das *Verhältnis* der Geschwindigkeiten zweier Punkte R und N handelt, nehme man eine willkürliche konstante Geschwindigkeit v des Reduktionspunktes R an, konstruiere für dieselbe die Geschwindigkeit v_n des Punktes N bei beliebig vielen Lagen des Getriebes und zeichne das Diagramm zwischen v_n und dem Wege s des Reduktionspunktes R (Fig. 6, Linie I). In dieses Diagramm trage man die Kraftprojektionen $RP'_n = P'_n$ in dem zu v_n gehörigen Sinne von der s-Linie auf (Linie II) und konstruiere an beliebigen Stellen R

Fig. 6.



$$v_n K \perp LP'_n, \quad L\mathfrak{P} \perp vK,$$

worin L ein beliebig angenommener Punkt der s-Linie ist. Dann ist $R\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$ die reduzierte Kraft von P_n für die Stelle R. Denn aus der Konstruktion folgt

$$LR : RP'_n = v_n R : RK,$$
$$R\mathfrak{P} : LR = RK : vR,$$

woraus

$$R\mathfrak{P} : RP'_n = v_n R : vR$$

und

$$\mathfrak{P} = \frac{v_n}{v} \cdot P'_n.$$

Linie III gibt dann das Diagramm der reduzierten Kraft $\mathfrak{P}$ an. An den Stellen, wo $v_n = v$ ist, dnrchschneiden sich die Linien II und III; wo $v_n = 0$ ist, durchschneiden sich die Linien I und III.

Die Reduktion der Massen.

9. Die Ermittlung der reduzierten Masse des Getriebes hat nach der Gleichung (2)

$$\mathfrak{M} = \int \left(\frac{v_n}{v}\right)^2 \cdot dm$$

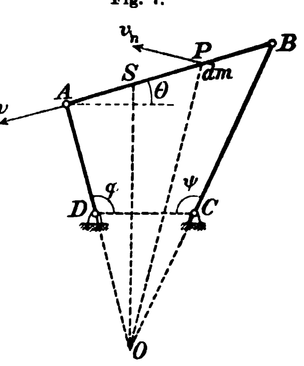
zu erfolgen, wobei dm die Masse eines Massenteilchens, $\frac{v_n}{v}$ deren Geschwindigkeitsverhältnis bezüglich des Reduktionspunktes ist.

Der Begriff der reduzierten Masse eines Körpers ist schon sehr alt; die Mechaniker des 18. Jahrhunderts haben schon mit ihm gearbeitet. So u. a. Abr. Gotth. Kästner in seinen „Anfangsgründen der höheren Mechanik", Göttingen 1765; auch Pasquich in dem „Versuch eines Beytrags zur allgemeinen Theorie von der Bewegung und vorteilhaftesten Einrichtung der Maschinen", Leipzig 1789. Die reduzierte Masse der Maschine wird hier als „gleichgültige" Masse bezeichnet. Allerdings handelt es sich in diesen Arbeiten nur um die Reduktion rotierender, also konstanter Massen.

Der Begriff der veränderlichen reduzierten Masse tauchte erst später auf und wurde selten benützt. In Poncelets „Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen" findet sich zwar keine ausdrückliche Verwendung der veränderlichen reduzierten Masse; doch liegt im ersten Bande (deutsche Ausgabe S. 25) wenigstens eine Andeutung derselben vor.

F. Grashof hat in seiner „Theoretischen Maschinenlehre", 2. Band, S. 354 u. f. die bewegten Massen der Schubkurbel an die Kurbelwarze reduziert und den hierbei entstehenden veränderlichen Wert durch angenäherte Werte, die zum Teil konstant sind, ersetzt.

Fig. 7.



10. Die analytische Ermittlung der reduzierten Masse eines Getriebes führt selbst in einfachen Fällen zu sehr verwickelten Ausdrücken, die das weitere Rechnen ohne Vernachlässigung ganz untunlich machen. Es soll dies nur an einem Beispiele erläutert werden. Fig. 7 stellt ein Doppelkurbelgetriebe dar; M sei die Masse der Koppel AB, Mk^2 das Trägheitsmoment dieser Masse um die durch den Schwerpunkt S gehende, zum Bilde senkrechte Achse. Man soll die Masse M nach A reduzieren.

Ist O der Drehpol der Koppel, v die Geschwindigkeit des Reduktionspunktes A, v_n die Geschwindigkeit eines beliebigen Massenpunktes dm, so ist $v_n = v \cdot \frac{OP}{OA}$; Gleichung (2) geht über in

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{\overline{OA}^2}\int \overline{OP}^2 \cdot dm = M\frac{k^2+s^2}{p^2},$$

worin $OA = p$, $OS = s$ bedeutet.

Drückt man p und s durch die drei Winkel φ, ψ, θ der drei bewegten Glieder gegen das feststehende Glied aus, so wird

$$\mathfrak{M} = M\left[1 - \frac{2a}{l}\frac{\sin(\varphi+\psi)\cdot\cos(\varphi-\theta)}{\sin(\psi+\theta)} + \frac{a^2+k^2}{l^2}\cdot\frac{\sin^2(\varphi+\psi)}{\sin^2(\psi+\theta)}\right],$$

worin $AS = a$, $SB = b$, $AB = l$ gesetzt wurde. Dabei sind die Winkel φ, ψ, θ durch die Gleichungen

$$r \cos\varphi + l \cos\theta + r_1 \cos\psi = d,$$
$$r \sin\varphi + l \sin\theta - r_1 \sin\psi = 0$$

voneinander abhängig; es ist $AD = r$, $BC = r_1$, $DC = d$.

Der Ausdruck für die reduzierte Masse $\mathfrak{M}$ ist also schon in diesem einfachen Falle sehr verwickelt; er läßt sich nicht einmal zweckmäßig als reine Funktion des unabhängig veränderlichen Winkels φ darstellen. Hierin ist wohl der Grund zu suchen, weshalb das Rechnen mit reduzierten Massen so wenig Eingang gefunden hat, mit Ausnahme jener Fälle, in welchen die reduzierte Masse in grober Annäherung als konstant angesehen werden darf.

Diesem Übelstande kann nur durch graphische Massenreduktion abgeholfen werden. Bevor dieselbe jedoch erläutert werden kann, muß gezeigt werden, wie man zweckmäßig die Masse eines eben bewegten Gliedes durch einzelne Massenpunkte ersetzen kann.

Theorie der Ersatzpunkte.

11. Der Ersatz einer Masse durch Punkte gleichen Trägheitsmomentes wurde schon mehrfach untersucht.

Th. Reye hat gezeigt, daß ein *räumliches* Massensystem hinsichtlich seiner Trägheitsmomente durch *vier* Massenpunkte, ein *ebenes* Massensystem durch *drei* Massenpunkte ersetzt werden kann (diese Zeitschrift 1865 und Zeitschr. d. Ver. D. Ing. 1875). In Zusammenhang damit stehen die Arbeiten von Mehmke in ersterer Zeitschrift und in den Math. Annalen v. J. 1884.

Auch in dem bekannten vortrefflichen Werke von Routh, Dynamik der Systeme starrer Körper, I. Band (Deutsche Ausgabe S. 26 u. f.) ist diese Methode, Körper und Flächen hinsichtlich ihrer Trägheitsmomente durch Punkte zu ersetzen, an einer Reihe schöner Anwendungen erläutert.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie eine *ebene*, ungleichförmige Masse hinsichtlich ihrer *polaren* Trägheitsmomente durch Punkte ersetzt werden kann.

12. Es sei M eine beliebige ebene ungleichförmige Masse (oder ein eben bewegter Körper), S deren Schwerpunkt, O der augenblickliche Drehpol (oder die Spur der augenblicklichen Drehachse), dm ein beliebiges Massenteilchen, v_n seine Geschwindigkeit (Fig. 8). Dann ist die nach dem Reduktionspunkt R reduzierte Masse dieses Körpers nach früherem

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{v^2}\int v_n^2 \cdot dm = \frac{w^2}{v^2}\, T_0,$$

wenn w die Winkelgeschwindigkeit dieser Masse um 0 und $T_0 = \int r^2 \cdot dm$ das Trägheitsmoment derselben um 0 ist.

Wir wollen nun die Masse M durch vier materielle Punkte ersetzen, deren gesamtes Trägheitsmoment in bezug auf den Schwerpunkt S dasselbe T_s ist wie für die Masse M selbst. Drei dieser Punkte A, B, C wählen wir beliebig, den vierten im Schwerpunkt S. Dann ist, wenn wir die Massen dieser vier Punkte mit M_1, M_2, M_3, M_0 bezeichnen,

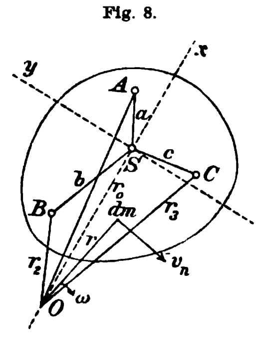


Fig. 8.

$$M_1 a^2 + M_2 b^2 + M_3 c^2 = T_s, \tag{3}$$

worin $AS = a$, $BS = b$, $CS = c$ gesetzt ist.

Überdies setzen wir fest, daß S auch noch jetzt der Schwerpunkt der vier Massenpunkte ist, und daß die Summe dieser vier Massen ebenso groß ist wie die wirkliche Masse M. Dies liefert die Gleichungen

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_0 = M, \tag{4}$$

$$\begin{cases} M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3 = 0, \\ M_1 y_1 + M_2 y_2 + M_3 y_3 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

worin $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ die Koordinaten von A, B, C in bezug auf ein beliebiges durch S gehendes Achsenkreuz sind. Die X-Achse desselben kann also auch, wie in Fig. 8, durch O gelegt werden.

Diese vier Massenpunkte A, B, C, S haben dann in bezug auf O das polare Trägheitsmoment

$$T_0 = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + M_3 r_3^2 + M_0 r_0^2. \tag{6}$$

Nun ist

$$r_1^2 = r_0^2 + a^2 - 2 r_0 x_1,$$
$$r_2^2 = r_0^2 + b^2 - 2 r_0 x_2,$$
$$r_3^2 = r_0^2 + c^2 - 2 r_0 x_3,$$

somit

$$T_0 = (M_1 + M_2 + M_3 + M_0) \cdot r_0^2 + M_1 a^2 + M_2 b^2 + M_3 c^2$$
$$- 2 r_0 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3),$$

also mit Benützung der Gleichungen (3), (4), (5)

$$T_0 = M r_0^2 + T_s,$$

d. h. die vier Massenpunkte A, B, C, S haben in bezug auf einen beliebigen Punkt O ihrer Ebene dasselbe Trägheitsmoment wie die Masse M selbst. Sie ersetzen also letztere hinsichtlich der polaren Trägheitsmomente T vollständig.

Für die Massen dieser Ersatzpunkte liefert die Auflösung der Gleichungen (3) und (5)

$$M_1 = M \cdot \frac{k^2 \sin \alpha_1}{la} = \frac{2\,T_s f_1}{abcl},$$

$$M_2 = M \cdot \frac{k^2 \sin \alpha_2}{lb} = \frac{2\,T_s f_2}{abcl},$$

$$M_3 = M \cdot \frac{k^2 \sin \alpha_3}{lc} = \frac{2\,T_s f_3}{abcl}.$$

Fig. 9.

Hierin ist $T_s = Mk^2$ und

$$l = a \sin \alpha_1 + b \sin \alpha_2 + c \sin \alpha_3;$$

die Winkel α_1, α_2, α_3 sowie die Dreiecksflächen f_1, f_2, f_3 sind aus Fig. 9 ersichtlich.

Es ist also

$$M_1 : M_2 : M_3 = f_1 : f_2 : f_3,$$

wobei die Wahl der Punkte A, B, C beliebig war.

Die Restmasse des Schwerpunktes S ist dann nach (4)

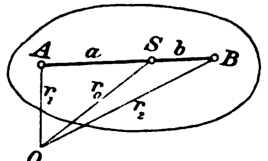
$$M_0 = M - (M_1 + M_2 + M_3).$$

Handelt es sich darum, die Masse eines bewegten Maschinenteiles, also eines Gliedes, durch Punkte zu ersetzen, so wird man zweckmäßig als Punkte A, B, C die Verbindungsstellen mit den benachbarten Gliedern wählen.

13. Der Ersatz einer eben bewegten Masse durch *vier* Massenpunkte wird sich empfehlen, wenn die Masse an *mehr als zwei* Stellen mit benachbarten Gliedern verbunden ist und wenn sie überdies nicht rotiert. In letzterem Falle wird man einen einzigen Ersatzpunkt zu wählen haben.

Bei der Wahl der Ersatzpunkte kann man sich auch mit drei Punkten: A, B und S begnügen, nur müssen sie in derselben Geraden liegen (Fig. 10). Hier gehen die Gleichungen (3) (4) (5) über in:

Fig. 10.



$$(3') \qquad M_1 a^2 + M_2 b^2 = T_s$$

$$(4') \qquad M_1 + M_2 + M_0 = M$$

$$(5') \qquad M_1 a - M_2 b = 0$$

Für einen beliebigen Punkt O ist dann das Trägheitsmoment der drei Ersatzpunkte

$$T_0 = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + M_0 r_0^2.$$

Beachtet man, daß

$$r_1^2 = r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos \varphi, \quad r_2^2 = r_0^2 + b^2 + 2br_0 \cos \varphi,$$

so wird

$$T_0 = (M_1 + M_2 + M_0)\, r_0^2 + M_1 a^2 + M_2 b^2 - 2 r_0 \cos\varphi\, (M_1 a - M_2 b),$$

also mit Benützung der Gleichungen 3′, 4′, 5′:

$$T_0 = M r_0^2 + T_s,$$

d. h. die drei Ersatzpunkte A, B, S haben in bezug auf jeden Punkt O ihrer Ebene das gleiche polare Trägheitsmoment, wie die Masse M selbst.

Die drei Ersatzmassen ergeben sich aus 3′, 4′, 5′ mit

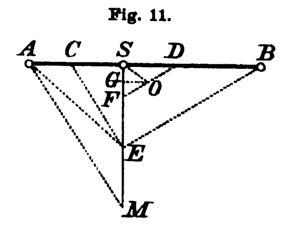
$$(7) \qquad M_1 = \frac{T_s}{al}, \quad M_2 = \frac{T_s}{bl}, \quad M_0 = M - \frac{T_s}{ab}$$

worin $l = a + b$ ist.

Diese Art, die Masse M eines eben bewegten Gliedes durch *drei* Punktmassen zu ersetzen, wird sich bei Gliedern empfehlen, die nur an zwei Stellen mit Nachbargliedern zusammenhängen, also bei der weitaus größten Zahl der im Getriebe vorkommenden Glieder. So wird man z. B. die Masse des Lenkers in einem Schubkurbelgetriebe durch drei Punkte zu ersetzen haben, von denen der Schwerpunkt des Lenkers der eine, die Endpunkte des Lenkers die beiden anderen sind.

14. Die Verteilung der Masse M in die drei Ersatzmassen M_1, M_2, M_0, wie sie sich in den Gleichungen (7) darstellen, kann konstruktiv in folgender Weise durchgeführt werden. Es sei S der Schwerpunkt der eben bewegten Masse M (Fig. 11), A und B die gewählten Ersatzpunkte, $CS = SD = \mathfrak{R}$ der Trägheitsradius der Masse M in bezug auf den Schwerpunkt. Man trage die Masse nach beliebig gewähltem Maßstab von S nach M auf, senkrecht zu AB, ziehe $CE \parallel AM$, $DF \parallel BE$, so ist $FM = M_0$ die in S zu belassende Masse des Gliedes; ferner ziehe man $SO \parallel AE$ und $OG \parallel BA$, so ist $SG = M_1$ und $GF = M_2$ die nach A bezw. B zu verteilende Masse.

Fig. 11.



15. Für einen prismatischen Stab, dessen Schwerpunkt in der Mitte liegt, ist $T_s = \frac{1}{12} M l^2$. Wählt man die Ersatzpunkte A und B in den Enden des Stabes, so wird $a = b = \frac{l}{2}$ und somit

$$M_1 = M_2 = \frac{M}{6}, \quad M_0 = \tfrac{2}{3} M.$$

In dem einfachsten Falle, wenn die Masse M eine dauernde Drehung um einen festliegenden Punkt O macht, genügt es, einen einzigen Ersatz-

punkt zu wählen. Ist dessen Entfernung vom Drehpole r und T das polare Trägheitsmoment der Masse um O, so ist die Ersatzmasse $\frac{T}{r^2}$.

16. Ersetzt man allgemein die Masse eines Gliedes durch vier Massenpunkte, so ist nach Gleichung (6)

$$T_0 = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + M_3 r_3^2 + M_0 r_0^2,$$

also die nach dem Reduktionspunkt reduzierte Masse

$$\mathfrak{m} = \frac{\omega^2}{v^2} T = M_1 \left(\frac{v_1}{v}\right)^2 + M_2 \left(\frac{v_2}{v}\right)^2 + M_3 \left(\frac{v_3}{v}\right)^2 + M_0 \left(\frac{v_0}{v}\right)^2,$$

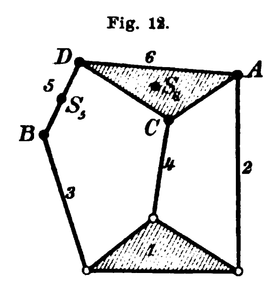
worin v_1, v_2, v_3, v_0 die Geschwindigkeiten der vier Ersatzpunkte A, B, C, S sind.

Führt man diesen Ersatz für alle Glieder eines Getriebes durch, so kann schließlich die reduzierte Masse des Getriebes

$$\mathfrak{M} = \Sigma \mathfrak{m} = \Sigma \left[M_n \cdot \left(\frac{v_n}{v}\right)^2 \right]$$

gesetzt werden. Dadurch, daß man die Masse eines Gliedes an ihre Verbindungsstellen mit den Nachbargliedern verteilt, vereinfacht sich die weitere Untersuchung, weil an solchen Verbindungsstellen die Ersatzmassen der beiden Nachbarglieder zusammenfallen, also zusammen als die Masse eines einzigen Punktes angesehen werden können.

Fig. 12.



Es soll z. B. die Masse des sechsgliedrigen Getriebes (Fig. 12), von dem das Glied 1 festliegt, durch Punktmassen ersetzt werden. Die Massen der Glieder 2, 3, 4 können, da sie dauernde Rotationen machen, durch Massenpunkte M_2', M_3, M_4 in A, B, C ersetzt werden. Das Glied 5 durch drei Massenpunkte M_5' in B, M_5'' in D und M_5^0 im Schwerpunkte S_5 von 5. Das Glied 6 kann zweckmäßig durch vier Massenpunkte ersetzt werden, nämlich M_6' in A, M_6'' in C, M_6''' in D und M_6^0 im Schwerpunkte S_6 von 6. Die Masse des ganzen Getriebes ist also durch folgende sechs Massen zu ersetzen: $M_2 + M_6'$ in A, $M_3 + M_5'$ in B, $M_4 + M_6''$ in C, $M_5'' + M_6'''$ in D, M_5^0 in S_5 und M_6^0 in S_6.

17. Ist n die Anzahl der bewegten Glieder eines aus Gelenken und Prismenführungen zusammengesetzten Getriebes und g die Anzahl jener Gelenke, deren sämtliche Glieder weder Rotationen noch Translationen ausführen, so ist im allgemeinen die kleinste Anzahl z der Massenpunkte, durch welche die Masse des Getriebes ersetzt werden kann:

$$z = n + g \tag{8}$$

Bei den meisten Getrieben besitzt jedes Gelenk ein Glied, das eine Rotation oder eine Translation ausführt; dann ist $g = 0$ und somit

$$z = n.$$

Werden also alle Gelenke eines Getriebes durch rotierende oder fortschreitende Glieder geführt, so kann die bewegte Masse des Getriebes durch ebensoviele Massenpunkte ersetzt werden, als das Getriebe bewegte Glieder besitzt.

Bei den verschiedenen Arten von Schubkurbeln und Kurbelvierecken trifft diese Voraussetzung zu; dort ist also $z = 3$ zu setzen.

Ebenso ist bei dem in Fig. 20 dargestellten Getriebe der Regnier-Maschine $z = 9$, d. h. ebenso groß wie die Anzahl der bewegten Glieder.

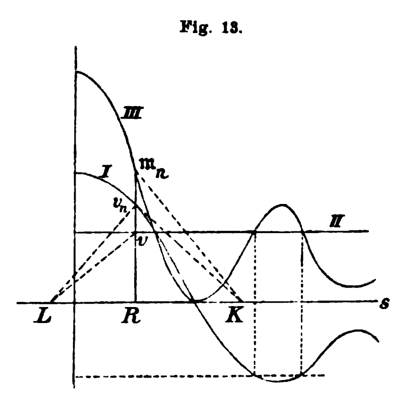
Bei dem Wurfgetriebe von Marcus (Fig. 23) hingegen ist $z = 8$, somit größer als die Anzahl der bewegten Glieder.

18. Sind die z Ersatzpunkte des Getriebes und ihre Massen festgesetzt, so hat nun die Reduktion derselben nach dem Reduktionspunkte R zu erfolgen und zwar nach der Gleichung

$$\mathfrak{M} = \Sigma\left[M_n \cdot \left(\frac{v_n}{v}\right)^2\right].$$

Hierfür empfiehlt sich folgender Vorgang. In Absatz 3 wurde gezeigt, wie für eine willkürlich angenommene Geschwindigkeit v des Reduktionspunktes die Geschwindigkeit v_n eines anderen Punktes des Getriebes und somit das Diagramm dieser Geschwindigkeit v_n, bezogen auf den Weg s des Reduktionspunktes, zu konstruieren ist.

Fig. 13.



Soll z. B. ein beliebiges Glied der oben angedeuteten Summe, etwa $\mathfrak{m}_n = M_n \cdot \frac{v_n^2}{v^2}$, konstruiert werden, so wähle man im Geschwindigkeitsdiagramm die willkürliche Geschwindigkeit v derart, daß sie durch die gleiche Länge wie M_n dargestellt wird und entwerfe mit diesem Werte von v die Geschwindigkeitslinie v_n (Fig. 13, Linie I). Dann ist also

$$\mathfrak{m}_n = \frac{v_n^2}{v}.$$

Zieht man nun an einer beliebigen Stelle R die Geraden $v_n K \perp L v_n$, wobei K oder L beliebig angenommen werden kann, ferner $K\mathfrak{m}_n \perp Lv$,

dann ist $R\mathfrak{m}_n$ die reduzierte Masse $\mathfrak{m}_n$. Denn die Konstruktion lehrt, daß

$$LR : Rv_n = Rv_n : RK$$

$$Rv : LR = RK : R\mathfrak{m}_n$$

woraus $$Rv : Rv_n = Rv_n : R\mathfrak{m}_n \text{ und } \mathfrak{m}_n = \frac{v_n^2}{v} \text{ folgt.}$$

So wurde in Fig. 13 aus der Geschwindigkeitslinie v_n und der Linie $v = M_n$ (Linie II) die Linie der reduzierten Masse $\mathfrak{m}_n$ (Linie III) entwickelt.

19. Dieses Diagramm der reduzierten Masse eines bewegten Massenpunktes hat einige bemerkenswerte Eigenschaften.

Aus der Gleichung

$$\mathfrak{m}_n = M_n \cdot \left(\frac{v_n}{v}\right)^2$$

folgt, daß die reduzierten Massen nur positiv sein können; die Linie III bleibt also stets auf derselben Seite der s-Linie. Für $v_n = \pm v$ ist $\mathfrak{m}_n = M_n$.

Ferner ist

$$d\mathfrak{m}_n = \frac{2M_n}{v^2} \cdot v_n \cdot dv_n$$

und

$$d^2\mathfrak{m}_n = \frac{2M_n}{v^2}\left(\overline{dv_n}^2 + v_n \cdot d^2v_n\right)$$

d. h. für $v_n = 0$ wird auch $\mathfrak{m}_n = 0$ und überdies $d\mathfrak{m}_n = 0$, $d^2\mathfrak{m}_n = \frac{2M_n}{v^2} \cdot \overline{dv_n}^2 > 0$. An den Nullstellen des Geschwindigkeitsdiagramms berührt die Linie der reduzierten Massen die s-Linie, und $\mathfrak{m}_n$ ist hierbei ein Minimum. (Fig. 13.)

Für $v_n = \max.$ oder min. wird

$$dv_n = 0, \quad d\mathfrak{m}_n = 0, \quad d^2\mathfrak{m}_n = \frac{2M_n}{v^2} \cdot v_n \cdot d^2v_n,$$

d. h. wenn $v_n > 0$, wird $\mathfrak{m}_n$ gleichzeitig mit v_n ein max. oder min.

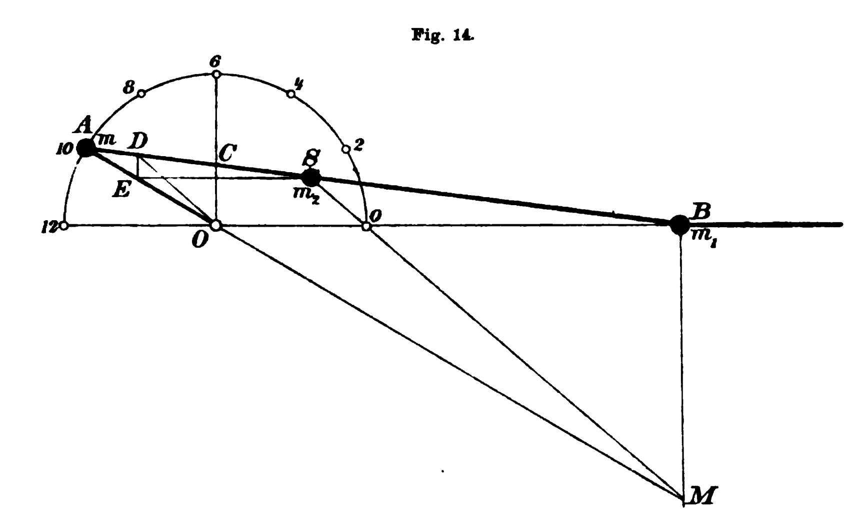
Anwendung auf Getriebe.

20. Im folgenden sollen einige Getriebe auf ihre Massenreduktion untersucht werden. Um den Einfluß der verschiedenen zu reduzierenden Massen besser überblicken zu können, sind durchwegs gleichgroße Massen in den Ersatzpunkten angenommen worden, welche gleich der Masseneinheit angesehen werden können.

Das Schubkurbelgetriebe. (Fig. 14.) Die Massen der drei bewegten Glieder desselben können durch drei Punktmassen m, m_1, m_2 in A, B und S, dem Schwerpunkt der Lenkerstange, ersetzt werden. Die Art,

wie man diese Massen findet, wenn die wirklichen Massen bekannt sind, wurde in Absatz **13** und **14** besprochen. Hier soll jedoch, wie oben bemerkt, des besseren Überblickes halber angenommen werden, daß in A, B und S gleichgroße Punktmassen lagern.

Fig. 14.



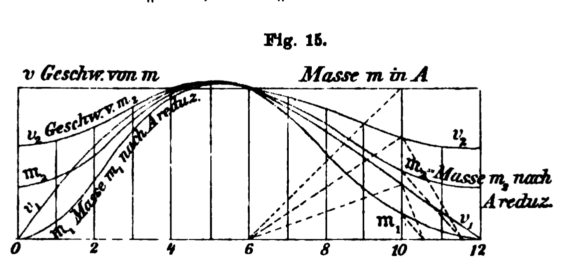
Die Geschwindigkeit von A, dem Reduktionspunkt, werde beliebig angenommen und durch $OA = r$ gemessen.

Die Geschwindigkeit v_1 von B ist dann gleich $OC \perp OB$, der Größe nach.

Um die Geschwindigkeit v_2 von S zu konstruieren, suche man den Drehpol M von AB und ziehe $OD \parallel MS$. Dann ist $OD = v_2$. Statt M zu zeichnen, kann man auch $SE \parallel BO$, $ED \parallel OC$ ziehen.

Nach diesem Vorgange wurden für mehrere Stellungen des Getriebes während einer halben Umdrehung der Kurbel die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 konstruiert und in ein Diagramm als Ordinaten eingetragen, in dem die Wege des Reduktionspunktes A die Abszissen sind. (Fig. 15.) Sodann wurden die reduzierten Massen $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ von m_1 und m_2 nach dem im Absatze **18** geschilderten Vorgange konstruiert, wobei $v = r = m$ als Maß der Masseneinheit angenommen wurde. Die Linien $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ geben die Massen von m_1 in B und m_2 in S, nach A reduziert, an.

Fig. 15.



Das Doppelkurbelgetriebe. (Fig. 16 und 17). Die bewegte Masse desselben kann ebenfalls durch drei Massenpunkte in A, B und dem Schwerpunkt S der Koppel AB ersetzt werden. Auch hier soll des besseren Überblickes halber angenommen werden, daß in diesen drei Ersatzpunkten *gleiche* Massen lagern. Die Geschwindigkeit des Reduktionspunktes A sei durch die Länge AO der einen Kurbel dargestellt.

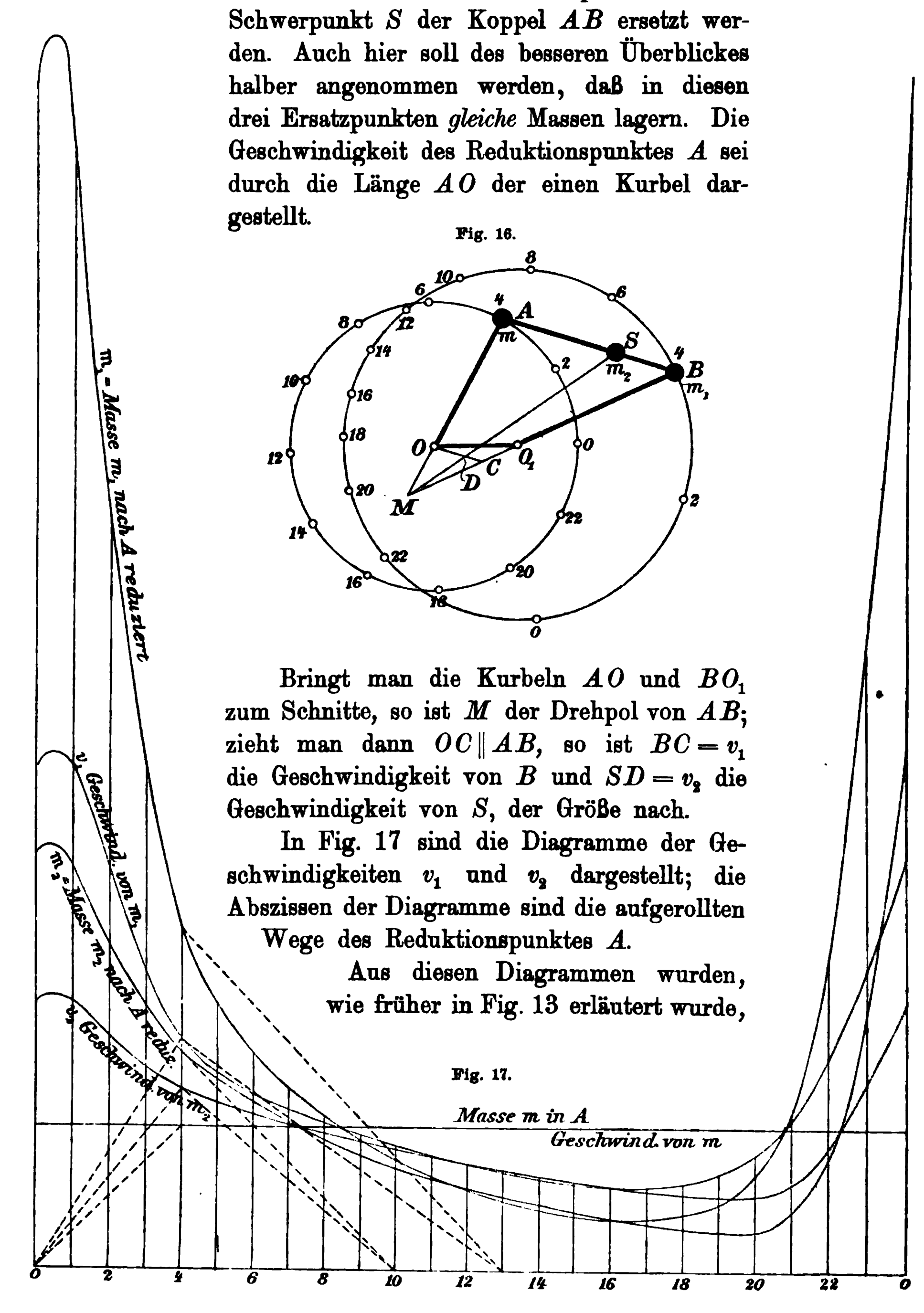


Fig. 16.

Bringt man die Kurbeln AO und BO_1 zum Schnitte, so ist M der Drehpol von AB; zieht man dann $OC \parallel AB$, so ist $BC = v_1$ die Geschwindigkeit von B und $SD = v_2$ die Geschwindigkeit von S, der Größe nach.

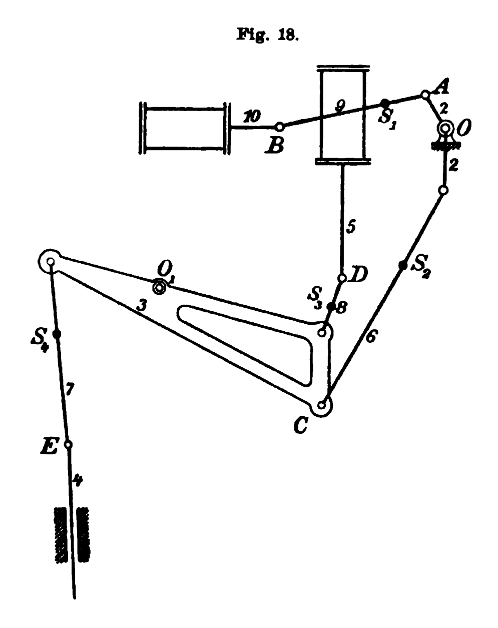
In Fig. 17 sind die Diagramme der Geschwindigkeiten v_1 und v_2 dargestellt; die Abszissen der Diagramme sind die aufgerollten Wege des Reduktionspunktes A.

Aus diesen Diagrammen wurden, wie früher in Fig. 13 erläutert wurde,

Fig. 17.

die nach A reduzierten Massen $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ konstruiert und in Diagrammen dargestellt. Ihr Verlauf lehrt den außerordentlich veränderlichen Einfluß der Massen von m_2 und insbesondere von m_1.

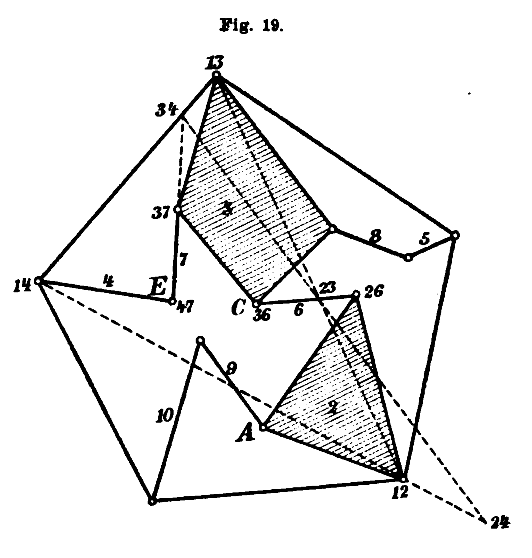
Fig. 18.



Das Getriebe der Regnierschen Compound-Wasserhaltungsmaschine (mitgeteilt von R. Dörfel, Techn. Blätter 1885).

Diese Maschine (Fig. 18) besteht aus einem liegend angeordneten Hochdruckzylinder und einem stehenden Niederdruckzylinder; ersterer arbeitet an einer Kurbel AO der Schwungradwelle O, während letzterer mit einem kurzen Lenker 8 direkt an dem um O_1 drehbaren Balancier angreift. Mit der Schwungradwelle O steht der Balancier durch eine Hilfskurbel und die Stange 6 in Verbindung. Das entgegengesetzte Ende des Balanciers wird mittelst eines Lenkers 7 mit dem Pumpengestänge 4 in Verbindung gesetzt.

Fig. 19.



Das Getriebe besitzt 10 Glieder, welche in der Zeichnung mit fortlaufenden Ziffern bezeichnet sind. Nicht bezeichnet erscheint das Glied 1, nämlich das festliegende Fundament der Maschine.

Sämtliche Gelenke des Getriebes werden durch rotierende oder fortschreitende Glieder geführt; die bewegte Masse kann also nach Absatz **17** durch soviel Massenpunkte ersetzt werden, als bewegte Glieder vorhanden sind, also neun.

Die neun Punkte, in denen die bewegte Masse des Getriebes ge-

sammelt werden kann, sind die Gelenke A, B, C, D, E und die Schwerpunkte $S_1 S_2 S_3 S_4$.

Die Massenreduktion soll jedoch nur für zwei dieser Punkte, nämlich C und E, gezeigt werden; in jedem dieser Punkte möge, des Vergleiches halber, die Masseneinheit gedacht werden, u. zw. m_1 in C und m_2 in E.

Fig. 20.

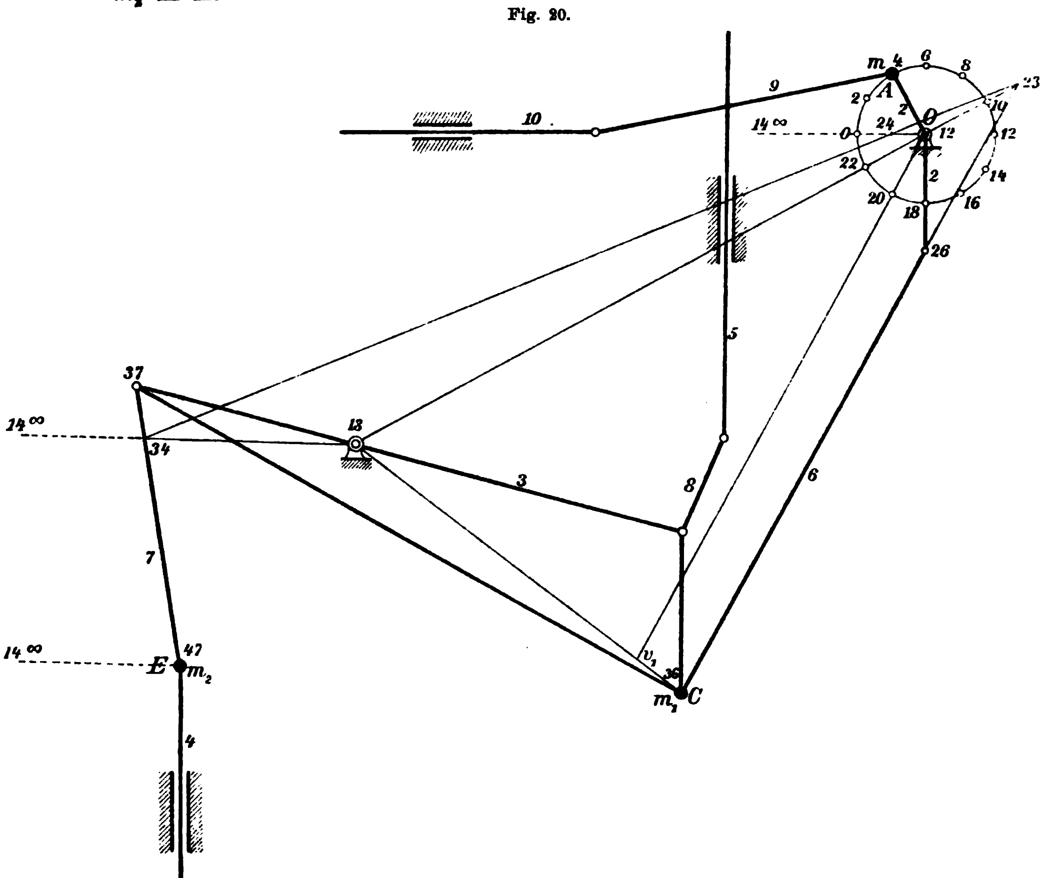


Fig. 19 zeigt das Schema des Getriebes. Das umschließende (als starr zu denkende) Fünfeck bedeutet das festliegende Fundament 1. Das Glied 2 ist die Kurbel samt Hilfskurbel, das Glied 3 der Balancier.

Um die Masse m_1 von C nach A zu reduzieren, muß für A eine beliebige Geschwindigkeit v angenommen und hierzu die entsprechende Geschwindigkeit v_1 von C konstruiert werden. Hierzu bedarf man des relativen Drehpoles 23 der Glieder 2 und 3. Dieser Punkt liegt aber im Schnitte der Verbindungsgeraden 26, 36 und 12, 13 (Fig. 20 und 19).

Um die Geschwindigkeit des Punktes C zu finden, benütze man die in Abschnitt 2 angegebene Konstruktion. Man verbindet 23 mit C und zieht hierzu durch 12 die Parallele; diese schneidet auf C, 13 die Geschwindigkeit v_1, von C aus gemessen, ab. Hierbei ist die Geschwindigkeit von A durch die Kurbellänge AO dargestellt.

Diese Konstruktion von v_1 wurde für 24 Stellungen des Getriebes durchgeführt und das Diagramm Fig. 21 der Geschwindigkeiten v_1 gebildet. Die Ziffern am Kurbelkreise deuten die betreffenden Stellungen der Kurbel an und dürfen nicht mit den gleichbezeichneten Drehpolen verwechselt werden.

Fig. 21.

Aus dem Diagramm von v_1 wurde das Diagramm der nach A reduzierten Masse m_1 nach den Angaben des Absatzes 18 ermittelt; für die Stellen 4 und 10 ist die Konstruktion eingetragen worden.

Um die Masse m_2 von E nach A zu reduzieren, bedarf man der Geschwindigkeit des Punktes E und hierzu des Drehpoles 24 der Glieder 2 und 4 (Fig. 19). Hierzu sucht man den Schnitt 34 der Verbindungsgeraden 13, 14 und 37, 47; sodann ziehe man die Linien 34, 23 und 14, 12, ihr Schnitt ist bereits der gesuchte Drehpol 24.

Im Regnierschen Getriebe (Fig. 20) liegt 14 im Unendlichen; man ziehe hier durch 12 und 13 zwei Gerade senkrecht zur Stange 4, bringe letztere Gerade 13, 14^∞ zum Schnitte mit der Stange 7 und verbinde diesen Schnittpunkt 34 mit 23; dann liegt 24 im Schnitte dieser Geraden mit 12, 14^∞.

Fig. 22.

In Übereinstimmung mit Fig. 3 ist das Stück 12, 24 bereits die Geschwindigkeit von E, wenn die Geschwindigkeit des Punktes A wieder durch die Kurbellänge AO angegeben wird.

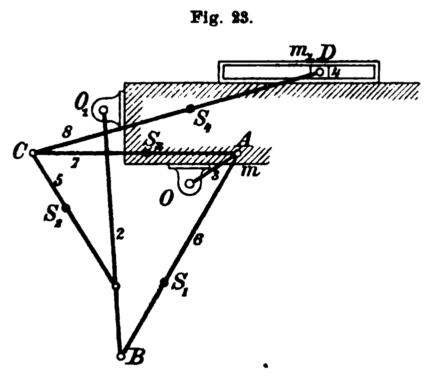
Auf diese Weise wurde für 24 Stellungen des Getriebes das Diagramm der Geschwindigkeit v_2 in Fig. 22 konstruiert und hieraus in gleicher Weise wie früher das Diagramm der nach A reduzierten Masse m_2 entwickelt.

Da die Massen m_1 und m_2 gleich der Masseneinheit gewählt wurden, lehrt ein Blick auf die beiden Diagramme der reduzierten Massen den wesentlich verschiedenen Einfluß der Lage dieser beiden Masseneinheiten auf die Bewegung des Punktes A.

Das Wurfgetriebe von Marcus.

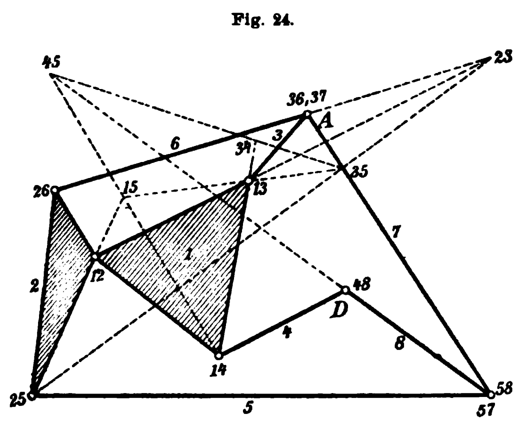
In dem Aufsatze „Propeller-Rinnen und Wurfgetriebe" (Zeitschr. d. V. D. Ing. 1902, S 1813) teilte Herm. Marcus mehrere Getriebe mit, welche dazu dienen, um von einer nahezu gleichförmig umlaufenden Kurbel eine geradlinig hin- und hergehende Bewegung abzuleiten, deren Geschwindigkeit nahezu gleichförmig zunimmt, um dann sehr rasch bis auf Null abzunehmen. Diese Getriebe sollen dazu dienen, die schüttelnde Bewegung von langen Rinnen hervorzurufen, in denen Fördergut vorwärts gleitet.

Fig. 23.



Von diesen Getrieben ist in Fig. 23 eines mitgeteilt. Es besitzt acht Glieder; das nicht bezeichnete Glied 1 ist das festliegende Fundament. Die Drehung der Kurbel OA wird auf die Schwinge O_1B und von beiden durch die Stangen 7, 5 und 8 auf den hin- und hergehenden Schieber D übertragen.

Fig. 24.



Sämtliche Gelenke des Getriebes bis auf C werden in Kreisen oder Geraden geführt. Die bewegte Masse des Getriebes kann also nach Absatz 17 durch sieben (Anzahl der bewegten Glieder) mehr eins (Gelenk C), d. s. also acht Massenpunkte ersetzt werden. Dies sind die Gelenke A, B, C, D und die Stangenschwerpunkte S_1, S_2, S_3, S_4.

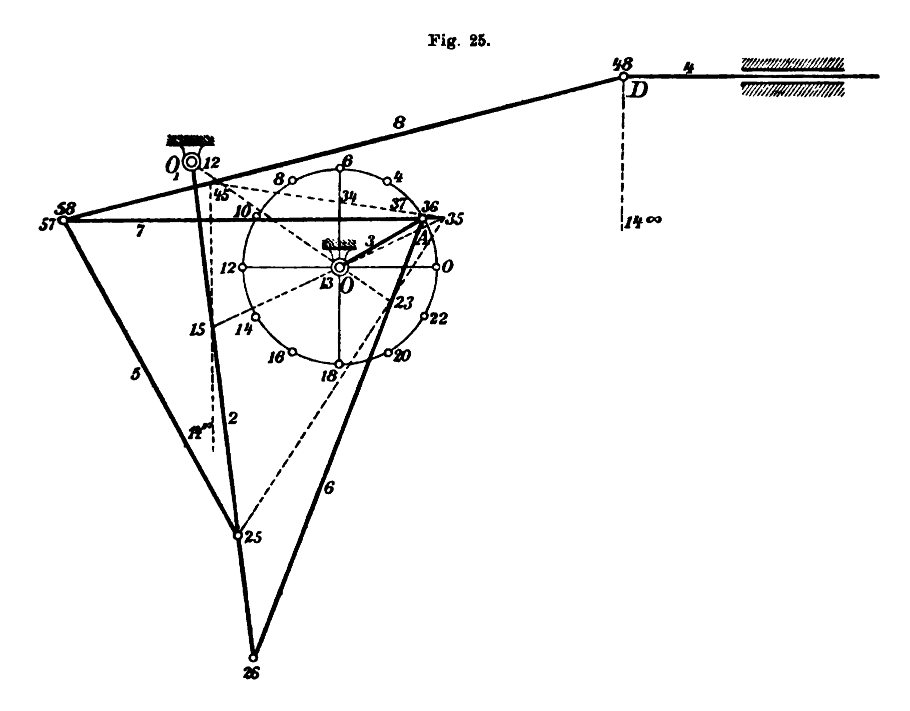
Die Massenreduktion soll nur für eine Masse m_1 durchgeführt werden, die in D gesammelt ist. Eine gleichgroße Masse m (Masseneinheit) sei im Reduktionspunkt A angenommen, für welchen wieder die Kurbelwarze gewählt wurde.

In Fig. 24 wurde des besseren Überblickes halber das Schema des

Getriebes gezeichnet; das dreieckige Mittelglied 1 stellt das festgehaltene Fundament vor. Um die Masse m_1 von D nach A zu reduzieren, bedarf man der Geschwindigkeit von D für eine beliebig angenommene Geschwindigkeit von A.

Um den Drehpol 34 des Gliedes 4 (mit dem Punkte D) in bezug auf das Glied 3 (mit dem Punkte A) zu finden, ist folgende lineare Konstruktion durchzuführen. Der Schnitt der Verbindungsgeraden 12, 13 und 26, 36 liefert 23; die Verbindungsgeraden 37, 57 und 23, 25

Fig. 25.



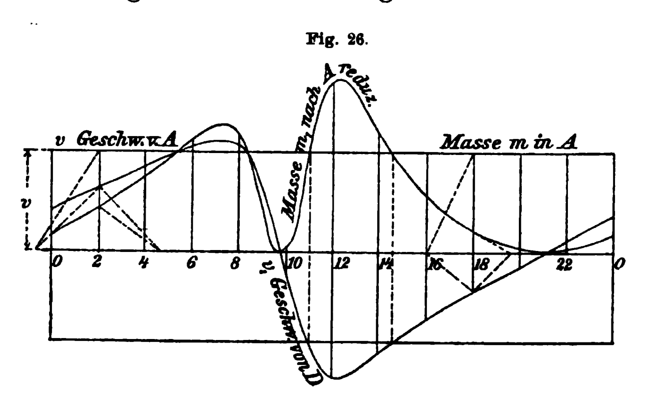
schneiden sich in 35; die Geraden 12, 25 und 13, 35 liefern den Drehpol 15; die Geraden 48, 58 und 14, 15 geben 45; endlich liegt der gesuchte Drehpol im Schnitte von 13, 14 und 35, 45.

In Fig. 25 wurde das Getriebe in größerem Maßstab gezeichnet und die Kurbel OA in 24 verschiedenen Stellungen angenommen. Für die Stellung 2 findet man die eben mitgeteilte Konstruktion durchgeführt. Hierbei ist zu beachten, daß der Drehpol 14 unendlich fern liegt. Die Konstruktion ist übersichtlich, besteht in dem Ziehen von fünf geraden Linien und bedarf keines Zirkels.

Stellt man die Geschwindigkeit der Kurbelwarze A durch die Länge AO der Kurbel dar, so ist das Stück O, 34 bereits die gesuchte Geschwindigkeit D (vergleiche Absatz 4, Fig. 3).

Marcus führt die Konstruktion der Geschwindigkeit von D in seiner oben angeführten Abhandlung mit Hilfe lotrechter Geschwindigkeiten durch. In manchen Fällen wird die eine Konstruktion die andere zu ersetzen geeignet sein. Die für 24 Stellungen der Kurbel gefundenen Geschwindigkeiten von D wurden in ein Geschwindigkeitsdiagramm (Fig. 26) eingetragen, wobei wieder der aufgerollte Weg des Reduktionspunktes A als Abszissen-Achse gewählt wurde.

Fig. 26.



Die Konstruktion des Diagramms der reduzierten Masse wurde in derselben Weise durchgeführt, wie bisher (vergl. Absatz **18**); für zwei Kurbelstellungen (2 und 18) wurde die Konstruktion angedeutet.

Dynamik des Punktes mit veränderlicher Masse.

21. In Absatz 2 wurde gezeigt, daß die Bewegung eines zwangläufigen, ebenen Getriebes auf diejenige eines Punktes mit veränderlicher Masse zurückgeführt werden kann.

Die Behandlung der Bewegung eines Punktes mit veränderlicher Masse taucht zwar in der Literatur selten auf, ist jedoch schon wiederholt benützt worden, um gewisse Bewegungsvorgänge zu erklären. Ich verweise u. a. auf:

J. Meschtschersky, Dynamik des Punktes mit veränderlicher Masse 1897 (russisch);

Piarron de Mondésir, Sur la force, le principe d'Alembert, etc. in: Mémoires et Compte Rendu des traveaux de la société des Ingénieurs civils, 1887;

Routh, Dynamik der Systeme starrer Körper I. Bd. (Deutsche Ausgabe S. 273).

In allen hier behandelten Fällen handelt es sich jedoch um Punkte oder Körper, deren Masse sich durch Hinzutreten neuer Masse oder Wegspringen einzelner Teilchen tatsächlich verändert. So z. B. wenn eine Kette, die auf ruhender Unterlage aufgehäuft liegt, mit einem Ende über eine Rolle geführt wird und beim Herabsinken dieses Endes

die noch ruhenden Kettenglieder stetig in die Bewegung einbezogen werden. Oder wenn von einer aufsteigenden Rakete einzelne Teilchen während des Fluges sich abtrennen.

Im vorliegenden Falle liegt die Sache jedoch wesentlich anders. Die in dem Reduktionspunkte aufgehäufte veränderliche Masse ist nur gedacht; sie vermehrt oder vermindert die bewegte Masse nicht tatsächlich, sondern nur hinsichtlich ihrer Wirkung auf die Bewegung.

Die Bewegung einer derart veränderlichen Punktmasse darf deshalb nicht in der gebräuchlichen Weise behandelt werden; sie unterliegt besonderen Gesetzen, welche hier besprochen werden sollen.

22. Die Bewegungsgleichung des Punktes mit veränderlicher Masse, welcher das Getriebe ersetzt, lautet nach Absatz 2

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\mathfrak{M}v^2)}{\partial v} - \frac{\partial(\mathfrak{M}v^2)}{\partial s} = 2\mathfrak{P}$$

worin v die Geschwindigkeit des Punktes, $\mathfrak{P}$ die an ihm wirkende (reduzierte) Kraft, $\mathfrak{M}$ seine veränderliche (reduzierte) Masse bedeuten. Hierbei ist $\mathfrak{M}$ eine Funktion von s allein, da es nur abhängt von der Lage des Getriebes. Bildet man

$$\frac{\partial(\mathfrak{M}v^2)}{\partial v} = 2\mathfrak{M}v,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\mathfrak{M}v^2)}{\partial v} = 2\frac{d\mathfrak{M}}{dt}v + 2\mathfrak{M}\cdot\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{\partial(\mathfrak{M}v^2)}{\partial s} = v^2\cdot\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial s},$$

so geht die Bewegungsgleichung über in

$$\mathfrak{M}\cdot\frac{dv}{dt} + \tfrac{1}{2}v^2\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial s} = \mathfrak{P}. \tag{9}$$

Nun ist die Beschleunigung des Punktes $\gamma = \frac{dv}{dt}$ und die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$, somit wird das Beschleunigungsgesetz eines veränderlichen Massenpunktes

$$\gamma = \frac{\mathfrak{P} - \frac{1}{2}v^2\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial s}}{\mathfrak{M}}. \tag{10}$$

Multipliziert man Gleichung (9) mit ds, so geht sie über in

$$\mathfrak{M}v\,dv + \tfrac{1}{2}v^2\cdot d\mathfrak{M} = \mathfrak{P}\cdot ds$$

oder

$$d\left(\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}v^2\right) = \mathfrak{P}\cdot ds$$

und nach Integration

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}v^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_0 v_0^2 = \int\mathfrak{P}\cdot ds = A. \tag{11}$$

Ein Blick auf die Gleichungen (10) und (11) lehrt, daß das Arbeitsprinzip auch noch für den Punkt mit veränderlicher Masse seine Gültigkeit behält, daß hingegen das gebräuchliche Beschleunigungsgesetz

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$$

nur für Punkte mit konstanter Masse $\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial s} = 0\right)$ oder für den Beginn der Bewegung $(v = 0)$ anwendbar ist.

23. Es sei im besonderen $P = Mg$ das Gewicht einer bewegten Punktmasse M des Getriebes, v_n deren Geschwindigkeit, φ der Winkel von v_n gegen die Vertikale, g die Beschleunigung der Schwere; dann ist das nach dem Reduktionspunkt reduzierte Gewicht nach Gleichung (1)

$$\mathfrak{P} = P \cdot \frac{v_n}{v} \cdot \cos \varphi$$

und dessen reduzierte Masse nach Gleichung (2)

$$\mathfrak{M} = M \cdot \left(\frac{v_n}{v}\right)^2,$$

somit die Beschleunigung des Reduktionspunktes, wenn dieses Gewicht P und dessen Masse M die einzig vorhandenen wären, nach Gleichung (10)

$$\gamma = \frac{\mathfrak{P} - \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial s}}{\mathfrak{M}} = \frac{M \frac{v_n}{v} \cos \varphi - \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial s}}{M \left(\frac{v_n}{v}\right)^2} \cdot g.$$

Für den Beginn der Bewegung mit $v = 0$ wäre im besonderen

$$\gamma = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}} = \frac{v}{v_n} \cdot \cos \varphi \cdot g$$

und wenn überdies zufällig $v \cos \varphi = v_n$ wäre:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{M} \cdot g.$$

Diese Überlegung lehrt, daß nur in einem ganz speziellen Falle das reduzierte Gewicht gleich der reduzierten Masse mal der Beschleunigung der Schwere gesetzt werden kann.

Trotzdem wollen wir die Größe $\mathfrak{M} \,.\, g$, da sie in den folgenden Konstruktionen eine Rolle spielt und jederzeit leicht aus $\mathfrak{M}$ zu bilden ist, als *reduziertes Massengewicht* $\mathfrak{G}$ in die Rechnung einführen, ohne aber eine besondere Vorstellung damit zu verbinden.

Setzt man also

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{M} g, \quad \mathfrak{G}_0 = \mathfrak{M}_0 \cdot g,$$

ferner die Geschwindigkeitshöhen

$$h = \frac{v^2}{2g}, \quad h_0 = \frac{v_0^2}{2g},$$

so sind die Bewegungsenergien des Getriebes

$$L = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M} v^2 = \mathfrak{G} h, \quad L_0 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_0 v_0^2 = \mathfrak{G}_0 h_0 \tag{12}$$

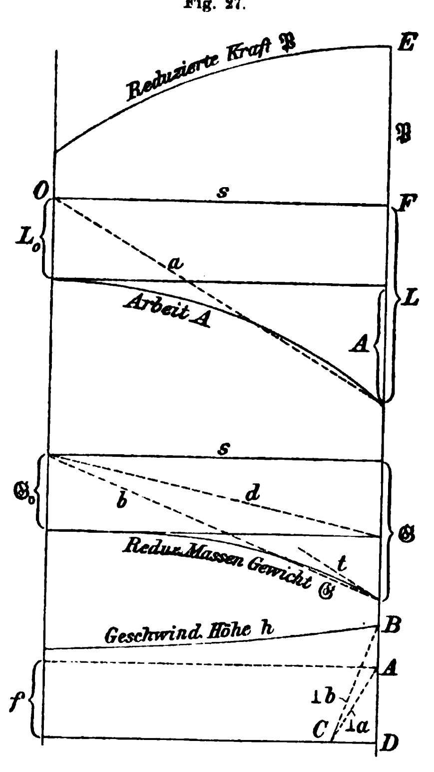
und das Arbeitsprinzip (11) nimmt die bequeme Form an

$$L - L_0 = \mathfrak{G} h - \mathfrak{G}_0 h_0 = A \tag{13}$$

Konstruktion der Geschwindigkeitshöhe.

24. Es sei von einem Getriebe das Diagramm der reduzierten Kräfte $\mathfrak{P}$ sowie das Diagramm der reduzierten Massengewichte $\mathfrak{G} = \mathfrak{M} g$ gegeben (Fig. 27).

Fig. 27.



Die Abszisse der beiden Diagramme sei der Weg s des Reduktionspunktes, für den jene Reduktion von Kraft und Masse vorgenommen wurde.

Die zwischen der $\mathfrak{P}$-Linie und der Achse s liegende Fläche

$$\int \mathfrak{P} \cdot ds = A$$

stellt die Arbeit der reduzierten Kraft dar; sie möge für beliebig viele Werte von s durch Planimetrieren oder auf anderem Wege ermittelt und in einem besonderen Diagramme dargestellt werden (Arbeitslinie A).

Ist die Geschwindigkeit v_0 des Reduktionspunktes für $s = 0$ gegeben, so ist die anfängliche Bewegungsenergie $L_0 = \frac{1}{2}\mathfrak{M}_0 v_0^2 = \mathfrak{G}_0 h_0$ des Getriebes als bekannt anzusehen und somit die Bewegungsenergie an einer beliebigen späteren Stelle nach Gleichung (13)

$$L = L_0 + A.$$

Die Arbeitslinie A ist also, bezogen auf die Gerade OF, das Diagramm der Bewegungsenergie L des Getriebes. Bedeutet L in Fig. 27 die *Länge*, welche die Bewegungsenergie im Diagramme darstellt, f den Arbeitswert der Längeneinheit, so ist der eigentliche Wert der Bewegungsenergie

$$L \cdot f = \mathfrak{G} \cdot h.$$

Um nun die Geschwindigkeitshöhe h bequem zu konstruieren, ziehe man (Fig. 27) in der Entfernung f von der s-Linie eine Parallele zu dieser, ferner im L-Diagramme die Linie a und im $\mathfrak{G}$-Diagramme die Linie b; endlich $AC \perp a$ und $CB \perp b$, so ist $BD = h$ die gesuchte Geschwindigkeitshöhe. Denn es ist

$$AD : CD = s : L$$

$$CD : BD = \mathfrak{G} : s,$$

somit

$$AD : BD = \mathfrak{G} : L$$

und

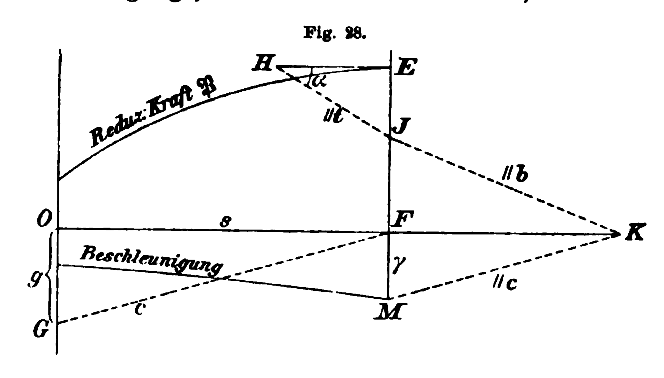
$$f : h = \mathfrak{G} : L.$$

Wird diese Konstruktion an beliebig vielen Stellen durchgeführt, so erhält man das Diagramm der Geschwindigkeitshöhe h.

Konstruktion der Beschleunigung.

25. Um für irgend eine Stelle s des Reduktionspunktes die Beschleunigung γ desselben zu konstruieren, ziehe man (Fig. 27) zunächst die Tangente t an die $\mathfrak{G}$-Linie und mache (Fig. 28) OG nach beliebig gewähltem Maßstabe gleich der Beschleunigung g der Schwere. Nun trage man von E, parallel zu s, die früher gefundene Geschwindigkeitshöhe $EH = h$ der betreffenden Stelle auf und ziehe die Geraden

Fig. 28.



$$HJ \parallel t. \quad JK \parallel b, \quad KM \parallel c,$$

so ist $FM = \gamma$ die gesuchte Beschleunigung in jenem Maßstabe, der für g gewählt wurde. Denn nach dieser Konstruktion ist

$$FM : FK = g : s,$$

$$FK : FJ = s : \mathfrak{G},$$



also

$$FJ = FM \cdot \frac{\mathfrak{G}}{g} = FM \cdot \mathfrak{M}.$$

Ferner ist

$$\frac{JE}{EH} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial s} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial s} \cdot g,$$

also

$$JE = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial s} \cdot gh = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial s} \cdot \frac{v^2}{2}$$

und

$$\mathfrak{P} = FJ + JE = FM \cdot \mathfrak{M} + \frac{v^2}{2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial s},$$

woraus

$$\gamma = FM = \frac{\mathfrak{P} - \frac{v^2}{2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial s}}{\mathfrak{M}},$$

übereinstimmend mit Gleichung (10).

Figur 28 zeigt das auf diese Weise gefundene Diagramm der Beschleunigung.

Für diejenigen Lagen des Reduktionspunktes, für welche er den größten oder kleinsten Wert seiner Geschwindigkeit erreicht, ist $\gamma = 0$ oder

$$\mathfrak{P} = \frac{v^2}{2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial s}.$$

Das D'Alembertsche Prinzip und die Beschleunigungsdrücke.

26. Der oben benutzte Ausdruck für die Beschleunigung γ des Reduktionspunktes kann auch mit Hilfe des D'Alembertschen Prinzipes gefunden werden. Dieses Prinzip verlangt, daß im Getriebe sämtliche äußeren Kräfte mit den Trägheitskräften im Gleichgewichte stehen oder, was dasselbe ist, daß die äußeren Kräfte und die Beschleunigungsdrücke äquivalente Kraftsysteme bilden.

Es sei m_n irgend ein Massenpunkt des Getriebes, v_n seine Geschwindigkeit, γ_n seine Beschleunigung, φ der Winkel zwischen beiden, so ist der Beschleunigungsdruck dieses Massenpunktes $B = m_n \gamma_n$ und die Leistung desselben, d. h. die Arbeit in der Zeiteinheit

$$B \cdot v_n \cos \varphi = m_n v_n \gamma_n \cos \varphi.$$

Nun ist

$$\gamma_n \cos \varphi = \frac{dv_n}{dt},$$

somit ist die Leistung auch

$$m_n v_n \cdot \frac{dv_n}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(m_n v_n^2)}{dt}$$

und die Leistung sämtlicher Beschleunigungsdrücke

$$\frac{1}{2}\frac{d\Sigma(m_n v_n^2)}{dt}.$$

Reduziert man diese Beschleunigungsdrücke wie Kräfte nach dem gewählten Reduktionspunkt und nennt $\mathfrak{B}$ den gesamten reduzierten Beschleunigungsdruck, v die Geschwindigkeit des Reduktionspunktes, so ist nach dem Reduktionsgesetze Gleichung (1)

$$\mathfrak{B}\cdot v = \frac{1}{2}\frac{d\Sigma(m_n v_n^2)}{dt}.$$

und da nach dem Reduktionsgesetze der Massen Gleichung (2)

$$\mathfrak{M} v^2 = \sum(m_n v_n^2),$$

worin $\mathfrak{M}$ die nach dem Reduktionspunkt reduzierte Masse des Getriebes ist, so wird

$$\mathfrak{B} v = \frac{1}{2}\frac{d(\mathfrak{M} v^2)}{dt}$$

und

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}\frac{d\mathfrak{M}}{dt}\cdot v + \mathfrak{M}\cdot\frac{dv}{dt},$$

oder auch

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}v^2\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial s} + \mathfrak{M}\gamma. \tag{14}$$

Nun bilden aber nach dem D'Alembertschen Prinzipe die äußeren Kräfte und die Beschleunigungsdrücke äquivalente Kraftsysteme; reduziert man beide nach demselben Punkt, so müssen sie also dieselbe Kraft liefern, d. h. es muß $\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$ sein oder

$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2}v^2\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial s} + \mathfrak{M}\gamma,$$

woraus für γ wieder der in Gleichung (10) mitgeteilte Ausdruck

$$\gamma = \frac{\mathfrak{P} - \tfrac{1}{2}v^2\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial s}}{\mathfrak{M}}$$

folgt.

27. Definiert man als Beschleunigungsdruck der reduzierten Masse $\mathfrak{M}$ nicht, wie es bei konstanten Massen gebräuchlich ist, das Produkt $\mathfrak{M}\gamma$, sondern vielmehr jene Kraft, welche der veränderlichen Masse $\mathfrak{M}$ die Beschleunigung γ zu erteilen imstande ist, so ist demnach als Beschleunigungsdruck der reduzierten Masse $\mathfrak{M}$ nach Gleichung (10) der Ausdruck anzusehen

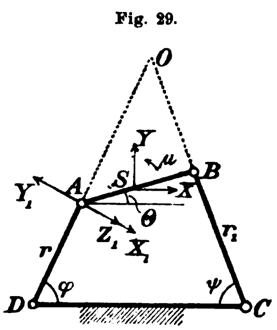
$$\tfrac{1}{2}v^2\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial s} + \mathfrak{M}\gamma,$$

der nach Gleichung (14) mit dem reduzierten Beschleunigungsdrucke $\mathfrak{B}$ völlig übereinstimmt. Daraus folgt das Gesetz:

Der reduzierte Beschleunigungsdruck einer bewegten Masse ist gleich dem Beschleunigungsdrucke der reduzierten Masse.

28. Von der Richtigkeit der Gleichung (14) und damit auch des eben ausgesprochenen Gesetzes wollen wir uns an folgender Anwendung überzeugen, welche zugleich wieder dartun soll, wie umständlich sich die Rechnung selbst in einfachen Fällen gestaltet.

Fig. 29.



Es sei $ABCD$ (Fig. 29) ein allgemeines Kurbelgetriebe, r, r_1 seien die Längen der beiden Arme, φ, ψ ihre Neigungen gegen das festgehaltene Glied $CD = d$; $AB = l$ die Koppel, M die Masse derselben, S deren Schwerpunkt, Mk^2 ihr Trägheitsmoment inbezug auf die zur Zeichnung senkrechte Schwerlinie, θ ihre Neigung gegen das festgehaltene Glied, ferner $AS = a$, $SB = b$. Die Winkelgeschwindigkeit des Armes r sei φ', die Winkelbeschleunigung φ''; endlich O der Drehpol der Koppel und $OA = p = l\,\frac{\sin(\psi+\theta)}{\sin(\varphi+\psi)}$.

Nennt man x, y die Koordinaten des Schwerpunktes S in bezug auf DC und D als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Achsenkreuzes und bildet die Beschleunigungsdrücke der Koppel, so lassen sich dieselben auf folgende resultierende Wirkungen zurückführen:

$$X = M \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -Mr[B\varphi'^2 + C\varphi''],$$

$$Y = M \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -Mr[D\varphi'^2 + E\varphi''],$$

$$\text{Moment } \mu = Mk^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mk^2[F\varphi'^2 + G\varphi''].$$

Hierin bedeuten:

$$B = \cos\varphi + \frac{ar}{l^2}\frac{\cos\theta\sin^2(\varphi+\psi)}{\sin^2(\psi+\theta)} - A\frac{a}{l}\frac{\sin\theta}{\sin(\psi+\theta)},$$

$$C = \sin\varphi - \frac{a}{l}\frac{\sin\theta\sin(\varphi+\psi)}{\sin(\psi+\theta)},$$

$$D = \sin\varphi + \frac{ar}{l^2}\frac{\sin\theta\sin^2(\varphi+\psi)}{\sin^2(\psi+\theta)} + A\frac{a}{l}\frac{\cos\theta}{\sin(\psi+\theta)},$$

$$E = -\cos\varphi + \frac{a}{l}\frac{\cos\theta\sin(\varphi+\psi)}{\sin(\psi+\theta)},$$

$$F = A\frac{r}{l}\frac{1}{\sin(\psi+\theta)}, \quad G = \frac{r}{l}\cdot\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin(\psi+\theta)},$$

$$A = \cos(\varphi+\psi) + \frac{r}{l}\frac{\sin^2(\varphi+\psi)\cos(\psi+\theta)}{\sin^2(\psi+\theta)} + \frac{r}{r_1}\frac{\sin^2(\varphi-\theta)}{\sin^2(\psi+\theta)}.$$

Diese Gleichungen wurden gewonnen aus

$$x = r \cos \varphi + a \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi + a \sin \theta$$

durch zweimaliges Differenzieren nach der Zeit t und Entfernen von $\frac{d\psi}{dt}$ und $\frac{d\theta}{dt}$ mit Hilfe der Gleichungen

$$r \cos \varphi + l \cos \theta + r_1 \cos \psi = d, \quad r \sin \varphi + l \sin \theta - r_1 \sin \psi = 0$$

und ihrer ersten Ableitung nach t.

Werden die Teile X, Y und μ des gesamten Beschleunigungsdruckes nach A reduziert, so erhält man in diesem Reduktionspunkte die Kräfte

$$X_1 = \frac{1}{p} X(p \sin \varphi - a \sin \theta),$$

$$Y_1 = \frac{1}{p} Y(p \cos \varphi - a \cos \theta),$$

$$Z_1 = \frac{1}{p} \mu,$$

und somit den ganzen nach A reduzierten Beschleunigungsdruck

$$\mathfrak{B} = Y_1 - X_1 - Z_1 = \frac{1}{p}[Y(p \cos \varphi - a \cos \theta) - X(p \sin \varphi - a \sin \theta) - \mu],$$

worin X, Y, μ die oben angegebenen Werte haben.

Um die rechte Seite der Gleichung (14) zu finden, sei zunächst an den in Absatz **10** gefundenen Ausdruck für die nach A reduzierte Masse der Koppel

$$\mathfrak{M} = M\left[1 - \frac{2a}{l}\frac{\sin(\varphi + \psi)\cos(\varphi - \theta)}{\sin(\psi + \theta)} + \frac{a^2 + k^2}{l^2} \cdot \frac{\sin^2(\varphi + \psi)}{\sin^2(\psi + \theta)}\right]$$

erinnert.

Die Beschleunigung von A in Richtung seiner Bahn ist $r\varphi''$, somit der zweite Teil der rechten Seite der Gleichung (14)

$$\mathfrak{M} \cdot r \cdot \varphi''.$$

Hingegen wird der erste Teil derselben

$$\tfrac{1}{2} v^2 \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial s} = \tfrac{1}{2} r \varphi'^2 \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \varphi}$$

wegen

$$ds = r \cdot d\varphi, \quad v = r \cdot \varphi'.$$

Durch Differenzieren von $\mathfrak{M}$ nach φ ergibt sich:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \varphi} = -\frac{a}{l} \cdot \frac{\cos(2\varphi + \psi - \theta)}{\sin(\psi + \theta)} - \frac{ar}{l^2}\frac{\sin^2(\varphi + \psi)\cos(\varphi + \psi)}{\sin^3(\psi + \theta)}$$

$$- \frac{ar}{lr_1}\frac{\sin^2(\varphi - \theta)\cos(\varphi - \theta)}{\sin^3(\psi + \theta)} + \frac{a^2 + k^2}{l^2}\frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sin^2(\psi + \theta)}\Big[\cos(\varphi + \psi) +$$

$$+ \frac{r}{l}\frac{\sin^2(\varphi + \psi)\cos(\psi + \theta)}{\sin^2(\psi + \theta)} + \frac{r}{r_1}\frac{\sin^2(\varphi - \theta)}{\sin^2(\psi + \theta)}\Big].$$



Die Gleichung (14) nimmt hierdurch die Form an:

$$Y\left(\cos\varphi - \frac{a}{p}\cos\theta\right) - X\left(\sin\varphi - \frac{a}{p}\sin\theta\right) - \frac{\mu}{p} = \mathfrak{M} r\varphi'' + \tfrac{1}{2} r\varphi'^2 \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \varphi}.$$

Setzt man hier die oben mitgeteilten Werte von X, Y, μ, $\mathfrak{M}$, $\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \varphi}$, p ein, so wird die Gleichung tatsächlich eine identische.

29. Die nach dem Reduktionspunkt reduzierte Masse eines Getriebes kann zweckmäßig in zwei Teile zerlegt werden:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_1,$$

worin $\mathfrak{M}_0$ den unveränderlichen (also von s unabhängigen), $\mathfrak{M}_1$ den veränderlichen Teil bezeichnet. So wird z. B., wenn eine Kurbelwarze als Reduktionspunkt gewählt wird, $\mathfrak{M}_0$ die reduzierte rotierende Masse sein.

Dementsprechend kann auch der reduzierte Beschleunigungsdruck in zwei Teile zerlegt werden:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1,$$

worin $\mathfrak{B}_0$ der Beschleunigungsdruck der unveränderlichen Masse $\mathfrak{M}_0$, hingegen $\mathfrak{B}_1$ jener von $\mathfrak{M}_1$ ist.

Nach Gleichung (14) ist nun

$$\mathfrak{B}_0 = \tfrac{1}{2} v^2 \frac{\partial \mathfrak{M}_0}{\partial s} + \mathfrak{M}_0 \gamma,$$

$$\mathfrak{B}_1 = \tfrac{1}{2} v^2 \frac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial s} + \mathfrak{M}_1 \gamma,$$

und da

$$\gamma = \frac{\mathfrak{P} - \tfrac{1}{2} v^2 \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial s}}{\mathfrak{M}},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_0}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial s} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial s},$$

so folgt

$$(15) \quad \begin{cases} \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{P} \cdot \frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{M}} - \tfrac{1}{2} v^2 \cdot \frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial s}, \\ \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{P} \cdot \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}} + \tfrac{1}{2} v^2 \cdot \frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial s}, \end{cases}$$

woraus wieder folgt

$$(68) \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{P},$$

übereinstimmend mit Absatz **26.**

An Stellen der Bewegung, wo $\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial s} = 0$ wird, gilt die Beziehung

$$\mathfrak{B}_0 : \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{M}_0 : \mathfrak{M}_1.$$

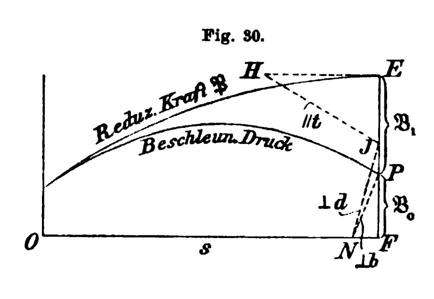
Ist an diesen Stellen überdies $\mathfrak{M}_1 = 0$, so wird $\mathfrak{B}_1 = 0$.

An Stellen, wo $\mathfrak{P} = 0$ wird, ist $\mathfrak{B}_0 = -\mathfrak{B}_1$; endlich an jenen, wo die Geschwindigkeit einen größten oder kleinsten Wert erreicht, d. h. $\gamma = 0$ ist, wird $\mathfrak{B}_0 = 0$, $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{P}$.

Konstruktion der Beschleunigungsdrücke.

30. Um für eine Lage s des Getriebes die beiden Teile $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_1$ des Beschleunigungsdruckes zu konstruieren, ziehe man (Fig. 30) im Diagramme der reduzierten Kräfte $\mathfrak{P}$, so wie früher bei Konstruktion der Beschleunigung, die Gerade $EH = h$ und $HJ \parallel t$. Bezeichnet man mit $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{M}_0 g$ das der unveränderlichen reduzierten Masse $\mathfrak{M}_0$ entsprechende Massengewicht (vergl. Fig. 27, $\mathfrak{G}$-Linie), und d die Diagonale über s und $\mathfrak{G}_0$, so erübrigt noch, die Linien $JN \perp d$ und $NP \perp b$ zu ziehen; dann ist $FP = \mathfrak{B}_0$ und $PE = \mathfrak{B}_1$.

Fig. 30.



Zunächst ist nämlich, wie in Absatz 25 gezeigt wurde,

$$JE = \frac{v^2}{2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial s},$$

ferner nach obiger Konstruktion

$$JF : NF = s : \mathfrak{G}_0,$$
$$NF : FP = \mathfrak{G} : s,$$

also

$$JF : FP = \mathfrak{G} : \mathfrak{G}_0 = \mathfrak{M} : \mathfrak{M}_0$$

und

$$FP = JF \cdot \frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{M}} = \left(\mathfrak{P} - \frac{v^2}{2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial s}\right) \cdot \frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{M}},$$

dies stimmt aber nach den Gleichungen (15) mit $\mathfrak{B}_0$ überein. Ebenso bleibt dann

$$PE = \mathfrak{P} - \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_1.$$

31. Die Durchführung der Diagramme für eine Periode des Ganges einer Maschine zeigt Fig. 31 (Tafel).

Als Reduktionspunkt ist eine Kurbelwarze des Getriebes gedacht. Der Weg $2r\pi$ dieses Punktes während einer Umdrehung (Periode) wurde auf der Linie 1,1 aufgerollt. Als Längenmaßstab wurde 1 *mm* Zeichnung = 0,1 *m* Natur angenommen.

Die nach der Kurbelwarze reduzierten Triebkräfte, Gewichte und Widerstände sind als Ordinaten der $\mathfrak{P}$-Linie dargestellt worden; positive Kräfte wurden nach aufwärts, negative nach abwärts aufgetragen. Als

Kraftmaßstab wurde gewählt 1 $mm = 100$ Kilogramm. Die Fläche zwischen der $\mathfrak{P}$-Linie und der Geraden 1,1 bedeutet die bis zu der betreffenden Stelle geleistete Arbeit. Nach obigen Maßstäben bedeutet also

$$1\ mm^2 = 10 \text{ Kilog.met. Arbeit.}$$

Diese Arbeitsflächen wurden durch Längen dargestellt, hierbei der Übertragungsmaßstab

$$25\,mm^2 \text{ Fläche} = 1\,mm \text{ Länge}$$

gewählt und diese Längen als Ordinaten von der Linie 3,3 aus aufgetragen, positive nach abwärts, negative nach aufwärts; hierdurch entstand die A-Linie oder das Arbeitsdiagramm. Der Maßstab desselben ergibt sich aus den bisher gewählten Maßstäben mit

$$1\,mm = f \cdot 10 \text{ Kilog.met.} = 250 \text{ Kilog.met.},$$

worin

$$f = 25\ mm$$

nach oben den Flächenwert des Millimeters im Arbeitsdiagramme bedeutet.

Zwischen der $\mathfrak{P}$-Linie und der A-Linie besteht wegen der Beziehung $dA = \mathfrak{P} \cdot ds$ ein Zusammenhang. Wo die $\mathfrak{P}$-Linie die Gerade 1,1 schneidet, erreicht die A-Linie ihre höchsten und tiefsten Stellen; wo die $\mathfrak{P}$-Linie ihre höchsten oder tiefsten Stellen erreicht, besitzt die A-Linie Wendepunkte.

Die Bewegungsenergie der Maschine sei zu Beginn der Periode $L_0 = 7500$ Kilog.met.; da sie nach demselben Maßstabe zu messen ist wie die Arbeit und nach dem früheren im Arbeitsdiagramme $1\,mm = 250$ Kilog.met. bedeutet, so ist im Längenmaße $L_0 = 30\,mm$.

Diese Länge L_0 wurde von der Geraden 3,3 nach aufwärts aufgetragen (Linie 2,2). Nach Gleichung

$$L = L_0 + A$$

ist die A-Linie gleichzeitig die L-Linie oder das Diagramm der Bewegungsenergie, wenn ihre Ordinaten bis zur Geraden 2,2 gemessen werden.

Die reduzierten Massengewichte der Maschine sind in der $\mathfrak{G}$-Linie angenommen worden. Die veränderlichen Gewichte $\mathfrak{G}_1$ erscheinen von der Geraden 4,4 nach abwärts aufgetragen; das konstante Gewicht $\mathfrak{G}_0$ wurde mit 5000 Kilog. angenommen; nach dem oben gewählten Kraftmaßstabe entspricht $\mathfrak{G}_0 = 50\,mm$, welche Länge von der Geraden 4,4 nach aufwärts aufgetragen wurde. Das gesamte reduzierte Massengewicht $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 + \mathfrak{G}_1$ ist also von der Geraden 3,3 nach abwärts zu messen.

Zu Beginn der Periode sei die veränderliche Masse $\mathfrak{M}_1 = 0$, daher nach Absatz **19** auch $d\mathfrak{M}_1 = 0$; es ist also auch gleichzeitig $\mathfrak{G}_1 = 0$ und $d\mathfrak{G}_1 = 0$; die $\mathfrak{G}$-Linie berührt zu Anfang und zu Ende der Periode die Gerade 4,4.

Nach diesen Vorbereitungen können die Diagramme der Geschwindigkeitshöhen und der Beschleunigungsdrücke konstruiert werden.

Die anfängliche Geschwindigkeitshöhe ergibt sich aus

$$\mathfrak{G}_0 h_0 = L_0$$

$$h_0 = \frac{7500 \text{ Kil. met.}}{5000 \text{ Kil.}} = 1{,}5 \text{ met.}$$

und nach dem gewählten Längenmaßstabe $h_0 = 15\,mm$. Nach dem in Absatz **24** geschilderten Vorgange wurde nun das Diagramm der Geschwindigkeitshöhen konstruiert, wobei $f = 25\,mm$ benützt wurde. An zwei Stellen, für eine positive Arbeit $+ A_1$ und für eine negative $- A_2$ wurden die hierzu nötigen Konstruktionslinien eingezeichnet.

Die Beschleunigungsdrücke wurden wie in Absatz **30** konstruiert und das Diagramm derselben gezeichnet. Auch hier wurden für jene zwei Stellen die notwendigen Konstruktionslinien angedeutet.

Die Ordinatenstücke zwischen der $\mathfrak{B}$-Linie und der Geraden 1,1 bedeuten die Beschleunigungsdrücke $\mathfrak{B}_0$ der konstanten Masse $\mathfrak{M}_0$; die Ordinatenstücke zwischen der $\mathfrak{B}$-Linie und der $\mathfrak{P}$-Linie bedeuten die Beschleunigungsdrücke $\mathfrak{B}_1$ der veränderlichen Masse $\mathfrak{M}_1$.

Die Stellen I und II, wo die $\mathfrak{B}$-Linie die Gerade 1,1 schneidet, sind die Stellen größter und kleinster Geschwindigkeit des Reduktionspunktes (siehe Schluß von Absatz **29**); an diesen Stellen ist natürlich auch die Geschwindigkeitshöhe ein Maximum, bezw. ein Minimum.

Das Energie-Massendiagramm.

32. Verbindet man das früher besprochene Energiediagramm (Fig. 27) mit der $\mathfrak{G}$-Linie derart, daß man die reduzierten Massengewichte $\mathfrak{G}$ als Abszissen, die zugehörigen Bewegungsenergien als Ordinaten aufträgt, so entsteht das Energie-Massengewichtsdiagramm, oder kurz das Energiemassendiagramm, welches interessante und wichtige Eigenschaften besitzt (Fig. 32).

O sei der Anfangspunkt des Achsenkreuzes, $L = L_0 + A$ die Bewegungsenergie des Getriebes zu irgend einer Zeit, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 + \mathfrak{G}_1$ das reduzierte Massengewicht des Getriebes, wobei $\mathfrak{G}_0$ der unveränderliche Teil desselben, $\mathfrak{G}_1$ der veränderliche Teil ist. Trägt man L und $\mathfrak{G}$ als Ordinate und Abszisse eines Punktes M auf, so stellt M den Zustand

des Getriebes zu der betreffenden Zeit vor. Der geometrische Ort aller Punkte M ist das Energie-Massendiagramm; es muß eine geschlossene Kurve sein, wenn die Zustände des Getriebes sich wiederholen, wenn es also Perioden besitzt.

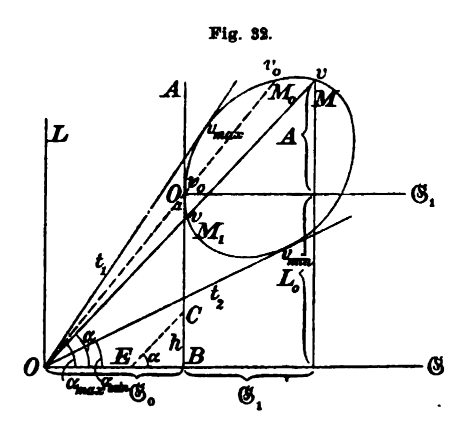


Fig. 32.

Als Anfangszustand des Getriebes in seiner Periode möge jener angenommen werden, bei welchem die veränderliche Masse verschwindet, d. h. $\mathfrak{M}_1 = 0$ oder $\mathfrak{G}_1 = 0$ ist, wofür nach Absatz **19** auch $d\mathfrak{M}_1 = 0$ oder $d\mathfrak{G}_1 = 0$ gilt. Dieser Zustand ist in Fig. 32 durch den Punkt O_1 dargestellt, dessen Koordinaten L_0, die anfängliche Bewegungsenergie und $\mathfrak{G}_0$, das unveränderliche Massengewicht des Reduktionspunktes sind.

Legt man das Achsenkreuz durch O_1 statt durch 0, so sind die Koordinaten eines beliebigen Zustandes M die Arbeit A und das veränderliche Massengewicht $\mathfrak{G}_1$ des Reduktionspunktes. Man könnte also das Diagramm auch Arbeit-Massendiagramm nennen.

Verbindet man M mit O, so ist $\operatorname{tg} \alpha = \frac{L}{\mathfrak{G}}$, also nach Gleichung (12) auch

$$\operatorname{tg} \alpha = h = \frac{v^2}{2g}.$$

Die Neigung der Geraden OM ist demnach ein Maß für die Geschwindigkeitshöhe und somit auch für die Geschwindigkeit des Reduktionspunktes.

Macht man z. B. EB gleich der Gewichtseinheit und zieht $EC \parallel OM$, so ist $BC = h$ die Geschwindigkeitshöhe für den Zustand M.

Die Neigung der Geraden OO_1 ist ebenso ein Maß für die anfängliche Geschwindigkeitshöhe

$$\operatorname{tang} \alpha_0 = h_0 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Die Zustände M und M_1 des Getriebes, welche auf derselben durch O gehenden Geraden liegen, besitzen gleiche Geschwindigkeit v.

Aus diesem Grunde ist z. B. M_0 jener Zustand des Getriebes, in dem die anfängliche Geschwindigkeit v_0 wiederkehrt.

Die Zustände größter und kleinster Geschwindigkeit des Getriebes erhält man, wenn man von O die Tangenten an das Diagramm zieht.

Denn es ist nach Gleichung (12) $L = \mathfrak{G}h$, also $dL = \mathfrak{G}dh + hd\mathfrak{G}$
Nun ist sowohl für v_{max} als auch für v_{min} $dv = 0$, also $dh = 0$
und somit

$$h = \frac{dL}{d\mathfrak{G}} = \operatorname{tang} \alpha,$$

welcher Bedingung die durch O gezogenen Tangenten des Diagrammes entsprechen. (Vergl. das Energie-Massendiagramm in Fig. 31 und die Stellen I und II für v_{max} und v_{min}.)

33. Gewöhnlich wird dem Gange des Getriebes eine gewisse mittlere Geschwindigkeit und ein bestimmter Ungleichförmigkeitsgrad vorgeschrieben.

Ohne hier in eine Kritik des Ausdruckes: mittlere Geschwindigkeit einzugehen (vergl. Heun a. a. O.) sei nur daran erinnert, daß aus Zweckmäßigkeitsgründen die mittlere Geschwindigkeit durch die gebräuchliche Formel

$$c = \tfrac{1}{2}(v_{max} + v_{min})$$

und der Ungleichförmigkeitsgrad durch

$$\mu = \frac{1}{c}(v_{max} - v_{min})$$

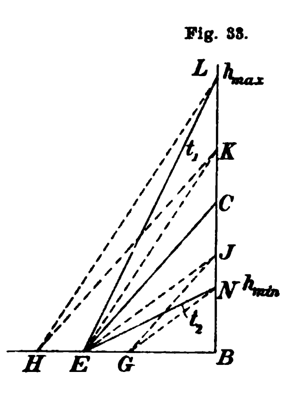
definiert wird, worin v_{max} und v_{min} die äußersten Werte der Geschwindigkeit des Reduktionspunktes sind. Bezeichnet man mit

$$h_{max} = \frac{v_{max}^2}{2g}, \quad h_{min} = \frac{v_{min}^2}{2g}, \quad h = \frac{c^2}{2g}$$

die größte, die kleinste und die mittlere Geschwindigkeitshöhe, so ist

$$h_{max} = h\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^2, \quad h_{min} = h\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)^2,$$

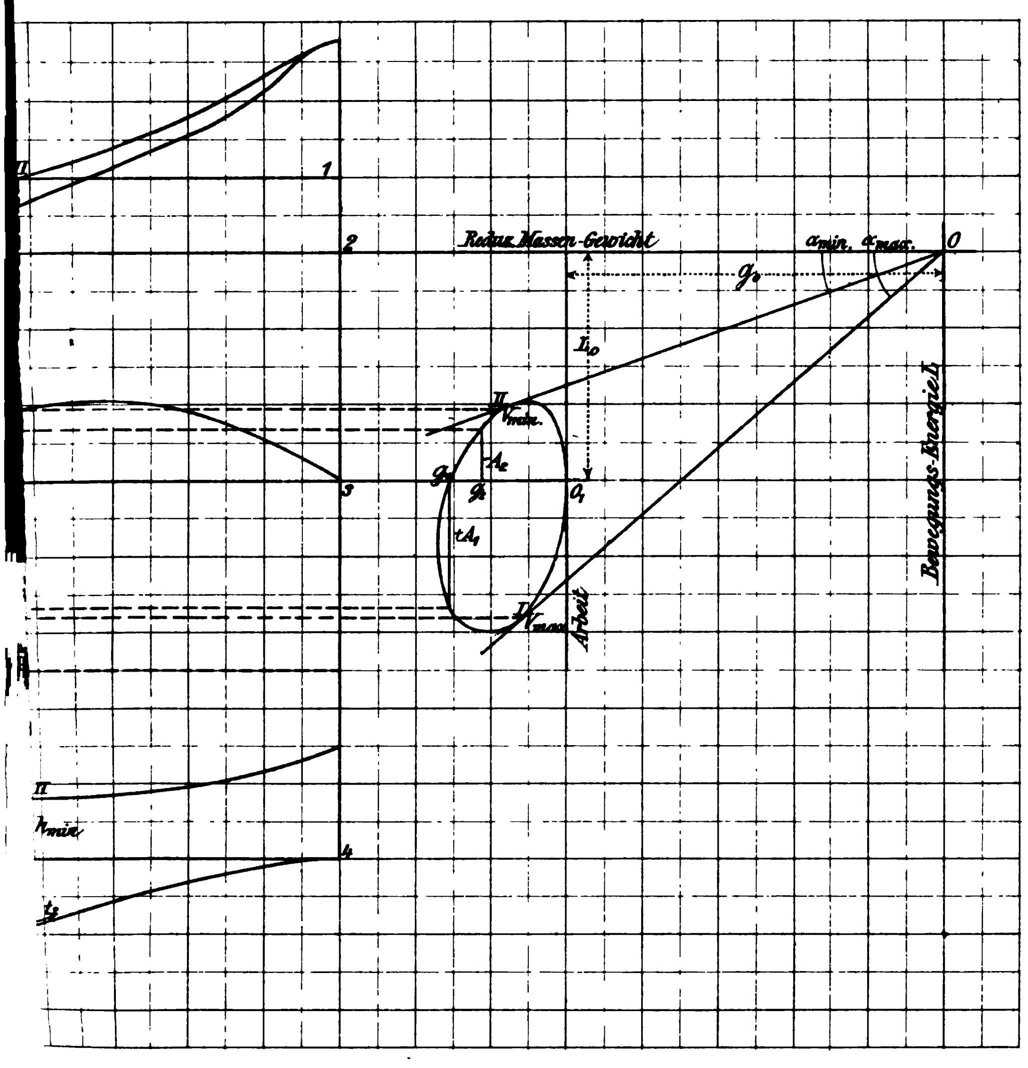
Fig. 33.



wobei h und μ als gegeben anzusehen sind.

Macht man demnach in Fig. 33, wie früher in Fig. 32, EB gleich der Gewichtseinheit, $BC = h = \frac{c^2}{2g}$ und trägt $HE = EG = \frac{\mu}{2}$ im Maße der Gewichtseinheit rechts und links von E auf, zieht ferner die Geraden $EC \parallel HK \parallel GJ$, $HL \parallel EK$, $GN \parallel EJ$, so ist $BL = h_{max}$, $BN = h_{min}$; die Geraden EL und EN schließen dann mit EB die Winkel α_{max} und α_{min} ein, sind also den Tangenten t_1 und t_2 des Arbeit-Massendiagrammes (Fig. 34) parallel.

Tafel I



i. Teubner, Leipzig.

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.

Konstruktion des Schwungrad-Gewichtes.

34. Handelt es sich darum, bei gegebener mittlerer Geschwindigkeit c und gegebenem Ungleichförmigkeitsgrade μ das notwendige Gewicht des Schwungringes zu finden, so konstruiere man zunächst das Arbeit-Massendiagramm zwischen A und dem veränderlichen Massengewichte $\mathfrak{G}_1$, wie dies z. B. in Fig. 31 angedeutet wurde; sodann nach Fig. 33 die Geraden t_1 und t_2. Sodann ziehe man an das Arbeit-Massendiagramm die beiden Tangenten zu t_1 und t_2 parallel (Fig. 34) und ermittle deren Schnittpunkt 0.

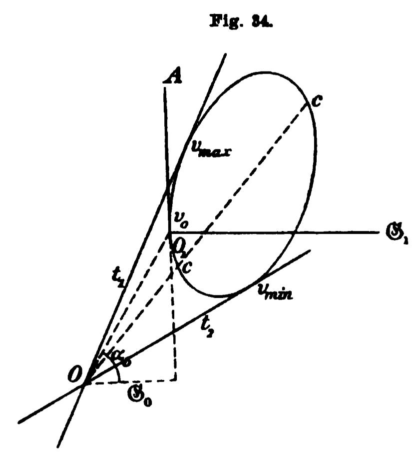


Fig. 34.

Dieser Punkt bestimmt zunächst durch seinen Abstand $\mathfrak{G}_0$ von der A-Achse das reduzierte Gewicht des Schwungrades (vermehrt um die Gewichte der übrigen rotierenden Massen). Ferner gibt die Verbindung $O O_1$ den Winkel α_0 an und damit die anfängliche Geschwindigkeit nach der Gleichung $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{v_0^2}{2g}$.

Zieht man durch O eine Parallele zu EC (Fig. 33), so schneidet diese Gerade das Diagramm in jenen Zuständen des Getriebes, in denen die mittlere Geschwindigkeit c besteht.

Es wird zur Konstruktion des Schwungradgewichtes nicht notwendig sein, das ganze A-$\mathfrak{G}_1$-Diagramm zu konstruieren. Es wird genügen, wenn man das Diagramm in der Nähe der Stellen v_{max} und v_{min} möglichst genau kennt.

Berichtigung.

S. 63, Fig. 1 lies $\mathfrak{P}$ statt $\mathfrak{R}$.
S. 65, Fig. 5 „ $\mathfrak{P}_1$ „ $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{P}_2$ statt $\mathfrak{R}_2$.
S. 66, Fig. 6 „ $\mathfrak{P}$ „ $\mathfrak{R}$.

Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung.

Von A. SOMMERFELD in Aachen.

§ 1. Einleitende Bemerkungen über Lagerreibung. Trockene Reibung und Flüssigkeitsreibung. Allgemeines über Versuchsergebnisse und Literatur.

Bei der Behandlung der Reibungserscheinungen hat man zwei diametral entgegengesetzte Ansätze gemacht. Der eine derselben rührt von Coulomb her und herrscht zur Zeit in dem Gesamtgebiete der

technischen Mechanik. Er betrifft ursprünglich die gleitende Reibung zwischen zwei festen Körpern, deren Oberflächen unmittelbar (ohne Dazwischentreten eines Schmiermittels) miteinander in Berührung sind. Wenn P der Gesamtdruck ist, mit dem die beiden Körper senkrecht gegen ihre Berührungsfläche aufeinander wirken, so lautet der Coulombsche Ansatz für den in die Berührungsfläche fallenden Reibungswiderstand bekanntlich

$$W = \mu P, \tag{1}$$

wo μ „Reibungskoeffizient" heißt; μ soll dabei von dem Drucke P sowie von der Größe der Berührungsfläche und im wesentlichen auch von der Größe der relativen Geschwindigkeit unabhängig sein.

Ein anderer Ansatz ist von physikalischer Seite (Newton, Poisson, Navier, Stokes) ausgebildet[1]) und betrifft die innere Reibung der Flüssigkeiten. So oft der Physiker Reibungs- oder Dämpfungserscheinungen zu behandeln hat, schließt er sich je nach den Umständen mehr oder minder eng diesem zweiten Ansatz an. Man denke sich die Flüssigkeit durch ihre Strömungslinien in einzelne Schichten eingeteilt und betrachte die Wirkung zweier benachbarter Schichten aufeinander. u sei die Geschwindigkeit der Strömung, n eine Länge, die senkrecht gegen die Berührungsfläche der beiden betrachteten Schichten gemessen wird. Dann beträgt die durch die Berührungsfläche f übertragene Reibung

$$W = \lambda f \frac{\partial u}{\partial n}, \tag{2}$$

wo λ eine Konstante der Flüssigkeit ist — man kann sie Viskositätskonstante nennen —, die von dem Drucke p, unter dem die Flüssigkeit an der betrachteten Stelle steht, sowie von der Strömungsgeschwindigkeit unabhängig ist und nur (in hohem Grade) von der Temperatur abhängt.

Die Ansätze (1) und (2) sind so verschieden wie möglich. Nach (1) ist die Reibung von der Geschwindigkeit unabhängig und dem Gesamtdrucke P proportional; nach (2) dagegen ist die Reibung von dem Drucke p unabhängig und dem Geschwindigkeitsgefälle proportional.

Hervorgehoben sei noch, daß in der Grenze für verschwindende Bewegung die Reibung nach (1) nicht selbst verschwindet, vielmehr (wegen des eigentümlichen Verhaltens des Reibungskoeffizienten bei kleinen Geschwindigkeiten) sich einem Maximum $\mu_0 P$ nähert (μ_0 gleich „Reibungskoeffizient der Ruhe"), während die Reibung der Ruhe nach (2) gleich Null wird.

1) Sorgfältige Literaturangaben bei A. E. H. Love, Encykl. d. math. Wissenschaften IV 15, Art. Hydrodynamik Nr. 12.

Der Ansatz (2) findet seine vollste Bestätigung in den Beobachtungen von Poiseuille an Kapillarröhren. Der Ansatz (1) bewährt sich überall da, wo es sich um das direkte Gleiten von festen Körpern gegen einander handelt.

In den schärfsten Gegensatz treten die beiden verschiedenen Auffassungen bei dem Problem der Lagerreibung. Obwohl im Betriebe der Lager ein Schmiermittel unentbehrlich ist, wird in der älteren technischen Literatur der Ansatz (1) auch auf diesen Fall ohne weiteres übertragen. Für das Moment des Reibungswiderstandes um die Achse des Zapfens gibt man dementsprechend gewohnheitsmäßig die folgende Formel an:

$$M = \mu r P, \tag{I}$$

wo r den Zapfenradius, P den Zapfendruck bedeutet; μ wird auch hier als Reibungskoeffizient bezeichnet, zugleich wird aber in der Regel hinzugefügt, daß μ nicht identisch ist mit dem Reibungskoeffizienten für die trockene Gleitung des Zapfenmaterials auf dem Material der Lagerschale, sondern durch den Versuch jedesmal besonders zu bestimmen sei.

Im Gegensatz hierzu hat zuerst Petroff[1]) hervorgehoben, daß die Erscheinungen der Lagerreibung durch die Gesetze der inneren Reibung des Schmiermittels beherrscht werden und hat seine Auffassung durch Theorie und Experiment gestützt. Nimmt man an, daß das Schmiermittel sowohl an dem sich umdrehenden Zapfen wie an der ruhenden Lagerschale haftet und daß der Zapfen im Lager konzentrisch liegt, so kann das Geschwindigkeitsgefälle im Schmiermittel gleich U/δ gesetzt werden, wo U die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens und δ die (als gleichmäßig vorausgesetzte) Dicke der Schmierschicht oder die Differenz zwischen dem Zapfenradius und dem Radius der Lagerschale bedeutet. Nach dem Ansatz (2) wird alsdann das Moment der auf den Zapfen übertragenen Reibung

$$M = \lambda r F \frac{U}{\delta}, \tag{II}$$

wo F die von dem Schmiermittel benetzte Fläche des Zapfenumfanges bedeutet.

Während also nach (I) die Reibungswirkung dem Zapfendrucke P proportional sein soll, soll sie nach (II) von dem Zapfendrucke P und dem damit zusammenhängenden spezifischen Drucke p im Schmiermittel unabhängig sein; während nach (II) die Reibungswirkung der Geschwindigkeit U proportional sein soll, würde sie nach dem Wort-

1) N. Petroff, Neue Theorie der Reibung, deutsch von Wurzel, Hamburg 1887.

laute von (I), sofern man den Reibungskoeffizienten μ als wirkliche Konstante ansehen will, von U unabhängig sein.

Was sagt nun die Erfahrung zu diesen widerstreitenden Ansätzen? Im großen und ganzen hat sich im Betriebe der *langsam* laufenden älteren Dampfmaschinen der Ansatz (I) bewährt: maßgebend für die Größe der Reibungswirkung erwies sich hier die Größe der Belastung P des Zapfens. Dagegen weisen die Erfahrungen bei den neueren schnell umlaufenden, namentlich den elektrischen Maschinen auf ein Verhalten hin, welches sich dem Gesetze (II) nähert: die Reibung nimmt hier innerhalb gewisser Grenzen mit der Geschwindigkeit zu und wird von dem Drucke unabhängig.

Will man diese neueren Erfahrungen im Sinne der Formel (I) deuten, so müßte man sagen: der Reibungskoeffizient μ wächst mit der Umfangsgeschwindigkeit U und ist dem Zapfendrucke P umgekehrt proportional. Es ergibt sich auf diese Weise der eigentümliche Sachverhalt, daß man in den Ausdruck des Reibungsmomentes den Zapfendruck P durch die Formel (I) zunächst einführt, daß man sich aber auf Grund der Erfahrung gezwungen sieht, ihn nachträglich durch geeignete Verfügung über den Reibungskoeffizienten μ wieder aus der Formel herauszuschaffen. Wenngleich sich auf solche Weise Formel (I) mit den Beobachtungen zwar in Einklang bringen läßt, so wird man diese Formel für den Fall hoher Geschwindigkeiten doch kaum als zweckmäßig bezeichnen können. Nichtsdestoweniger ist es in allen später zu nennenden Arbeiten üblich, die Versuchsergebnisse in die Form (I) einzukleiden, also den Reibungskoeffizienten μ in etwas gezwungener Weise als Funktion von Geschwindigkeit und Zapfendruck aufzufassen. Dieser Umstand zeigt recht deutlich, wie ausschließlich die Coulombsche Auffassung der Reibung auf technischem Gebiete herrscht.

Wir werden im folgenden die Formeln (I) und (II) als Gesetze der *trockenen* und der *Flüssigkeitsreibung* unterscheiden und werden dementsprechend sagen können, daß erfahrungsgemäß bei geringer Zapfengeschwindigkeit das Gesetz der trockenen Reibung gilt, während die Erfahrungen bei hoher Zapfengeschwindigkeit besser im Sinne des Gesetzes der Flüssigkeitsreibung gedeutet werden.

Aufgabe der folgenden Untersuchung ist es nun, zu zeigen, daß die von Petroff angebahnte *hydrodynamische Theorie der Schmiermittel* bei folgerichtiger Ausgestaltung den Gegensatz zwischen den Gesetzen der trockenen und Flüssigkeitsreibung aufzulösen vermag, daß nämlich diese Theorie *die Formel* (II) *als Ausdruck des Reibungsmomentes bei hinreichend großer Zapfengeschwindigkeit, die Formel* (I) *als Grenzwert*

desselben Ausdrucks bei hinreichend kleiner Geschwindigkeit liefert. Der in (I) vorkommende Reibungskoeffizient wird sich dabei in bestimmter Weise als eine aus den Abmessungen des Lagers zu berechnende Verhältniszahl ergeben. Die eigentliche und einzige physikalische Konstante wird dagegen im folgenden die Konstante λ der inneren Reibung des Schmiermittels sein.

Unsere Untersuchung wird ferner zeigen, daß es eine bestimmte Geschwindigkeit gibt, bei welcher die Reibungswirkung zu einem *Minimum* wird; unterhalb dieser Geschwindigkeit gilt mit hinreichender Näherung die Formel (I), oberhalb derselben mehr oder minder genau die Formel (II). Die Größe dieser Geschwindigkeit kleinster Zapfenreibung, welche als *Übergangsgeschwindigkeit* bezeichnet werden kann, hängt von der Größe des Zapfendruckes, den Dimensionen des Lagers und der Beschaffenheit des Schmiermittels ab; sie wächst mit wachsendem Zapfendruck und mit zunehmender Dünnflüssigkeit des Schmiermittels. Geschwindigkeiten unterhalb dieser Übergangsgeschwindigkeit können als *kleine* Geschwindigkeiten, Geschwindigkeiten, oberhalb derselben als *große* Geschwindigkeiten bezeichnet werden, wobei die Unterscheidung zwischen kleinen und großen Geschwindigkeiten nach dem eben Gesagten auch von der Größe des Zapfendruckes usw. abhängig ist. Bei den schnell laufenden elektrischen Maschinen befindet man sich stets oberhalb der Übergangsgeschwindigkeit, im Betriebe der Dampfmaschinen wohl meistenteils unterhalb derselben.

Bevor wir die Größe des Reibungsmomentes bestimmen können, werden wir die Lage des Zapfens innerhalb der Lagerschale sowie die Verteilung des hydrodynamischen Druckes längs des Zapfenumfanges festzustellen haben. Was die Lage des Zapfens betrifft, so werden wir finden, daß dieser im allgemeinen exzentrisch in der Lagerschale liegen muß und zwar um so mehr, je kleiner die Geschwindigkeit ist, und daß er sich nur in der Grenze für unendlich große Geschwindigkeit genau zentrieren kann. Dabei zeigt sich, daß die Stelle kürzesten Abstandes zwischen Zapfenumfang und Lagerschale, von der Richtung des Zapfendruckes aus gerechnet, *im Sinne* der Zapfenumdrehung verschoben ist. Überträgt man dagegen das Coulombsche Reibungsgesetz unmittelbar auf den Fall der Lagerreibung, so ergibt sich, daß die Stelle kürzesten Abstandes zwischen Zapfen und Lager von der Richtung des Zapfendruckes aus im *entgegengesetzten Sinne* der Umdrehung abweichen sollte.[1])

Was die Verteilung des hydrodynamischen Druckes über den Zapfen-

1) Vgl. z. B. A. Ritter, Technische Mechanik § 92.



umfang betrifft, so sind in der technischen Literatur zwei Annahmen üblich. Nach der einen (Weisbach) ist der Druck pro Längeneinheit des Zapfenumfanges konstant, nach der anderen (Reye) ist er es pro Längeneinheit der Projektion des Zapfenumfanges auf die zum Zapfendruck senkrechte Richtung. Diese beiden Verteilungsgesetze werden sich hier ebenfalls als Grenzfälle ergeben, das zweite als Grenzfall bei hoher Geschwindigkeit, das erste in gewissem Sinne als Grenzfall bei hinreichend kleiner Geschwindigkeit. Beide Grenzfälle werden bei uns durch eine kontinuierliche Folge von dazwischenliegenden Druckverteilungsgesetzen bei mittleren Geschwindigkeiten ineinander übergeführt.

In jüngster Zeit hat die Frage der Lagerreibung seitens der Beobachter eine erhöhte Aufmerksamkeit erfahren. Erwähnt sei namentlich eine umfassende Arbeit von R. Stribeck[1]), eine Untersuchuug von O. Lasche[2]) für den Fall hoher Umdrehungsgeschwindigkeiten und Aufsätze von G. Dettmar[3]). Zwischen den Beobachtungen von Stribeck und der folgenden Theorie herrscht wenigstens in großen Zügen eine bemerkenswerte Übereinstimmung; diese betrifft namentlich das Vorhandensein eines Minimums der Reibungswirkung oder nach der obigen Bezeichnung das Vorhandensein einer Übergangsgeschwindigkeit und die Abhängigkeit dieses Minimums bez. dieser Übergangsgeschwindigkeit vom Zapfendruck. In anderer Richtung bestehen bedeutende Abweichungen zwischen Theorie und Erfahrung, die noch der Aufklärung bedürfen und die auf empfindliche Lücken unserer Theorie hinweisen.

Die folgende Untersuchung knüpft, was den mathematischen Ansatz des Problems betrifft, an eine wichtige Arbeit von Osborne Reynolds[4]) an; in der Durchführung aber weiche ich von Reynolds ab, indem ich die unübersichtlichen und mühsamen Reihenentwickelungen von Reynolds vermeide und zum Teil durch Integrationen in geschlossener Form, zum Teil durch direkte Zahlenrechnung ersetze. Ich hoffe, auf diese Weise die hydrodynamische Theorie der Lagerreibung wesentlich einfacher und zugänglicher gemacht zu haben.

---

1) Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager. Ztschr. d. Vereins deutscher Ingenieure Bd. 46 (1902) S. 341, abgedruckt in Mitteilungen über Forschungsarbeiten Heft 7. Berlin 1903. (Springer.)

2) Die Reibungsverhältnisse in Lagern mit hoher Umfangsgeschwindigkeit. Ztschr. d. Vereins deutscher Ingenieure Bd. 46 (1902) S. 1881, abgedruckt in Mitteilungen über Forschungsarbeiten Heft 9. Berlin 1903.

3) Neue Versuche über Lagerreibung nebst neuer Berechnungsmethode derselben. Dinglers polyt. Journal Bd. 315 Heft 6 und Elektrot. Ztschr. 1899. S. 203, 380.

4) On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. Beauchamp Towers experiments. Philos. Transactions R. Soc. of London 1886, Part I, abgedruckt in Scientific Papers, Vol. II pag. 228.

Sehr viel enger schließt sich N. Petroff[1]) in einer neueren Arbeit an die Entwickelungen von Reynolds an, die er in einzelnen Punkten verbessert und ergänzt, in der Hauptsache aber ungeändert wiedergibt. Gerade im Vergleich mit dieser Petroffschen Arbeit dürfte die wesentliche Vereinfachung hervortreten, die durch das von mir eingeschlagene Verfahren erzielt wird.

Endlich habe ich noch auf die wertvolle Zusammenstellung der gesamten älteren Literatur (Hirn, Thurston, Tower etc.) hinzuweisen, die N. Masi[2]) gibt, sowie auch auf die eigenen theoretischen und experimentellen Ergebnisse dieses Forschers.

In dem nächstfolgenden § 2 werden wir die Grundlagen der hydrodynamischen Reibungstheorie auf möglichst elementarem und anschaulichem Wege darlegen. In § 3 gelangen wir von den hydrodynamischen Differentialgleichungen aus in etwas strengerer Weise zu denselben Ergebnissen; da dieser Paragraph somit nur der Methode, nicht dem Inhalte nach über § 2 hinausgeht, kann er bei der ersten Orientierung überschlagen werden. In § 4 wird die Lage des Zapfens in der Lagerschale auf Grund der gewöhnlichen mechanischen Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. § 5 bringt die Hauptresultate der Theorie, die im Vorstehenden bereits teilweise angedeutet sind, und vergleicht die Theorie mit der Erfahrung. In § 6 wird die Verteilung des hydrodynamischen Druckes im Schmiermittel untersucht. Bei alledem wird vorausgesetzt, daß der Zapfen ringsum vom Schmiermittel umschlossen ist. Dem gegenüber behandeln wir in § 7 anhangweise den Fall einer halbumschließenden Lagerschale, für den die Rechnung unverhältnismäßig komplizierter wird, die Ergebnisse der Rechnung aber nicht weit von dem vorher behandelten einfacheren Falle abweichen. Die Schlußbemerkungen in § 8 beziehen sich auf die beiden genannten Fälle; insbesondere teilen wir hier eine kleine statistische Erhebung über die halbumschließenden Lager der Eisenbahnachsen mit.

§ 2. Aufstellung des hydrodynamischen Problems in einfachster Form.

Wir beginnen damit, die hydrodynamischen Grundgleichungen, soweit wir sie nötig haben werden, möglichst im Anschluß an die in der Technik geläufigen Vorstellungen zu entwickeln und gehen dabei schrittweise vor.

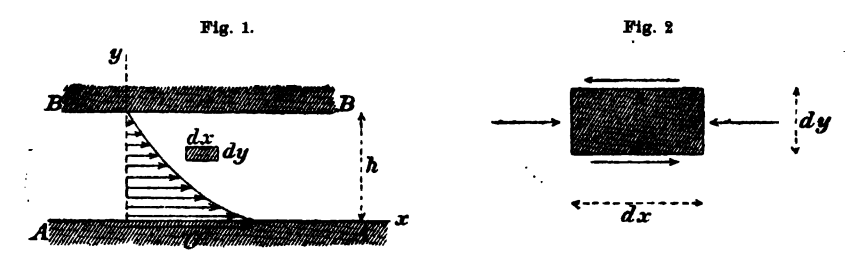
1) Frottement dans les machines, Mémoires de l'Académie de St. Petersburg, (8) Bd. 10 Nr. 4 (1890).

2) Le Nuove Vedute nelle Ricerche teoriche ed esperimentali sull' attrito und Esperienze d' attrito, Bologna 1897, bei Zanichelli.



1. Wir betrachten eine Flüssigkeitsschicht (Schmierschicht) von der Dicke h zwischen zwei ebenen parallelen Wänden A und B. B sei in Ruhe, A werde mit der konstanten Geschwindigkeit U bewegt. Die Flüssigkeit hafte an beiden Wänden. Parallel zu U messen wir eine Koordinate x,

Fig. 1. Fig. 2



senkrecht dazu eine Koordinate y. Die Strömung finde parallel zu U statt; ihre Geschwindigkeit sei u; u ist von x unabhängig, also nur Funktion von y. Auf ein Teilchen $dx\,dy$, welches senkrecht zur Zeichenebene die Erstreckung 1 haben möge, wirken in der x-Richtung folgende Kräfte (vgl. Fig. 1 und die in vergrößertem Maßstabe gezeichnete Fig. 2):

a) Der hydrodynamische Druck p beträgt für die Seitenflächen 1 und 2

$$p\,dy \quad \text{bez.} \quad -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\,dx\right)dy;$$

der Drucküberschuß in der x-Richtung wird daher

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy.$$

b) Die Flüssigkeitsreibung, die wir nach Gl. (2) des vorigen § anzusetzen haben, wird für die Seitenflächen 3 und 4

$$-\lambda\frac{du}{dy}\,dx \quad \text{bez.} \quad +\lambda\left(\frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dy^2}\,dy\right)dx\,[1];$$

die gesamte Reibungswirkung in der x-Richtung wird daher

$$\lambda\frac{d^2u}{dy^2}\,dx\,dy.$$

Die Strömung ist stationär; Beschleunigungen sind nach der Art der vorliegenden Frage ausgeschlossen. Es muß daher die Summe der unter a) und b) bezeichneten Kräfte verschwinden. Somit gilt

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{3}$$

Da unser Flüssigkeitsteilchen auch in der y-Richtung keine Beschleunigung erfährt, muß die Summe der Kräfte nach dieser Richtung

1) Bei dem Vergleich der Vorzeichen dieser Ausdrücke mit den Pfeilrichtungen in Fig. 2 ist zu beachten, daß, wie Fig. 1 zeigt, u mit wachsendem y abnimmt, du/dy also negativ ist.

ebenfalls verschwinden; diese Kräfte bestimmen sich aus der auf die Seitenflächen 1 und 2 übertragenen Reibung und dem auf 3 und 4 wirkenden Druck. Die genannte Reibung ist aber Null; mithin führt die Gleichgewichtsbedingung für die y-Richtung, wenn wir von der Änderung des Druckes durch die Schwere absehen, einfach auf

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Der Druck p ist also von y unabhängig, so daß wir statt $\partial p/\partial x$ lieber dp/dx schreiben wollen. Wir bestimmen jetzt u aus Gl. (3) durch Integration nach y; hierbei ist nach dem eben Gesagten dp/dx als Konstante zu behandeln. Es ergibt sich

$$u = \frac{1}{2\lambda}\frac{dp}{dx}y^2 + ay + b,$$

wo a und b Integrationskonstante sind. Zur Berechnung derselben haben wir die Grenzbedingungen, *daß die Flüssigkeit an den beiden Wänden haften soll*, daß also sein muß:

$$u = U \quad \text{für} \quad y = 0,$$
$$u = 0 \quad \text{„} \quad y = h.$$

Hieraus folgt

$$b = U, \quad a = -\frac{1}{2\lambda}\frac{dp}{dx}h - \frac{U}{h}$$

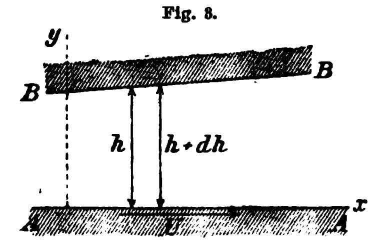
und

$$(4) \qquad u = U\left(1 - \frac{y}{h}\right) - \frac{1}{2\lambda}\frac{dp}{dx}yh\left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

Die hierdurch bestimmte Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit u über den Querschnitt h unserer Flüssigkeitsschicht ist in Fig. 1 schematisch dargestellt.

2. Statt der parallelen Wände A und B betrachten wir zwei wenig gegeneinander geneigte Wände (Fig. 3). Die Koordinaten x und y werden parallel und senkrecht zu A gemessen. Wir nehmen auch jetzt an, daß die Strömung lediglich in der x-Richtung erfolgt, d. h. wir vernachlässigen ihre y-Komponente und setzen voraus, daß die oben gefundene Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit auch jetzt gültig bleibt; letzteres kommt darauf hinaus, daß wir die Trägheit der Flüssigkeit im Verhältnis zu den Reibungswirkungen vernachlässigen.

Fig. 3.



Bei den gegen einander geneigten Begrenzungen der Flüssigkeit muß das einzelne Flüssigkeitsteilchen allerdings beschleunigt werden; ein

Teil des zur Verfügung stehenden Drucküberschusses wird daher jetzt zur Erzeugung dieser Beschleunigung oder zur Überwindung der Trägheit verbraucht. Statt der Gleichgewichtsbedingungen zwischen Druck und Reibung sollten daher jetzt genau genommen die Beschleunigungsgleichungen für das Teilchen angesetzt werden. Diese stimmen mit den früheren Gleichgewichtsbedingungen nur dann überein, wenn wir die Trägheit vernachlässigen, was gestattet sein wird, wenn die Beschleunigungen hinreichend klein sind, also z. B. im Falle wenig geneigter Wände oder starker Zähigkeit des Schmiermittels. In diesem Falle gilt die aus den Gleichgewichtsbedingungen gefundene Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit hinreichend genau auch für die jetzt zu betrachtende wenig beschleunigte Bewegung.

Wir werden unsere Flüssigkeit als *inkompressibel* voraussetzen; dann muß die durch verschiedene Querschnitte in der Zeiteinheit geförderte Flüssigkeitsmenge dieselbe sein. Die Flüssigkeitsmenge beträgt nach (4):

$$Q = \int_0^h u\,dy = U\frac{h}{2} - \frac{dp}{dx}\frac{h^3}{12\lambda}. \tag{5}$$

Betrachten wir insbesondere zwei benachbarte, um dx voneinander abstehende Querschnitte h und $h + dh$, so wird $dQ/dx = 0$. Dies führt nach (5) auf die Gleichung

$$U\frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dx}\frac{h^3}{6\lambda}\right);$$

dieselbe läßt sich unmittelbar integrieren und liefert, wenn wir unter h_0 eine Integrationskonstante verstehen:

$$U(h - h_0) = \frac{dp}{dx}\frac{h^3}{6\lambda}.$$

Wir berechnen daraus

$$\frac{dp}{dx} = 6\lambda U\frac{h - h_0}{h^3}. \tag{6}$$

Während bei der unter 1 betrachteten stationären Strömung das Druckgefälle konstant sein muß, wird es jetzt, nach Maßgabe der veränderlichen Schichtdicke h, eine Funktion von x.

Wir berechnen noch die von der Flüssigkeit auf die Längeneinheit der Wandung A übertragene Reibung q. Diese beträgt nach dem Ansatz (2) und der Gl. (4) für $y = 0$:

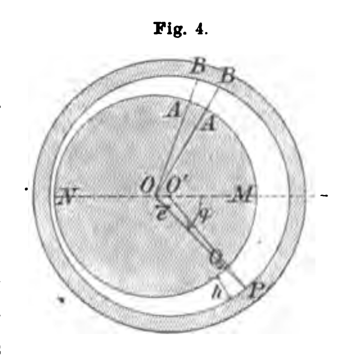
$$q = \lambda\frac{du}{dy} = -\frac{\lambda U}{h} - \frac{dp}{dx}\frac{h}{2},$$

also mit Rücksicht auf (6):

$$q = -\lambda U\frac{4h - 3h_0}{h^2}. \tag{7}$$

3. Wir gehen jetzt zu dem Fall eines in einer Lagerschale sich umdrehenden Zapfens über. Die Oberfläche des Zapfens und die innere Grenzfläche der Lagerschale werden als Kreiszylinder vorausgesetzt. Wir betrachten einen Querschnitt durch Zapfen und Lagerschale (Fig. 4) und nehmen an, daß die Strömung des Schmiermittels lediglich in der Ebene des einzelnen Querschnittes erfolgt. U sei die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens. Der Allgemeinheit wegen zeichnen wir den Zapfen exzentrisch; e sei der Abstand des Zapfenmittelpunktes O vom Mittelpunkt der Lagerschale O' oder die „Exzentrizität". Die Richtung OO', in der der Zapfen aus der zentrischen Lage verschoben ist, kann beliebig gewählt werden, solange über die Richtung des Zapfendruckes P noch nichts ausgesagt ist; wir wählen für OO' aus Gründen, die später darzulegen sind, die horizontale Richtung.

Fig. 4.



Auf der Geraden OO' befindet sich die Stelle größter und kleinster Schmierschichtdicke M und N. Um O herum zählen wir im Sinne der Umdrehung des Zapfens von dem Radius OM aus einen Winkel φ. r sei der Radius des Zapfens, R der der Lagerschale, so daß z. B. $OQ = r$, $O'P = R$ ist. $R - r$ werde gleich δ gesetzt. Wir bestimmen die Dicke der Schmierschicht als Funktion von φ und betrachten zu dem Zwecke den Linienzug $OO'PQO$. Die Projektion von $OO'P$ auf OPQ ist einerseits gleich $r + h$, andererseits gleich $e \cos\varphi + R$, wobei der Winkel bei P als kleiner Winkel behandelt, sein Kosinus also gleich 1 gesetzt ist. Man hat also

$$r + h = e\cos\varphi + R$$

oder

$$h = \delta + e\cos\varphi. \tag{8}$$

Hieraus folgt insbesondere als größte und kleinste Schichtdicke bei M und N

$$\text{für } \varphi = 0 \ldots h_{\max} = \delta + e, \quad \text{für } \varphi = \pi \ldots h_{\min} = \delta - e.$$

Um nun die Betrachtungen unter 2 auf den Fall unserer Schmierschicht anwenden zu können, ziehen wir von O aus zwei benachbarte Radien OAB (vgl. Fig. 4). Die zwischen AA und BB enthaltene Schicht kann, da die Schichtdicke h außerordentlich klein gegen die Krümmungsradien r und R von AA und BB ist, annähernd als geradlinig begrenzt angesehen werden. Zählen wir die Variable x wie früher

in der Richtung von AA, so wird $dx = r\,d\varphi$, und es ergibt sich nach (6)

$$\frac{dp}{d\varphi} = 6\lambda r U \frac{h - h_0}{h^3}. \tag{9}$$

Mit Rücksicht auf (8) ist also das Druckgefälle $dp/d\varphi$ eine bekannte Funktion von φ, in die nur die noch nicht bestimmte Integrationskonstante h_0 eingeht.

Die Bedeutung dieser Integrationskonstanten geht unmittelbar aus (9) hervor: h_0 bedeutet die Schichtdicke, für welche $dp/d\varphi = 0$ wird, also die Dicke an denjenigen Stellen des Zapfenumfanges, wo p seinen größten oder kleinsten Wert annimmt.

Ich werde jetzt voraussetzen, *daß das Schmiermittel den ganzen Zwischenraum zwischen Zapfen und Lagerschale allseitig ausfüllt.* Diese Voraussetzung ist für die Einfachheit der folgenden Rechnungen entscheidend und muß daher an erster Stelle behandelt werden. Ob sie der Wirklichkeit entspricht, wird später (§ 6) zu überlegen sein.

Wenn die Schmierschicht ununterbrochen und in sich zurücklaufend ist, so muß p eine stetige, in sich zurücklaufende Funktion des Winkels φ werden. Es gilt daher

$$p(\varphi + 2\pi) = p(\varphi)$$

und speziell

$$p(2\pi) = p(0). \tag{10}$$

Diese Bedingung soll uns zur Bestimmung der Integrationskonstanten h_0 dienen. Wir integrieren (9) nach φ von 0 bis 2π und erhalten

$$p(2\pi) - p(0) = 6\lambda r U \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2} - h_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^3} \right\},$$

also wegen (8) und (10)

$$h_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\delta + e\cos\varphi)^3} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\delta + e\cos\varphi)^2}. \tag{11}$$

Es ist bequem, die Verhältniszahl

$$\alpha = \frac{\delta}{e}, \quad 1 \leqq \alpha \leqq \infty \tag{12}$$

einzuführen; bei genau zentrischer Lage des Zapfens im Lager wird $e = 0$ und $\alpha = \infty$; bei möglichst exzentrischer Lage, d. h. wenn der Zapfen mit einer Stelle seines Umfanges unmittelbar an die Lager-



schale anstößt, wird andrerseits $e = \delta$ und $\alpha = 1$. Benutzen wir noch die Abkürzungen:

$$(13)\qquad J_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\alpha + \cos\varphi}, \quad J_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\alpha + \cos\varphi)^2}, \quad J_3 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\alpha + \cos\varphi)^3},$$

so schreibt sich Gl. (11) wie folgt:

$$(14)\qquad \frac{h_0}{e} = \frac{J_2}{J_3}.$$

Um die Werte von J_1, J_2, J_3 anzugeben, bemerken wir, daß ersichtlich

$$(15)\qquad J_2 = -\frac{dJ_1}{d\alpha}, \quad J_3 = -\frac{1}{2}\frac{dJ_2}{d\alpha};$$

ferner überzeugen wir uns durch Differenzieren von der Richtigkeit der folgenden (bekannten) Integralformel, bei welcher $\alpha > 1$ vorausgesetzt wird:

$$(16)\qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\alpha + \cos\varphi} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right).$$

Ersetzen wir in (16) die obere Grenze des Integrals durch 2π, so ergibt sich der Wert von J_1; nach (15) folgen zugleich die Werte J_2 und J_3. Man findet so:

$$(17)\qquad J_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}, \quad J_2 = \frac{2\pi\alpha}{(\sqrt{\alpha^2 - 1})^3}, \quad J_3 = \pi\frac{2\alpha^2 + 1}{(\sqrt{\alpha^2 - 1})^5}.$$

Nach (14) schließen wir hieraus, daß

$$(18)\qquad \frac{h_0}{e} = \frac{2\alpha(\alpha^2 - 1)}{2\alpha^2 + 1}.$$

Schreiben wir nach Analogie von (8)

$$(18')\qquad h_0 = \delta + e\cos\varphi_0, \quad \frac{h_0}{e} = \alpha + \cos\varphi_0,$$

so ergibt sich zur Bestimmung der Stellen größten oder kleinsten Druckes die Gleichung:

$$(19)\qquad \cos\varphi_0 = -\frac{3\alpha}{2\alpha^2 + 1}.$$

Die genannten Stellen liegen also bei verschwindender Exzentrizität ($\alpha = \infty$) einander diametral gegenüber, indem $\varphi_0 = \pm\pi/2$ wird, bei größtmöglicher Exzentrizität ($\alpha = 1$) fallen sie unter sich und mit der alsdann vorhandenen Stelle unmittelbarer Berührung zwischen Zapfen und Lager $\varphi_0 = \pm\pi$ zusammen.

Nachdem somit die Konstante h_0 bez. der Winkel φ_0 als Funktion von α bekannt ist, ist auch das Druckgefälle durch Gl. (9) in völlig bestimmter Form gegeben, sobald die Lage des Zapfens innerhalb der Lagerschale, d. h. sobald die Exzentrizität e dieser Lage oder die Verhältniszahl α gefunden ist. Das Gleiche gilt von der Reibung q pro Längeneinheit des Zapfenumfanges, deren Wert wir unmittelbar aus der früheren Gl. (7) entnehmen können.

§ 3. Strenger Ansatz des Problems auf Grund der hydrodynamischen Differentialgleichungen.

Obgleich die vorhergehenden anschaulichen Betrachtungen für unsere Zwecke im wesentlichen ausreichen, wird es doch gut sein, die Fragestellung noch einmal strenger zu formulieren. Wir werden dabei die Vernachlässigungen, welche dem bisherigen Ansatz zugrunde liegen, deutlicher als bisher hervortreten lassen und die Ergebnisse des vorigen § bestätigen.

Zunächst ergänzen wir den in Gl. (2) enthaltenen Ansatz für die innere Reibung der Flüssigkeiten. Wir setzen hierbei abermals Inkompressibilität voraus und betrachten einen Strömungszustand, bei dem die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ irgendwie von Ort zu Ort wechselt. Die rechtwinkligen Komponenten der Geschwindigkeit seien u, v, w. Die durch die Flächeneinheit übertragene Reibung heiße q; durch einen dem q angehängten ersten Index deuten wir wie üblich die Normale der Fläche, durch einen zweiten die Richtung an, in welcher die Reibung wirkt. Nach Navier und Poisson haben wir dann zu setzen:

$$q_{xx} = 2\lambda \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q_{xy} = \lambda\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad q_{xz} = \lambda\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right); \tag{20}$$

die entsprechende Bedeutung mögen

$$q_{yx} = q_{xy}, \quad q_{yy}, \quad q_{yz} = q_{zy}, \quad q_{zz}$$

haben.

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen werden wir die Trägheit der Flüssigkeit und die Wirkung äußerer Kräfte (z. B. der Schwere) vernachlässigen. Beide Vernachlässigungen sind offenbar im Falle der Schmiermittelbewegung in hohem Grade gerechtfertigt. Unsere Bewegungsgleichungen haben dann nur auszudrücken, daß sich der hydrodynamische Druck p mit der Reibung q an jedem Volumelemente das Gleichgewicht hält. Dies verlangt für die x-Richtung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial q_{zx}}{\partial z}$$

oder wegen (20)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Wegen der vorausgesetzten Inkompressibilität schreiben wir mit Benutzung des üblichen Symbols $\triangle$ und Hinzufügung der entsprechenden Gleichungen für die y- und z-Richtung:

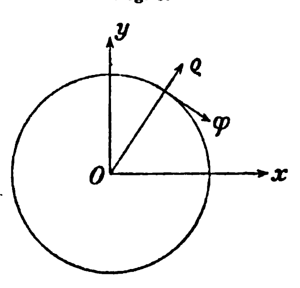
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \lambda \triangle u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \lambda \triangle v, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \lambda \triangle w. \tag{21}$$

Dazu kommt die Inkompressibilitätsbedingung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{22}$$

Wir spezialisieren nun diese Gleichungen auf den Fall der Fig. 5, legen die z-Achse in die Mittellinie des Zapfens und nehmen an, daß die Bewegung des Schmiermittels lediglich in der xy-Ebene erfolge und von der z-Koordinate unabhängig sei. Dann können wir statt (22) schreiben:

Fig. 5.



$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Den gemeinsamen Wert der rechten und linken Seite dieser Gleichung bezeichnen wir mit $\partial^2 V/\partial x \partial y$, unter V eine unbekannte Funktion der Koordinaten verstanden, und erhalten

$$u = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{23}$$

Setzen wir in (21) ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \lambda \frac{\partial}{\partial y} \triangle V, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \triangle V. \tag{24}$$

Die Elimination von p liefert eine Bedingung für V, nämlich

$$\triangle\triangle V = 0. \tag{25}$$

Es handelt sich also darum, die Gl. (25) in dem Gebiete zwischen zwei im allgemeinen nicht konzentrischen Kreisen zu integrieren.

Zu dem Ende führen wir statt x und y Polarkoordinaten ϱ und φ ein, wobei $\varrho = 0$ mit dem Zapfenmittelpunkte zusammenfalle. Wir bestimmen die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ nach den neuen Koordinaten. Sind s und n zwei zu einander senkrechte Richtungen, welche in demselben Sinne aufeinander folgen, wie die x- und y-

Richtung, so lassen sich die *beiden* Gleichungen (23) in die eine Formel zusammenfassen

(26) $$\mathfrak{v}_s = \frac{\partial V}{\partial n},$$

wo $\mathfrak{v}_s$ die Komponente von $\mathfrak{v}$ in der Richtung von s bedeutet. Diese Schreibweise gestattet sofort die Übertragung auf Polarkoordinaten. Wird φ im Uhrzeigersinne gerechnet und haben die x- und y-Richtung die in Fig. 5 bezeichnete Lage, so liegt die Richtung von φ zur Richtung der wachsenden ϱ und die Richtung der wachsenden ϱ zur Richtung von $-\varphi$ ebenso wie die x- zur y-Richtung. Nehmen wir also einmal $\partial n = \partial \varrho$, das andere Mal $\partial n = \varrho \partial \varphi$, so ergibt sich nach (26)

(27) $$\mathfrak{v}_\varphi = \frac{\partial V}{\partial \varrho}, \quad \mathfrak{v}_\varrho = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

In demselben Sinne lassen sich die *beiden* Formeln (24) in die eine Gleichung zusammenfassen:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \lambda \frac{\partial}{\partial n} \triangle V;$$

geht man speziell zu den aufeinander senkrechten Richtungen unserer Polarkoordinaten ϱ und φ über, so ergibt sich

(28) $$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \lambda \frac{\partial}{\partial \varrho} \triangle V, \quad \frac{\partial p}{\partial \varrho} = -\frac{\lambda}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \triangle V.$$

Bekanntlich lautet der Ausdruck von $\triangle V$ in Polarkoordinaten folgendermaßen:

$$\triangle V = \left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) V = \frac{1}{\varrho^2}\left(\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho}\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) V.$$

Unsere Differentialgleichung für V nimmt daher die folgende Form an:

(29) $$\frac{1}{\varrho^2}\left(\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho}\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\frac{1}{\varrho^2}\left(\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho}\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) V = 0.$$

Zur Festlegung der Funktion V sind ferner die Bedingungen an der Oberfläche des Zapfens und der Lagerschale erforderlich. Diese besagen, daß die Flüssigkeit an diesen Oberflächen haften, mithin ihre Bewegung mitmachen soll. An der Zapfenoberfläche ist, wenn U die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens bedeutet:

$$\mathfrak{v}_\varphi = U, \quad \mathfrak{v}_\varrho = 0,$$

also nach (27)

(30) $$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = U, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \ \ldots \text{ für } \varrho = r.$$

Bedeutet wiederum h die längs des Zapfenumfanges veränderliche Dicke der Schmierschicht, so ist an der Grenze der Lagerschale $\varrho = r + h$; da die Lagerschale in Ruhe ist, gilt hier

$$\mathfrak{v}_\varphi = 0, \quad \mathfrak{v}_\varrho = 0,$$

oder nach (27)

(30′)
$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \dots \text{für } \varrho = r + h.$$

Wir drücken noch die auf den Zapfenumfang pro Längeneinheit desselben wirkende Reibung durch unsere Funktion V aus. Die Normale zur Zapfenoberfläche ist die Richtung der wachsenden ϱ. Im Anschluß an die Gl. (20) können wir setzen:

$$q_{\varrho\varrho} = 2\lambda \frac{\partial \mathfrak{v}_\varrho}{\partial \varrho}, \quad q_{\varrho\varphi} = \lambda\left(\frac{\partial \mathfrak{v}_\varphi}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \mathfrak{v}_\varrho}{\partial \varphi}\right).$$

Dies bedeutet nach (27):

$$q_{\varrho\varrho} = -2\lambda\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho \partial \varphi} - \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right), \quad q_{\varrho\varphi} = \lambda\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right).$$

Auf der Oberfläche des Zapfens gelten aber die Grenzbedingungen (30) für jeden Wert von φ, sowie die daraus folgenden Bedingungen $\partial^2 V/\partial \varrho \partial \varphi = \partial U/\partial \varphi = 0$ und $\partial^2 V/\partial \varphi^2 = 0$. Unsere Ausdrücke für die auf den Zapfen übertragenen Reibungswirkungen vereinfachen sich daher wie folgt:

(31)
$$q_{\varrho\varrho} = 0, \quad q_{\varrho\varphi} = \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} \dots \text{für } \varrho = r.$$

Durch die Differentialgleichung (29) und die Grenzbedingungen (30) ist die zu bestimmende Funktion V festgelegt. Die Gleichungen (28) und (31) geben gleichzeitig an, wie wir nach Bestimmung der Funktion V die uns interessierende Verteilung des hydrodynamischen Druckes und die Reibung auf den Zapfen finden können.

Man kann bemerken, daß das in den Gleichungen (29) und (30) enthaltene Integrationsproblem übereinstimmt mit der Frage nach der Gleichgewichtsform einer ursprünglich ebenen, elastischen Platte, welche die Gestalt des in Fig. 4 dargestellten nicht-schraffierten Gebietes hat und welche an ihrer inneren Berandung in gewisser Weise aufgewölbt ist. Fassen wir nämlich V als die transversale Verrückung eines Punktes der sog. neutralen Schicht einer ursprünglich ebenen, horizontalen, elastischen Platte auf, so gibt die Gleichung $\triangle\triangle V = 0$ die Bedingung dafür an, daß die Platte sich im kräftefreien Gleichgewicht befinde. Die Grenzbedingungen (30) ferner sagen aus, wie die Neigung der Platte an ihren Rändern durch eine geeignete Art der Einklemmung zu bestimmen ist. Diese Neigung ist nach (30′) am äußeren Rande horizontal, am

inneren Rande hat die Tangente des Neigungswinkels der Platte nach (30) in radialer Richtung den konstanten Wert U.

Wir erwähnen diese elastische Analogie unseres hydrodynamischen Problems, um dadurch den Grad seiner mathematischen Schwierigkeit zu kennzeichnen. Während nämlich die Gleichgewichtsform einer kreisförmigen Platte wohlbekannt ist, ist die Frage für eine exzentrisch kreisringförmige Platte niemals behandelt worden. Die strenge Integration dürfte zu sehr unübersichtlichen Ausdrücken führen. Wir begnügen uns daher mit einer angenäherten Integration, welche mit Rücksicht auf die Schmalheit des für uns in Betracht kommenden Integrationsgebietes völlig ausreicht.

In unserem Falle ist die Funktion V in radialer Richtung rapide veränderlich; nimmt doch ihr Gefälle in dem schmalen Zwischenraum h von U auf 0 ab. Im Verhältnis dazu ist V in der dazu senkrechten, zum Zapfenumfang parallelen Richtung nur sehr langsam veränderlich. Wir werden daher in erster Näherung $\partial V/\partial\varphi$ gegen $\partial V/\partial\varrho$ vernachlässigen und V lediglich als Funktion von ϱ bestimmen. In zweiter Näherung haben wir dann zu berücksichtigen, daß die in dieser Funktion auftretenden Koeffizienten nicht wirkliche Konstante sind, sondern daß sie, wenn auch nicht in rapider Weise, mit φ veränderlich sind.

Unsere Gl. (29) schreiben wir dementsprechend näherungsweise folgendermaßen:

$$\triangle\triangle V = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\varrho\frac{\partial V}{\partial\varrho} = 0. \tag{32}$$

Durch zweimalige Integration ergibt sich

$$\triangle V = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\varrho\frac{\partial V}{\partial\varrho} = 2a\log\varrho + b, \tag{32'}$$

wo a und b Integrationskonstanten. Durch abermalige Integration folgt:

$$\frac{\partial V}{\partial\varrho} = a\varrho\log\varrho + (b-a)\frac{\varrho}{2} + \frac{c}{\varrho}, \tag{33}$$

wo c eine weitere Integrationskonstante. V selbst kann mit Benutzung einer letzten Integrationskonstanten d folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$V = \frac{a}{2}\varrho^2\log\varrho + (b-2a)\frac{\varrho^2}{4} + c\log\varrho + d. \tag{34}$$

Zur Bestimmung der a, b, c, d dienen die Grenzbedingungen (30) und (30'). Indem wir den auf dem Zapfenumfange konstanten Wert von V mit V_0 bezeichnen, schreiben wir statt (30)

$$\frac{\partial V_0}{\partial\varphi} = 0, \quad \frac{\partial V_0}{\partial\varrho} = U. \tag{35}$$

Ferner entwickeln wir die in (30′) vorkommenden, für die Grenze der Lagerschale zu bildenden Differentialquotienten nach Potenzen der kleinen Größe h, wobei wir die dritten Ableitungen von V_0 nach ϱ noch beibehalten. Es wird für $\varrho = r + h$:

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = \frac{\partial V_0}{\partial \varrho} + h \cdot \frac{\partial^2 V_0}{\partial \varrho^2} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^3 V_0}{\partial \varrho^3},$$
$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(V_0 + h \cdot \frac{\partial V_0}{\partial \varrho} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 V_0}{\partial \varrho^2} + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 V_0}{\partial \varrho^3}\right).$$

Mit Rücksicht auf (35) verlangen also die Gleichungen (30′):

$$U + h\frac{\partial^2 V_0}{\partial \varrho^2} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^3 V_0}{\partial \varrho^3} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(hU + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 V_0}{\partial \varrho^2} + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 V_0}{\partial \varrho^3}\right) = 0.$$

Die zweite Gleichung läßt sich nach φ integrieren, wobei die Integrationskonstante mit $h_0 U/2$ bezeichnet werden möge. Darauf nehmen die beiden vorstehenden Gleichungen die Form an:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \varrho^2} + \frac{h}{2}\frac{\partial^3 V_0}{\partial \varrho^3} = -\frac{U}{h},$$
$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \varrho^2} + \frac{h}{3}\frac{\partial^3 V_0}{\partial \varrho^3} = -\frac{2h - h_0}{h^2}U.$$

Hieraus findet man durch geeignete Subtraktion:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \varrho^2} = -\frac{4h - 3h_0}{h^2}U, \quad \frac{\partial^3 V_0}{\partial \varrho^3} = 6\frac{h - h_0}{h^3}U. \tag{36}$$

In diese Gleichungen (36) und die zweite der Gleichungen (35) ist jetzt der Wert von $\partial V/\partial \varrho$ aus (33) sowie die daraus folgenden höheren Abteilungen von V einzutragen, nachdem man in denselben $\varrho = r$ gemacht hat. Es ergeben sich so die folgenden drei Bestimmungsgleichungen für die a, b, c:

$$\left\{\begin{aligned} &ar\log r + (b-a)\frac{r}{2} + \frac{c}{r} = U,\\ &ar\log r + (b+a)\frac{r}{2} - \frac{c}{r} = -\frac{4h-3h_0}{h^2}rU,\\ &\qquad\qquad a + \frac{2c}{r^2} = 6\frac{h-h_0}{h^3}rU. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen folgt durch Subtraktion und Addition:

$$a - \frac{2c}{r^2} = -\frac{4h-3h_0}{h^2}U - \frac{U}{r},$$
$$2a\log r + b = -\frac{4h-3h_0}{h^2}U + \frac{U}{r}.$$

Nimmt man noch die letzte Gleichung (37) hinzu, so lassen sich die Werte von a, b, c unmittelbar ausrechnen. Es ergibt sich

$$(38)\quad \begin{cases} 2a = 6\dfrac{h-h_0}{h^3} r U - \dfrac{4h-3h_0}{h^2} U - \dfrac{U}{r}, \\ \dfrac{4c}{r^2} = 6\dfrac{h-h_0}{h^3} r U + \dfrac{4h-3h_0}{h^2} U + \dfrac{U}{r}, \\ b = -6\dfrac{h-h_0}{h^3} r \log r\, U - \dfrac{4h-3h_0}{h^2}(1-\log r) U + \dfrac{U}{r}(1-\log r). \end{cases}$$

Der Wert von d drückt sich seinerseits durch den auf dem Zapfenumfange konstanten Wert von V_0 aus, bleibt aber ebenso wie dieser zufolge unserer Grenzbedingungen unbestimmt. Wir bemerken noch, daß wegen der Abhängigkeit der Schichtdicke h von φ (vgl. Gl. (8)) unsere ursprünglich als konstant vorausgesetzten Koeffizienten a, b, c sich tatsächlich als Funktionen von φ ergeben haben. In diesem Umstande kommt zum Ausdruck, daß unsere Integration keine strenge, sondern nur eine genäherte war, und daß durch den gefundenen Wert von V nur die genäherte Differentialgleichung (32), aber nicht die strenge Gleichung (29) erfüllt wird.

Wir geben nun die uns interessierenden Ausdrücke für das Druckgefälle und die Reibungswirkung an der Zapfenoberfläche an. Nach (28), (32') und (38) haben wir

$$(39)\qquad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 2a\lambda = 6\lambda r U\frac{h-h_0}{h^3} - \lambda U\frac{4h-3h_0}{h^2} - \lambda\frac{U}{r}.$$

Dieses Druckgefälle, welches von ϱ unabhängig ist, gilt insbesondere auch für den Umfang des Zapfens. Die Reibung auf den Zapfen reduziert sich nach (31) auf die in die Umfangsrichtung fallende Komponente $q_{\varrho\varphi}$, die wir wieder kürzer mit q bezeichnen. Nach (31) und (36) haben wir

$$(40)\qquad q = -\lambda U\frac{4h-3h_0}{h^2}.$$

Somit sind wir fast genau auf diejenigen Werte von q und $dp/d\varphi$ zurückgeführt worden, die im vorigen § durch eine mehr elementare Betrachtung abgeleitet wurden. Gl. (40) stimmt genau mit Gl. (7) überein, Gl. (39) unterscheidet sich von Gl. (9) nur durch Glieder, welche gegen das beiden Gl. gemeinsame Glied klein von der Ordnung h/r oder gar h^2/r^2 sind. Dementsprechend wird auch der Wert von h_0, den wir unter Voraussetzung einer den Zwischenraum zwischen Zapfen und Lager völlig ausfüllenden Schmierschicht aus (39) berechnen, nicht merklich von demjenigen verschieden, den wir oben aus (9) fanden.

Der relative Unterschied beider Werte wird klein von der Ordnung δ/r und kann unter allen Umständen vernachlässigt werden.

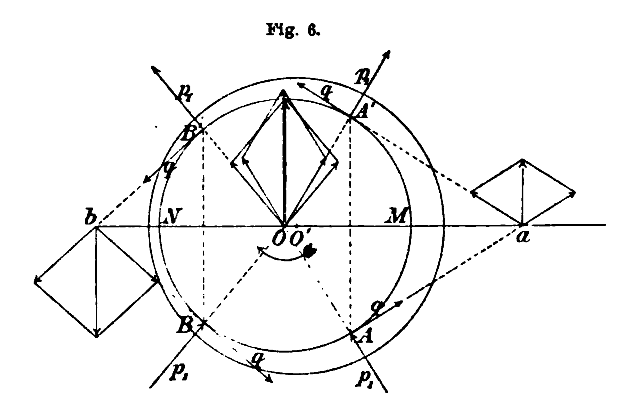
Unsere jetzige Betrachtung hat also die früheren Ergebnisse durchaus bestätigt und rechtfertigt somit nachträglich die im vorigen § angewandten, etwas groben Näherungen.

§ 4. Die Lage des Zapfens innerhalb der Lagerschale. Bestimmung der Exzentrizität der Lage.

Wir haben jetzt zu untersuchen, welche Lage der Zapfen innerhalb des ihm nach der Lagerkonstruktion verbleibenden Spielraums bei gegebener Belastung und gegebener Geschwindigkeit annehmen wird. Statt dessen können wir auch so vorgehen, daß wir uns *die Lage und Geschwindigkeit des Zapfens gegeben denken und nach derjenigen Belastung fragen, für welche die fragliche Lage eine Gleichgewichtslage wird.*

Wir nehmen also (Fig. 6) die Größe $O'O$ (gleich e) und die Richtung von $O'O$ (z. B. horizontal) in bestimmter Weise an, wodurch gleichzeitig die Verhältniszahl $\alpha = \delta/e$ gegeben ist. Ferner geben wir uns die Umfangsgeschwindigkeit U des Zapfens. Wir bestimmen die von dem Schmiermittel auf den Zapfen übertragenen Kräfte und setzen sie zu einer Resultierenden zusammen. Entgegengesetzt gleich muß nach den Regeln der Statik die Resultierende der übrigen Kräfte sein, welche auf den Zapfen vermöge seines Zusammenhanges mit den sonstigen Teilen der Maschine wirken (des Zapfendruckes, der Triebkraft), wenn anders sich der Zapfen bei *gleichförmiger* Umdrehung im Gleichgewicht befinden soll.

Fig. 6.



Die von dem Schmiermittel auf den Zapfen übertragenen Wirkungen bestehen aus dem Drucke p und der Reibung q; der erstere ist radial, die letztere tangential gerichtet.

Nach Gl. (9) ebenso wie nach Gl. (39) ist das Druckgefälle eine rationale Funktion der Schmierschichtdicke h und daher (vgl. Fig. 6 oder Gl. (8)) eine *gerade* Funktion von φ; das heißt: in zwei zu der

Richtung OO' symmetrischen Punkten (z. B. den Punkten A', A oder B', B) hat das Druckgefälle $dp/d\varphi$ den gleichen Wert. Bezeichnen wir mit p_0 die Größe des Druckes an der Stelle größter Schichtdicke ($\varphi = 0$) und mit p_1 die Differenz $p - p_0$, so wird p_1 notwendig eine *ungerade* Funktion von φ. In der Tat ist

$$p_1(+\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{dp}{d\varphi} d\varphi = \int_{-\varphi}^{0} \frac{dp}{d\varphi} d\varphi = -p_1(-\varphi).$$

Und zwar erkennt man leicht, daß p_1 zwischen $0 < \varphi < \pi$ positiv, zwischen $-\pi < \varphi < 0$ negativ ist. Da nach Definition von p_1

$$p = p_0 + p_1,$$

so setzt sich der Druck an jeder Stelle aus einem längs des Zapfenumfanges konstanten Bestandteil p_0 und einem variabeln Bestandteil p_1 zusammen, der in Fig. 6 längs der oberen Häfte des Zapfenumfanges negativ ist, also, für sich allein betrachtet, einen auf den Zapfen nach außen wirkenden *Zug* bedeuten würde, und der längs der unteren Hälfte positiv ist, also einen nach dem Zapfeninnern hin gerichteten wirklichen *Druck* darstellt, wobei in je zwei symmetrisch gelegenen Punkten $A'A$, $B'B$ die betr. Größen von Zug und Druck genau gleich sind.

Andrerseits ist auch die Reibung nach Gl. (7) oder (40) eine rationale Funktion von h, also eine *gerade* Funktion von φ. Unsere Größe q bedeutet eine *in der Richtung der wachsenden* φ auf die Längeneinheit des Zapfenumfanges wirkende Kraft bei positivem Werte von q, eine *in der Richtung der abnehmenden* φ wirkende Kraft bei negativem q. Da der Wert von q im allgemeinen tatsächlich negativ ausfällt, zeichnen wir in Fig. 6 den betr. Pfeil in dem letztgenannten Sinne ein; jedenfalls aber haben wir in zwei Punkten wie $A'A$ oder $B'B$ zur Darstellung von q zwei Pfeile anzubringen, welche gleich lang sind und im gleichen Sinne tangential um den Zapfen herum weisen. Noch sei bemerkt, daß die Pfeillänge für q in den Punkten $B'B$ größer sein wird, als in den Punkten $A'A$, weil die Reibung mit abnehmender Dicke der Schmierschicht wächst.

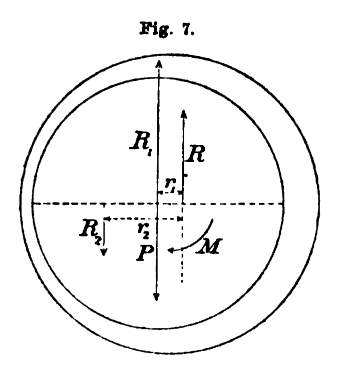
Wir setzen nun die den Anteilen p_0, p_1 und q entsprechenden Kräfte am Zapfen zusammen.

p_0 bedeutet einen allseitig gleichen, normalen Druck. Das entsprechende Kraftsystem steht bekanntlich für sich im Gleichgewicht und liefert, wie man sagen kann, die Resultierende Null. Deshalb kommt es auf den konstanten Teil p_0 von p für die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen in keiner Weise an.

Indem wir zu dem variabeln Teil p_1 von p übergehen, fassen wir je zwei symmetrisch gelegene Punkte $A'A$ gleichzeitig ins Auge und grenzen um dieselben zwei gleich große Elemente ds des Zapfenumfanges ab. Die auf diese Elemente wegen des Druckes p_1 wirkenden Kräfte werden, für die Längeneinheit der Zapfenlänge berechnet, $p_1 ds$. Unsere mit p_1 bezeichneten Pfeile in Fig. 6 können uns zugleich zur Darstellung dieser (in Wirklichkeit natürlich unendlich kleinen) Kräfte dienen. Wir verschieben die beiden Kräfte in ihren bez. Richtungslinien nach dem Zapfenmittelpunkte O und setzen sie dort zusammen. Dabei ergibt sich wegen der Gleichheit der Pfeillängen notwendig eine *Resultierende von vertikaler Richtung.* Dasselbe gilt ersichtlich für irgend zwei andere Punkte $B'B$. *Daher wird auch die Resultierende des ganzen Kraftsystems der Drucke* p_1, welche gleich der Summe der für die einzelnen Punktpaare konstruierten Resultierenden wird, *eine Kraft von vertikaler Richtung, welche in O angreift und in Fig. 6 von unten nach oben weist.* Wir bezeichnen sie mit R_1 und tragen sie in Fig. 7 ein.

Ähnlicherweise setzen wir die der Reibung in den beiden symmetrisch gelegenen Punkten $A'A$ entsprechenden Kräfte zusammen. Diese Kräfte sind für die Längeneinheit der Zapfenlänge berechnet $q ds$; sie können wieder direkt durch die in Fig. 6 mit q bezeichneten Pfeile versinnlicht werden. Wir verschieben sie nach ihrem gemeinsamen Schnittpunkte a und konstruieren in a denjenigen Rhombus, dessen Diagonale die Resultierende der beiden betrachteten Reibungskräfte liefert. Dieselbe ist abermals vertikal und zwar nach oben gerichtet. Verfahren wir ebenso mit den Reibungen in zwei Elementen bei den symmetrisch gelegenen Punkten B' und B, so erhalten wir in b eine Resultierende, welche ebenfalls vertikal, aber nach unten gerichtet ist. Führen wir die Konstruktion für mehr und mehr Punktepaare aus, so ergibt sich folgendes Bild: Auf der Verlängerung der horizontalen Achse $O'O$ über M und N hinaus haben wir überall dicht vertikal gerichtete Kräfte, auf der Seite von M nach oben, auf der Seite von N nach unten weisend. Der Größe nach sind sie natürlich sämtlich unendlich klein zu denken, indem sie mit der Länge des jedesmal betrachteten Elementes ds verschwinden. Im Verhältnis werden dabei die rechts von M anzubringenden Kräfte etwas kleiner sein, als die entsprechenden links von N in gleicher Entfernung konstruierten Kräfte. Denn diese letzteren entsprechen Punktepaaren, für welche die Schmier-

Fig. 7.



schichtdicke geringer und daher die Reibungswirkung größer ist, wie für diejenigen Punktepaare, die den ersteren entsprechen. Fassen wir nun alle diese Resultierenden zu einer Gesamtresultierenden der Reibungswirkungen zusammen, was nach den Regeln der Statik immer möglich ist, *so wird diese Gesamtresultierende ebenfalls vertikale Richtung haben und* (wegen der überwiegenden Größe der links von N angreifenden, nach unten gerichteten Teilresultierenden) *ebenfalls links von O angreifen und nach unten hin verlaufen.* Wir bezeichnen sie mit R_2 und tragen sie in Fig. 7 ein.

Schließlich wollen wir noch die Gesamtresultierende der Druckwirkungen R_1 mit der Gesamtresultierenden der Reibungswirkungen R_2 zu einer einzigen Resultierenden R vereinigen. Ihre Größe wird gleich $R_1 - R_2$, ihr Angriffspunkt liegt auf der anderen Seite von O als der von R_2. Bezeichnen wir die Abstände der Richtungslinie R von R_1 und R_2 mit r_1 und r_2, so gilt offenbar: $r_1 R_1 = r_2 R_2$. Ebenso wie R_1 und R_2 bezieht sich auch R auf die Längeneinheit der Zapfenlänge. Damit sich unser Zapfen in der angenommenen Lage im Gleichgewicht befinden kann, ist erforderlich, daß unsere schließliche Resultierende R von den auf die Längeneinheit des Zapfens sonst übertragenen Kräften genau aufgehoben wird. Die letzteren müssen also nach Richtung, Größe und Lage durch eine Einzelkraft darstellbar sein, die im Abstande r_1 von der Zapfenmitte angreifend dieselbe Größe und die entgegengesetzte Richtung wie R hat. Ersetzen wir diese exzentrische Einzelkraft wie üblich durch eine gleich große zentrische Kraft P, die der „Zapfendruck" heißt, und ein Kräftepaar M, welches als „Moment der zur Überwindung der Zapfenreibung erforderlichen Triebkraft" bezeichnet werden kann, so wird sein müssen: $P = R$ und $M = r_1 P = r_1 R$. Auch P und M sind für die Einheit der Zapfenlänge gemeint, so daß der Gesamtdruck auf den Zapfen und das gesamte Moment der Triebkraft bei der Zapfenlänge l mit Pl und Ml zu bezeichnen wären.

Das Hauptergebnis unserer statischen Betrachtung läßt sich hiernach folgendermaßen ausdrücken: *Damit die in den Figuren 6 und 7 angenommene Lage des Zapfens bei gegebener Umdrehungsgeschwindigkeit eine mögliche Gleichgewichtslage darstellt, muß der Zapfendruck P senkrecht nach unten gerichtet sein.* Etwas allgemeiner können wir sagen, indem wir von der bisher festgehaltenen speziellen Wahl der Verschiebungsrichtung $O'O$ absehen: *Die Richtung des Zapfendruckes und die Richtung der Verschiebung des Zapfenmittelpunktes müssen rechtwinklig zu einander stehen.* Oder: *Der Zapfen muß senkrecht gegen die Richtung des Zapfendruckes ausweichen*, so zwar, daß die Stelle kürzesten

Abstandes zwischen Zapfen und Lager *im Sinne* der Zapfenumdrehung U gegen die Richtung des Zapfendruckes verschoben ist.

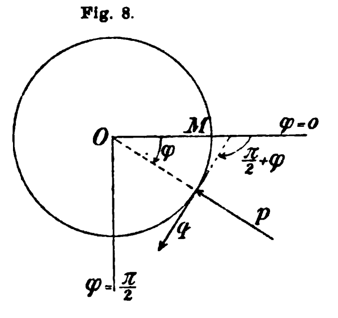
Dieses Ergebnis wird fraglos auf den ersten Blick überraschen. Man wird zunächst erwarten, daß der Zapfen der Wirkung des Zapfendruckes folgen und sich in der Richtung des Zapfendruckes von dem Mittelpunkte der Lagerschale aus verschieben wird. Daß diese Erwartung indessen mit den Bedingungen der Statik im Widerspruch steht, zeigt die vorausgehende Betrachtung. Sie lehrt nämlich unmittelbar, daß sich in der Verschiebungsrichtung $O'O$ alle Komponenten der auf den Zapfen übertragenen Kräfte p und q gegenseitig zerstören müssen, daß also die Resultierende dieser Kräfte nur in der dazu senkrechten Richtung liegen kann und daß mithin auch der Zapfendruck, welcher diese Resultierende aufheben muß, senkrecht gegen die Verschiebungsrichtung $O'O$ stehen muß.

Wir wollen nun die vorstehende geometrische Betrachtung durch den analytischen Ansatz der Gleichgewichtsbedingungen ergänzen. Dabei wird sich einerseits eine Bestätigung der bisherigen Resultate ergeben, andrerseits werden wir so den quantitativen Zusammenhang zwischen der Größe des Zapfendruckes P, der Umfangsgeschwindigkeit U und der Größe der Exzentrizität e der Zapfenlage feststellen.

Wir nehmen zu dem Ende an, daß der pro Längeneinheit des Zapfens gerechnete Zapfendruck P unter einem uns unbekannten Winkel ψ gegen den Halbmesser OM des Zapfens geneigt sei und betrachten die Komponenten von P nach den Richtungen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/2$, d. h. nach der Richtung von OM und der dazu senkrechten Richtung. Diese Komponenten betragen:

$$P \cos\psi \quad \text{und} \quad P \sin\psi.$$

Fig. 8.



Andrerseits bilden wir die Summe der entsprechenden Komponenten der Druckkräfte $p\,ds$ und der Reibungskräfte $q\,ds$ für den Umfang des Zapfens. Die Komponenten der Druckkraft $p\,ds$ werden wegen der nach dem Zapfenmittelpunkte weisenden Richtung derselben (vgl. Fig. 8):

$$-p \cos\varphi\, ds \quad \text{und} \quad -p \sin\varphi\, ds.$$

Die Reibungskraft $q\,ds$ müssen wir hier im Sinne der Zapfenumdrehung tangential zum Zapfenumfang angetragen denken, da durch das Vorzeichen von q in den Formeln (7) oder (40) bereits die tatsächliche, umgekehrte Richtung von q berücksichtigt wird. Da q unter dem

Winkel $\pi/2 + \varphi$ gegen OM geneigt ist, werden die fraglichen Komponenten von q:

$$-q \sin\varphi\, ds \quad \text{und} \quad +q \cos\varphi\, ds.$$

Damit Gleichgewicht gegen Verrückungen in der Richtung $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/2$ besteht ist erforderlich, daß:

$$(41) \quad \begin{cases} P\cos\psi - \int p\cos\varphi\, ds - \int q\sin\varphi\, ds = 0, \\ P\sin\psi - \int p\sin\varphi\, ds + \int q\cos\varphi\, ds = 0. \end{cases}$$

Wir setzen $ds = r\,d\varphi$ und formen die vorstehenden Bedingungen durch teilweise Integration so um, daß darin statt des Druckes p das Druckgefälle $dp/d\varphi$, welches uns formelmäßig bekannt ist, auftritt. Dies ist leicht zu erreichen auf Grund der Beziehungen:

$$(42) \quad \begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} p\cos\varphi\, d\varphi = \quad [p\sin\varphi]_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} \frac{dp}{d\varphi}\sin\varphi\, d\varphi, \\ \int\limits_0^{2\pi} p\sin\varphi\, d\varphi = -[p\cos\varphi]_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi} \frac{dp}{d\varphi}\cos\varphi\, d\varphi. \end{cases}$$

Hier verschwinden die vom Integralzeichen freien Glieder wegen der Periodizität von p und $\frac{\sin}{\cos}\varphi$. Die Gl. (41) gehen daher über in

$$(43) \quad \begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{dp}{d\varphi} - q\right)\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{P}{r}\cos\psi, \\ \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{dp}{d\varphi} - q\right)\cos\varphi\, d\varphi = +\frac{P}{r}\sin\psi. \end{cases}$$

Wie bereits oben betont, sind $dp/d\varphi$ und q gerade Funktionen von φ; das Produkt ihrer Differenz mit $\sin\varphi$ ist daher eine ungerade Funktion von φ, welche zwischen 0 und 2π oder, was dasselbe ist, zwischen $-\pi$ und $+\pi$ integriert verschwindet. Die erste der Gl. (43) ist also nur dadurch zu befriedigen, daß wir annehmen:

$$\psi = \frac{\pi}{2}.$$

Hierdurch wird, was die Richtung des Zapfendruckes betrifft, das Ergebnis unserer obigen geometrischen Betrachtung bestätigt.

Gleichzeitig liefert die zweite Gleichung (43) den erforderlichen Ausweis über die Größe des Zapfendruckes. Entnehmen wir die

Differenz $dp/d\varphi - q$ aus den Gl. (9) und (8) des zweiten §, so ergibt sich

$$\frac{dp}{d\varphi} - q = 6\lambda r U \frac{h - h_0}{h^3} + \lambda U \frac{4h - 3h_0}{h^2}.$$

Hier können wir unbedenklich das zweite Glied der rechten Seite gegen das erste vernachlässigen, da es sich gegen dieses der Größenordnung nach verhält wie $h : r$. Statt dessen können wir uns auch auf die etwas genaueren Formeln (39) und (40) des dritten § berufen. Auf Grund dieser Formeln ergibt sich einfacher

$$\frac{dp}{d\varphi} - q = 6\lambda r U \frac{h - h_0}{h^3} - \lambda \frac{U}{r},$$

indem sich die Größe q gegen ein Glied des Ausdruckes von $dp/d\varphi$ forthebt. Das zweite Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung könnten wir abermals gegen das erste vernachlässigen; überdies fällt es bei der in (43) vorgesehenen Integration von selbst fort, da es von φ unabhängig ist. Mithin lautet unsere zweite Gleichung (43) mit Rücksicht auf $\psi = \pi/2$ einfach folgendermaßen:

$$6\lambda r U \int_0^{2\pi} \frac{h - h_0}{h^3} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{P}{r}.$$

Wir berücksichtigen den Ausdruck (8) von h sowie die Definition von α in Gl. (12) und schreiben statt der vorigen Gleichung

$$(44) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{(\alpha + \cos\varphi)^2} - \frac{h_0}{e} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{(\alpha + \cos\varphi)^3} = \frac{\delta^2 P}{6\lambda \alpha^2 r^2 U}.$$

Die hier auftretenden Integrale werden leicht auf die früher berechneten Größen J_1, J_2 und J_3 (s. Gl. (13) und (17)) zurückgeführt. Man hat nämlich

$$(45) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{(\alpha + \cos\varphi)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\alpha + \cos\varphi} - \alpha \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\alpha + \cos\varphi)^2} = J_1 - \alpha J_2$$

und

$$(45') \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{(\alpha + \cos\varphi)^3} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\alpha + \cos\varphi)^2} - \alpha \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\alpha + \cos\varphi)^3} = J_2 - \alpha J_3.$$

Daher lautet die linke Seite von (44) mit Rücksicht auf die Gl. (14) und (17)

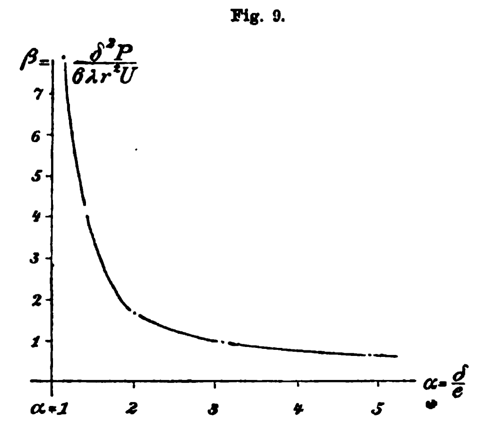
$$J_1 - \alpha J_2 - \frac{J_2}{J_3}(J_2 - \alpha J_3) = J_1 - \frac{J_2^2}{J_3}$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \left(1 - \frac{2\alpha^2}{2\alpha^2 + 1}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \frac{1}{2\alpha^2 + 1},$$

und Gl. (44) geht mit Benutzung einer neuen Abkürzung β über in:

$$(46) \qquad \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}\,\frac{\alpha^2}{2\alpha^2+1}=\beta,\quad \beta=\frac{\delta^2 P}{6\lambda r^2 U}.$$

Durch diese Beziehung ist die erforderliche Größe des Zapfendruckes bestimmt, wenn wir uns die Lage des Zapfens (d. h. die Verhältniszahl α) sowie die Umfangsgeschwindigkeit U, die Lagerabmessungen (d. h. die Größen r und δ) und die Natur des Schmiermittels (seine Reibungskonstante λ) gegeben denken.

Fig. 9.



Den Inhalt der Gl. (46) führen wir uns auf graphischem Wege näher, indem wir in Fig. 9 die Größen α und β, welche reine, dimensionslose Zahlen bedeuten, als Koordinaten einer Kurve auftragen. Dabei kommen wegen der geometrischen Bedeutung von α nur die Werte $1 \leqq \alpha \leqq \infty$ für uns in Betracht. Der Verlauf dieser Kurve wird sehr einfach. Wie man aus (46) erkennt, wird $\beta = \infty$ für $\alpha = 1$, $\beta = 0$ für $\alpha + \infty$. Zwischen diesen Grenzen verläuft die Kurve ohne Maxima und Minima, was sich leicht durch Differenzieren nachweisen läßt. Einige besondere Werte von β sind die folgenden

$$\alpha=\sqrt{2} \qquad \alpha=2 \qquad \alpha=3 \qquad \alpha=5$$

$$\beta=\frac{4\pi}{5}=2{,}5 \quad \beta=\frac{8\pi}{9\sqrt{3}}=1{,}6 \quad \beta=\frac{18\pi}{19\sqrt{8}}=1{,}06 \quad \beta=\frac{50\pi}{51\cdot\sqrt{24}}=0{,}63.$$

Der Verlauf der Kurve wird daher der in Fig. 9 angegebene.

Wir können hiernach sagen, indem wir berücksichtigen, daß die Größe β dem Zapfendrucke P direkt, die Größe α der Exzentrizität e umgekehrt proportional ist: *Bei festgehaltener Umfangsgeschwindigkeit nimmt die Exzentrizität der Zapfenlage mit wachsendem Zapfendrucke fortgesetzt zu.* Berücksichtigen wir andrerseits, daß die Größe β der Umfangsgeschwindigkeit U umgekehrt proportional ist, so können wir hinzufügen: *Bei festgehaltenem Zapfendruck nimmt die Exzentrizität der Zapfenlage mit wachsender Zapfengeschwindigkeit fortgesetzt ab;* für $U = \infty$ ergibt sich als Grenzlage $\alpha = \infty$ oder $e = 0$, d. h. eine *völlig zentrische Lage des Zapfens im Lager.*



§ 5. Bestimmung des Reibungsmomentes. Grenzfälle der Reibung und Definition der Übergangsgeschwindigkeit.

Wir sind jetzt in der Lage, das Moment der hydrodynamischen Reibung formelmäßig zu bestimmen. Wir multiplizieren zu dem Zwecke die pro Längeneinheit des Zapfens gerechnete, auf ein Element $ds = r d\varphi$ wirkende Reibungskraft $q ds$ mit dem Hebelarme r und integrieren über den Umfang des Zapfens. So ergibt sich nach (7), (8) und (12):

$$(47)\qquad M = r^2 \int q d\varphi = -\frac{\lambda \alpha r^2 U}{\delta}\left\{4\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\alpha + \cos\varphi} - \frac{3h_0}{e}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)^2}\right\}.$$

Auch die hier auftretenden Integrale sind nach Früherem bekannt. Nach (14) und (17) wird nämlich der Wert der Klammer:

$$\{\ \} = 4J_1 - 3\frac{J_2^2}{J_3} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}\left(4 - \frac{6\alpha^2}{2\alpha^2+1}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}\,\frac{\alpha^2+2}{2\alpha^2+1}.$$

In Gl. (47) ist das Reibungsmoment positiv *im Sinne der Zapfenumdrehung* gemessen. Verabreden wir, was naturgemäßer erscheint, dieses Moment positiv im *umgekehrten Sinne* zu zählen, so haben wir das negative Zeichen in Gl. (47) zu unterdrücken. Aus (47) folgt dann

$$(48)\qquad \frac{4\pi\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}\,\frac{\alpha^2+2}{2\alpha^2+1} = \frac{\delta M}{\lambda r^2 U}.$$

Denken wir uns aus (46) und (48) α eliminiert, so haben wir *M als Funktion von U und P dargestellt*, womit das eigentliche Ziel unserer Untersuchung erreicht ist. Indessen würde die formelmäßige Elimination von α so unübersichtlich werden, daß wir es vorziehen, zunächst zwei Grenzfälle hervorzuheben und dann graphisch zu verfahren. Dabei ist es bequem, den Gl. (46) und (48) eine Formel für den sog. Reibungskoeffizienten $\mu = M/Pr$ an die Seite zu stellen, also diejenige Größe zu bestimmen, die man vom Standpunkte der trockenen Reibung an die Spitze der Untersuchung stellen würde, die aber von unserem Standpunkte der Flüssigkeitsreibung nur eine bequeme Abkürzung ohne eigentliche physikalische Bedeutung ist. Durch Division der Gl. (46) und (48) ergibt sich

$$(49)\qquad \mu = \frac{M}{Pr} = \frac{\delta}{r}\,\frac{\alpha^2+2}{3\alpha}.$$

Erster Grenzfall $\alpha = 1$. Gl. (48) wird in diesem Falle wegen des Faktors $\sqrt{\alpha^2-1}$ unbrauchbar. Dagegen liefert Gl. (49) den bestimmten und endlichen Wert

$$(50)\qquad \mu_0 = \frac{\delta}{r},\quad M_0 = \delta P.$$

Wir bezeichnen den hier bestimmten Wert $\mu = \mu_0$ als *Reibungskoeffizienten der Ruhe* und zwar aus folgendem Grunde: Fig. 9 zeigt, daß dem Werte $\alpha = 1$ als zugehörige Ordinate der Kurve der Wert $\beta = \infty$ entspricht. Da $\beta = \delta^2 P/6\lambda r^2 U$ war, so tritt unser Grenzfall $\alpha = 1$ entweder bei unendlich wachsendem P oder bei unendlich abnehmendem U ein. Beachten wir insbesondere die letztere Möglichkeit, so können wir sagen: *Unser erster Grenzfall entspricht den Verhältnissen bei hinreichend geringer Zapfengeschwindigkeit.* Den Inhalt der Gl. (50) können wir für diesen Fall auch so formulieren:

$$M_0 = \mu_0 r P. \tag{50'}$$

Es ist offenbar kein Zufall, daß der Wert (50) von M_0 übereinstimmt mit derjenigen mechanischen Arbeit, die zu leisten ist, wenn der Zapfen aus seiner natürlichen Ruhelage, in welcher er mit seinem untersten Punkte auf dem tiefsten Punkte der Lagerschale aufliegen würde, in diejenige Lage gehoben werden soll, in welcher er sich nach den Erörterungen des vorigen § im Bewegungsgleichgewichte befindet.

Zweiter Grenzfall $\alpha = \infty$. In diesem Falle wird die linke Seite der Gl. (48) einfach gleich 2π. Für M bez. μ ergibt sich daher aus (48) der folgende Wert:

$$M_\infty = \frac{2\pi\lambda r^2 U}{\delta}, \quad \mu_\infty = \frac{2\pi\lambda r U}{\delta P}. \tag{50''}$$

Fig. 9 zeigt, daß dem Grenzfall $\alpha = \infty$ als zugehöriger Wert von β der Wert $\beta = 0$ entspricht. Es wird aber $\beta = 0$, entweder wenn $P = 0$ wird oder wenn U unendlich groß ist. Heben wir wieder die zweite Möglichkeit besonders hervor, so können wir sagen: *Unser zweiter Grenzfall entspricht den Verhältnissen bei hinreichend großer Zapfengeschwindigkeit.*

Die Gl. (50′) und (50″) decken sich der Form nach genau mit den beiden Ansätzen (I) und (II), die wir in der Einleitung als Standpunkt der trockenen und der Flüssigkeitsreibung einander gegenübergestellt haben. Indem unsere Theorie diese beiden Ansätze als Grenzfälle aus ein und derselben Anschauungsweise hervorgehen läßt, söhnt sie jene beiden entgegengesetzten Standpunkte miteinander aus.

Zu betonen ist bei dem Vergleich von (50′) und (I), daß der Reibungskoeffizient der Ruhe μ_0 in unserer Theorie nicht als Erfahrungskoeffizient erscheint, sondern daß ihm eine bestimmte geometrische Bedeutung beigelegt wird. Er soll nämlich nach (50) gleich dem Verhältnis δ/r sein. Daß die in (II) mit F bezeichnete benetzte Fläche des Zapfenumfanges in Gl. (50″) durch $2\pi r$ ersetzt wird, entspricht unserer bisher durchweg festgehaltenen Annahme, wonach der ganze Zwischenraum zwischen Zapfen und Lager von dem Schmiermittel aus-

gefüllt sein sollte, sowie dem Umstande, daß wir M sowohl wie P für die Längeneinheit der Zapfenlänge berechnet haben.

Von den Grenzfällen $\alpha = 1$ und $\alpha = \infty$ wollen wir jetzt zu den diesen benachbarten Fällen übergehen, indem wir Reihenentwickelungen ansetzen und diese mit den ersten Gliedern abbrechen.

Die dem ersten Grenzfall benachbarten Fälle. Wir setzen $\sqrt{\alpha^2 - 1} = \varepsilon$, wobei wir ε als klein ansehen. Aus (46) ergibt sich in erster Näherung

$$\varepsilon = \frac{4\pi\lambda r^2 U}{\delta^2 P}.$$

Andrerseits folgt aus (49)

$$(51') \qquad \mu = \frac{\delta}{r}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{6}\right) = \mu_0\left(1 - \frac{2}{3}\left(\frac{2\pi\lambda r^2 U}{\delta^2 P}\right)^2\right).$$

Hiernach nimmt der Reibungskoeffizient von dem Grenzwerte μ_0 mit wachsender Geschwindigkeit zunächst etwas ab. Dasselbe gilt von dem Reibungsmomente.

Die dem zweiten Grenzfall benachbarten Fälle. Wir setzen $\alpha = 1/\varepsilon$, wobei wir abermals ε als klein ansehen. Aus (46) ergibt sich dann in erster Näherung

$$\varepsilon = \frac{\delta^2 P}{6\pi\lambda r^2 U}$$

und aus (48)

$$(51'') \qquad M = \frac{2\pi\lambda r^2 U}{\delta}(1 + 2\varepsilon^2) = \frac{2\pi\lambda r^2 U}{\delta}\left\{1 + \frac{2}{9}\left(\frac{\delta^2 P}{2\pi\lambda r^2 U}\right)^2\right\}.$$

Hiernach fällt das Reibungsmoment für endliche Geschwindigkeiten größer aus, als es sich nach der Grenzformel (50″) berechnen würde. Das Entsprechende gilt für den Reibungskoeffizienten.

Das Minimum des Reibungskoeffizienten und des Reibungsmomentes. Übergangsgeschwindigkeit und Übergangsdruck. Indem wir an Gl. (49) anknüpfen, suchen wir denjenigen Wert von α, für den $d\mu/d\alpha = 0$ wird. Wir haben

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\alpha^2 + 2}{\alpha}\right) = 1 - \frac{2}{\alpha^2} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = \sqrt{2}$$

und ferner

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{\alpha^2 + 2}{\alpha}\right) = + \frac{4}{\alpha^3} > 0.$$

Für $\alpha = \sqrt{2}$ wird also μ zum Minimum. Der betr. Minimalwert beträgt:

$$(52) \qquad \mu_{\min} = \frac{\delta}{r}\frac{2\sqrt{2}}{3} = 0{,}943\,\mu_0.$$

Dementsprechend wird

$$(52') \qquad M_{\min} = 0{,}943\,P\delta.$$

Der Kleinstwert von μ hängt nur von den Lagerabmessungen ab und ist ungefähr um 6 % kleiner als der ebenfalls nur von den Lagerabmessungen

abhängige Wert μ_0; *er ist unabhängig von Zapfendruck und Zapfengeschwindigkeit.*

Indem wir ferner Gl. (46) hinzunehmen, berechnen wir zu $\alpha = \sqrt{2}$ den zugehörigen Wert des Verhältnisses $\delta^2 P / \lambda r^2 U$. Es ergibt sich

$$(53) \qquad \frac{\delta^2 P}{\lambda r^2 U} = \frac{12\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + 1} = \frac{24\pi}{5} = 15{,}1.$$

Nehmen wir das eine Mal an, daß außer den Lagerabmessungen und der Reibungskonstanten λ auch der Zapfendruck gegeben ist, so können wir die vorstehende Gleichung zur Berechnung von U benutzen. Nehmen wir andrerseits an, daß außer den Lagerabmessungen und der Reibungskonstanten die Geschwindigkeit gegeben ist, so können wir aus derselben Gleichung den Wert von P berechnen. Wir erhalten so den *günstigsten Wert der Geschwindigkeit* bez. *den günstigsten Wert des Druckes*, nämlich denjenigen Wert, für den Reibungskoeffizient und Reibungsmoment ihren Kleinstwert annehmen. Diese Geschwindigkeit (dieser Druck) soll *Übergangsgeschwindigkeit (Übergangsdruck)* heißen und mit $U_{\min}$ ($P_{\min}$) bezeichnet werden. Es ergibt sich

$$(54) \qquad U_{\min} = \frac{1}{15{,}1} \frac{\delta^2 P}{\lambda r^2}, \qquad\qquad (55) \qquad P_{\min} = 15{,}1 \frac{\lambda r^2 U}{\delta^2}.$$

Der Betrag der Übergangsgeschwindigkeit wächst hiernach mit wachsendem Zapfendruck P und mit zunehmender Dünnflüssigkeit des Schmiermittels, d. h. mit abnehmendem λ. Da erfahrungsgemäß der Wert von λ durch eine Erhöhung der Temperatur merklich herabgesetzt wird, können wir auch sagen, *daß die Übergangsgeschwindigkeit mit wachsender Temperatur ebenfalls wächst.* Die umgekehrten Aussagen gelten von dem Übergangsdruck.

Wir wollen nun die bisherigen Resultate durch einige Figuren zusammenfassen. In der ersten derselben nehmen wir *U als Abszisse*, *μ als Ordinate* und denken uns den Druck P für die einzelne der zu konstruierenden Kurven konstant gehalten.

Wir können so vorgehen, daß wir einen beliebigen Punkt auf der Ordinatenachse zur Darstellung von μ_0 und einen beliebigen Punkt auf der Abszissenachse zur Darstellung der einem bestimmten P zugehörigen Übergangsgeschwindigkeit $U_{\min}$ wählen, wodurch nur der Maßstab auf der Ordinaten- und Abszissenachse festgelegt ist. Darauf ziehen wir im Abstande μ_0 von der Abszissenachse eine Parallele a zu dieser und im Abstande $\mu_{\min} = 0{,}943\ \mu_0$ eine Parallele b. Unsere Kurve 1, die den Zusammenhang zwischen μ und U bei dem bestimmten Werte P veranschaulicht, muß nun die Parallele b bei der Abszisse $U_{\min}$, die Parallele a (s. Gl. (51')) bei der Abszisse $U = 0$ berühren. Weiter

haben wir den asymptotischen Verlauf unserer Kurve für große Werte von U festzustellen. Wir konstruieren zu dem Zwecke die Gerade

$$\mu = \frac{2\pi\lambda r U}{\delta P},$$

der nach Gl. (50″) unsere Kurve asymptotisch zustrebt, wobei sie nach Gl. (51″) oberhalb derselben verläuft. Für $U = U_{\min}$ hat diese Gerade nach (54) die Ordinate

$$\mu = \frac{2\pi}{15{,}1}\frac{\delta}{r} = 0{,}416\,\mu_0.$$

In dem Abstande $0{,}416\,\mu_0$ ziehen wir daher eine dritte Parallele c zur Abszissenachse. Den Schnittpunkt derselben mit der in $U_{\min}$ errichteten Ordinate verbinden wir mit O und erhalten so die gesuchte Asymptote unserer Kurve. Der weitere Verlauf unserer Kurve zwischen ihrem Minimum und demjenigen Teile, wo sie merklich mit der Asymptote zusammenfällt, kann leicht durch Berechnung einiger besonderer Kurvenpunkte festgestellt werden. Z. B. ergibt sich nach Gl. (49), (46) und (54) mit Rücksicht auf die Zahlenwerte von S. 124:

$$\alpha = 2, \quad \mu = \mu_0, \quad \beta = 1{,}6, \quad U = \frac{\delta^2 P}{9{,}6\,\lambda r^2} = 1{,}58\,U_{\min},$$

$$\alpha = 3, \quad \mu = 1{,}2\,\mu_0, \quad \beta = 1{,}06, \quad U = \frac{\delta^2 P}{6{,}36\,\lambda r^2} = 2{,}38\,U_{\min},$$

$$\alpha = 5, \quad \mu = 1{,}8\,\mu_0, \quad \beta = 0{,}63, \quad U = \frac{\delta^2 P}{3{,}78\,\lambda r^2} = 4{,}00\,U_{\min}.$$

Wir gehen jetzt von der Kurve 1 zu denjenigen Kurven über, welche dem doppelten, dreifachen usw. Werte von P entsprechen. (In

Fig. 10.

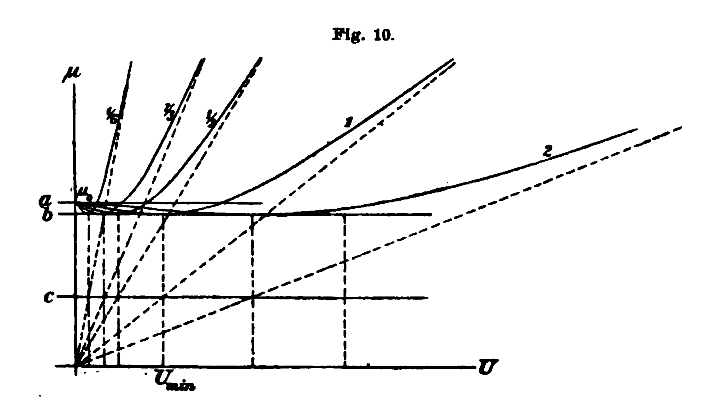
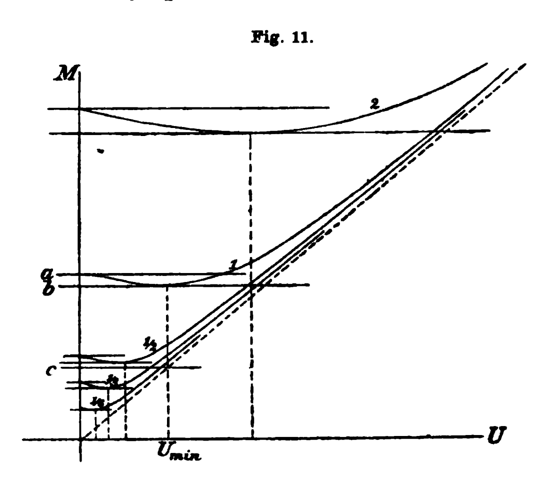


Fig. 10 ist die erstere Kurve eingetragen und mit 2 bezeichnet.) Der Wert der Übergangsgeschwindigkeit ist nach (54) für diese Kurven das Doppelte, Dreifache usw. der früheren Übergangsgeschwindigkeit.

Der Wert von $\mu_{\min}$ aber ist nach (52) derselbe wie früher. Deshalb müssen auch diese Kurven unsere Parallele b berühren und zwar je in einem Punkte, der der zweifachen, dreifachen usw. Abszisse entspricht. Ferner berühren sie die Parallele a im Punkte $\mu = \mu_0$, $U = 0$. Um das asymptotische Verhalten der Kurven festzustellen, bringen wir unsere Parallele c zum Schnitt mit der auf der betr. Abszisse $U_{\min}$ errichteten Ordinate. Die Verbindungslinie dieses Schnittpunktes mit O gibt die gewünschte Asymptote.

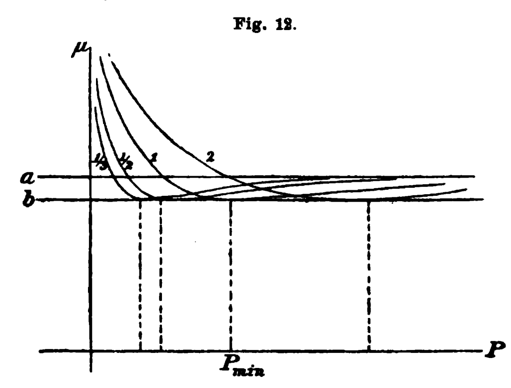
Fig. 11.



Ebenso wie zu den Kurven 2, 3 ... gehen wir zu den mit $^1/_2$, $^1/_3$ ... bezeichneten Kurven über, die dem Zapfendrucke $P/2, P/3$ ... entsprechen. Auch diese Kurven berühren die Parallelen a und b und ihre Asymptoten lassen sich mittels der Parallelen c konstruieren.

Übrigens können wir alle diese Kurven aus einer derselben durch gleichmäßige Streckung oder Zusammenziehung nach der Abszissenachse gewinnen. Nach (49) ist nämlich μ/μ_0 eine reine Funktion von α und nach (46) ist α eine reine Funktion von $\beta = \frac{\delta^2 P}{6 \lambda r^2 U}$. Derselbe Wert von μ gehört also bei doppeltem P zu der doppelten Abszisse wie bei einfachem P usw.

Fig. 12.



In Fig. 11 sind vergleichsweise die entsprechenden Kurven *für das Reibungsmoment $M = \mu r P$ als Ordinate* und *für U als Abszisse* eingetragen. Wählen wir den Maßstab in der neuen Figur so, daß die Kurve 1 sich kongruent von der vorigenFigur auf diese überträgt, so entsteht die Kurve 2 durch Verdoppelung, die Kurve $^1/_2$ durch Halbierung sowohl der Ordinate wie der Abszisse von 1 etc. Der asymptotische Verlauf der sämtlichen Kurven für M wird der gleiche.

Endlich wollen wir noch in einer neuen Fig. 12 die Darstellung

dahin abändern, daß wir μ *als Ordinate*, P *als Abszisse* auftragen und für die einzelne der jetzt zu entwerfenden Kurven U als konstant ansehen. Die sämtlichen Kurven dieser Figur haben die Ordinatenachse, sowie die im Abstande μ_0 von der Abszissenachse gezogene Parallele a zu Asymptoten. Nach Fig. 9 und Gl. (49) ist nämlich

$$\text{für } P = 0 \quad \text{oder} \quad \beta = 0 \ \ldots \alpha = \infty \quad \text{mithin} \quad \mu = \infty$$
$$\text{,,} \quad P = \infty \quad \text{,,} \quad \beta = \infty \ldots \alpha = 0 \quad \text{,,} \quad \mu = \mu_0.$$

Ferner entspricht nach obigem der Kleinstwert μ_{min} dem „Übergangsdrucke" (s. Gl. (55))

$$P_{min} = \frac{15{,}1\lambda r^2 U}{\delta^2}.$$

Gehen wir von einer bestimmten Kurve 1 zu einer solchen für die doppelte oder halbe Geschwindigkeit U über, so verdoppelt oder halbiert sich der Wert des Übergangsdruckes, wie überhaupt die Kurven 2 ..., $^1/_2$ ... durch Verdoppelung ... oder Halbierung der Abszissen aus unserer Kurve 1 erhalten werden. Der Abstand der beiden Parallelen a und b, welche von allen Kurven dieser Figur berührt werden, ist übrigens im Interesse der Deutlichkeit der Zeichnung etwas größer gewählt, als er der Theorie nach sein sollte und als er in Fig. 10 angenommen wurde.

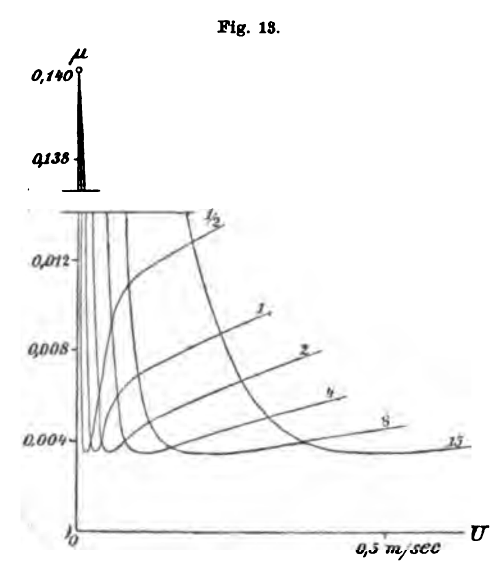
Als Gegenstück zu den Fig. 10 und 12 wollen wir zwei Serien von Beobachtungskurven nach R. Stribeck[1]) hersetzen. Die erste derselben (Fig. 7a bei Stribeck) gibt durch ihre Abszissen die Umfangsgeschwindigkeit U in m./sec., in ihren Ordinaten den Reibungskoeffizienten μ. Die zweite (Fig. 6 bei Stribeck) hat zu Abszissen eine unserem „Zapfendruck pro Längeneinheit" proportionale Größe, nämlich den Zapfendruck pro Flächeneinheit der Projektion des Lagers auf eine zum Zapfendruck senkrechte Ebene (in unserer Bezeichnung $P/2r$), zu Ordinaten wieder den Reibungskoeffizienten μ. Die den Kurven beigeschriebenen Zahlen bedeuten in der ersten Figur den Zapfendruck pro Flächeneinheit in kg/cm^2, in der zweiten die minutliche Umdrehungszahl.

Eine allgemeine Ähnlichkeit in dem Verlauf der theoretischen und der Beobachtungskurven ist nicht zu verkennen. Dieselbe betrifft namentlich das Vorhandensein der Übergangsgeschwindigkeit und des Übergangsdruckes, das Anwachsen der Übergangsgeschwindigkeit proportional mit dem Zapfendrucke und des Übergangsdruckes proportional mit der Zapfengeschwindigkeit, ferner die Unabhängigkeit des Wertes μ_{min} vom Drucke bez. von der Geschwindigkeit, die darin

1) S. die in der Einleitung zit. Arbeit, insbesondere Fig. 7a und Fig. 6 derselben, denen unsere Fig. 12 und 13 entnommen sind.

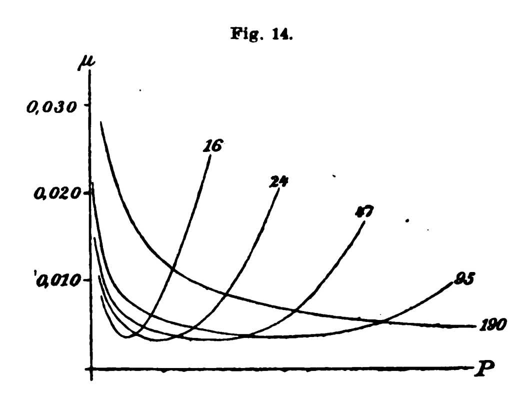
zum Ausdruck kommt, daß sämtliche Kurven in Fig. 13 und 14 ebenso wie in Fig. 10 und 12 eine und dieselbe Gerade (in den letzteren mit b bezeichnet) tangieren. An der Verschiedenheit des Maßstabes in den entsprechenden Figuren darf man sich natürlich nicht stoßen, ebenso wenig an der verschiedenen Messung des Zapfendruckes oder der Umlaufsgeschwindigkeit, woraus insbesondere folgt, daß die mit gleichen Marken versehenen Kurven in Fig. 10 und 13 oder Fig. 12 und 14 doch nicht direkt miteinander vergleichbar sind.

Fig. 13.



Andrerseits aber dürfen wir nicht verkennen, daß zwischen den theoretischen und den beobachteten Kurven auch durchgreifende Verschiedenheiten vorhanden sind. Während sich die Kurven der Fig. 10 asymptotisch einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden anpassen sollen, tun die Kurven der Fig. 13 dieses nur für eine kurze Strecke dicht hinter dem Minimum, um dann umzubiegen und viel weniger steil anzusteigen. Während ferner die Anfangsordinate μ_0 in Fig. 10 nur wenig (um 6 %) größer ist als der Kleinstwert $\mu_{\min}$, ist in Fig. 13 die Anfangsordinate 25mal größer als der letztgenannte Wert. Damit hängt es zusammen, daß in unserer Fig. 12 die Kurven nach Überschreiten des Minimums nurmehr wenig ansteigen, während die Kurven in Fig. 14 hinter dem Minimum noch so beträchtliche Steigungen aufweisen, daß der schließliche asymptotische Verlauf für $P = \infty$ in der Figur überhaupt nicht mehr dargestellt werden konnte.

Fig. 14.



Trotz der zuletzt hervorgehobenen bedeutenden quantitativen Verschiedenheit von μ_0 — nach den Beobachtungen von Stribeck ist μ_0

gleich 0,14, nach unserer Theorie gleich δ/r, was bei normaler Ausführung des Lagers weniger als 0,001 betragen dürfte — besteht dennoch eine gewisse qualitative Übereinstimmung auch hinsichtlich dieses Wertes. Unsere theoretischen Kurven in Fig. 10 sowie die von Stribeck in Fig. 13 gehen alle von demselben Punkte der Ordinatenachse aus oder, anders ausgedrückt, die Anfangsordinate μ_0 ist von der Größe des Zapfendruckes unabhängig. Unser theoretischer Wert von μ_0 ist ferner allein durch die Lagerabmessungen gegeben, also von der Natur des Schmiermittels unabhängig. Damit stimmt es überein, daß sich nach den Beobachtungen von Stribeck μ_0 von der Temperatur des Lagers — fast — unabhängig erwies.

Im ganzen erkennen wir, daß unsere Theorie in vielen Zügen ein zutreffendes Bild der Wirklichkeit zu liefern vermag, daß sie aber namentlich bei großen und bei ganz kleinen Geschwindigkeiten in wichtigen Stücken einstweilen versagt.

§ 6. Ermittelung der Druckverteilung rings um den Zapfen.

Wir haben es bisher so eingerichtet (man vgl. z. B. den Übergang von Gl. (41) zu (43)), daß wir mit dem Druckgefälle $dp/d\varphi$ auskamen und der Kenntnis des Druckes p selbst entraten konnten. Zur Ergänzung möge jetzt die Größe p selbst als Funktion von φ bestimmt werden. Allerdings gelingt dies nur bis auf eine Integrationskonstante, die wir im Anschluß an § 4 S. 118 mit p_0 bezeichnen werden

$$p_0 = p(0) = p(\pi).$$

Gleichzeitig werden wir hierbei Gelegenheit haben, auf den bedenklichsten Punkt in unserer Theorie und den wahrscheinlichen Grund ihrer teilweisen Nichtübereinstimmung mit der Erfahrung hinzuweisen.

Um p als Funktion von φ zu berechnen, integrieren wir die Gl. (9) von $\varphi = 0$ bis φ. Mit Rücksicht auf (8) und (12) erhalten wir:

$$p(\varphi) - p_0 = \frac{6\lambda r \alpha^2 U}{\delta^2}\left\{\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(\alpha + \cos\varphi)^2} - \frac{h_0}{e}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(\alpha + \cos\varphi)^3}\right\}. \tag{56}$$

Die hier vorkommenden Integrale mögen mit $J_2(\varphi)$ und $J_3(\varphi)$ bezeichnet werden. Sie können aus dem in (16) berechneten Integral, welches $J_1(\varphi)$ heißen möge, durch Differentiation nach α abgeleitet werden, indem

$$J_2(\varphi) = -\frac{\partial}{\partial\alpha}J_1(\varphi), \quad J_3(\varphi) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}J_2(\varphi).$$

Nach möglichster Zusammenziehung der zunächst etwas umständlichen Rechnung findet man:

$$(56')\begin{cases} J_2(\varphi) = \dfrac{2\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}}\operatorname{arc\,tg}(\,) - \dfrac{1}{\alpha^2-1}\dfrac{\sin\varphi}{\alpha+\cos\varphi}, \\ J_3(\varphi) = \dfrac{2\alpha^2+1}{(\alpha^2-1)^{5/2}}\operatorname{arc\,tg}(\,) - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha}{(\alpha^2-1)^2}\dfrac{\sin\varphi}{\alpha+\cos\varphi} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\alpha^2-1}\dfrac{\sin\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)^2}, \end{cases}$$

wobei das in Gl. (16) angegebene Argument des arc tg unterdrückt wurde. Hiernach wird die { } in Gl. (56) mit Rücksicht auf (14) und (18):

$$(56'') \qquad J_2(\varphi) - \frac{J_2}{J_3}J_3(\varphi) = \frac{1}{2\alpha^2+1}\frac{\sin\varphi}{\alpha+\cos\varphi}\left(1+\frac{\alpha}{\alpha+\cos\varphi}\right).$$

Wie man sieht, haben sich die Glieder mit arc tg gegenseitig fortgehoben, was deshalb zu erwarten war, weil der arc tg eine nicht in sich zurücklaufende Funktion darstellt, während doch der Druck p nach einem vollen Umlauf um den Zapfen auf seinen ursprünglichen Wert zurückkommen muß. Die Bestimmung der Größe h_0/e in § 2 kam gerade, wie wir jetzt sagen können, darauf hinaus, die mit arc tg behafteten, nichtperiodischen Glieder in dem Ausdruck von p für sich zum Verschwinden zu bringen. Aus Gl. (56) und (56′) folgt nun als allgemeines Gesetz der Druckverteilung:

$$p(\varphi) = p_0 + \frac{6\lambda r U}{\delta^2}\frac{\alpha^2}{2\alpha^2+1}\frac{\sin\varphi}{\alpha+\cos\varphi}\left(1+\frac{\alpha}{\alpha+\cos\varphi}\right)$$

oder, wenn wir U nach Gl. (46) durch P und α ausdrücken:

$$(57) \qquad p(\varphi) = p_0 + \frac{P}{2\pi r}\sqrt{\alpha^2-1}\,\frac{\sin\varphi}{\alpha+\cos\varphi}\left(1+\frac{\alpha}{\alpha+\cos\varphi}\right).$$

Indem wir uns P fest gegeben denken, wollen wir diese Gleichung für verschiedene Werte von α oder, was auf dasselbe herauskommt, für verschiedene Größen der Zapfengeschwindigkeit U geometrisch deuten. Dabei werden wir abermals zwei Grenzfälle voranstellen.

Erster Grenzfall $\alpha = 1$, *entsprechend* $U = 0$. Nach (57) wird wegen des Faktors $\sqrt{\alpha^2-1}$ im allgemeinen

$$(58') \qquad p(\varphi) = p_0.$$

Eine Ausnahme macht indessen die Stelle $\varphi = \pm\pi$, für welche $\cos\varphi = -1$, also $\alpha + \cos\varphi = 0$ wird. Für diesen besonderen Wert von φ wird der Ausdruck (57) zunächst unbestimmt.

Zweiter Grenzfall $\alpha = \infty$, *entsprechend* $U = \infty$. Gl. (57) ergibt jetzt einfach

$$(58'') \qquad p(\varphi) = p_0 + \frac{P}{\pi r}\sin\varphi.$$

Im ersten Grenzfalle wird also der Normaldruck längs des Zapfenumfanges im allgemeinen konstant. Im zweiten Grenzfall kommt zu dem konstanten Teile des Normaldruckes ein variabler Teil hinzu, den wir ebenso wie in § 4 S. 118 mit p_1 bezeichnen können

$$p_1(\varphi) = p(\varphi) - p_0.$$

Dabei verteilt sich im zweiten Grenzfalle p_1 in der Weise über den Zapfenumfang, daß p_1 für gleiche Teile der *Horizontalprojektion des Zapfenumfanges* oder, allgemeiner gesagt, *für gleiche Teile der Projektion des Zapfenumfanges auf eine zur Richtung des Zapfendruckes senkrechte Ebene* konstant ausfällt. Ist nämlich ds ein Element des Zapfenumfanges, so wird die genannte Projektion dieses Elementes $ds \sin\varphi$. Nach (58″) wird nun

$$\frac{p_1}{\sin\varphi} = \text{const} = \frac{P}{\pi r}.$$

Man kann bei diesen beiden Verteilungsgesetzen für unsern ersten und zweiten Grenzfall an die beiden gegensätzlichen Annahmen über die Druckverteilung im Lager denken, die in der Praxis für frische und eingelaufene Zapfen gebräuchlich sind — Annahme von Weisbach und Annahme von Reye — (vgl. die Einleitung S. 102.).

Um die noch vorhandene Unbestimmtheit im ersten Grenzfalle zu heben und um die Zwischenfälle für $1 < \alpha < \infty$ oder $0 < U < \infty$ besser übersehen zu können, wollen wir insbesondere das Maximum des Druckes für jeden Wert von α bestimmen. Dieses tritt, wie früher bemerkt, an derjenigen Stelle ein, für welche die Schmierschichtdicke $h = h_0$ wird und entspricht demjenigen Winkel $\varphi = \varphi_0$, für welchen nach Gl. (18′) und (19) gilt:

$$\alpha + \cos\varphi_0 = \frac{2\alpha(\alpha^2-1)}{2\alpha^2+1}, \quad \cos\varphi_0 = \frac{-3\alpha}{2\alpha^2+1},$$

$$\sin\varphi_0 = \frac{\sqrt{4\alpha^4-5\alpha^2+1}}{2\alpha^2+1} = \frac{\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{4\alpha^2-1}}{2\alpha^2+1}.$$

Setzen wir nun in (57) $\varphi = \varphi_0$, so ergibt sich nach möglichster Zusammenziehung:

$$p_{\max} = p_0 + \frac{P}{\pi r \alpha}\frac{(\alpha^2-1/4)^{3/2}}{\alpha^2-1}. \tag{59′}$$

Gleichzeitig bestimmen wir das Minimum des Druckes, indem wir $\varphi = -\varphi_0$ setzen oder das Vorzeichen der Quadratwurzel in $\sin\varphi_0$ negativ wählen. Es ergibt sich

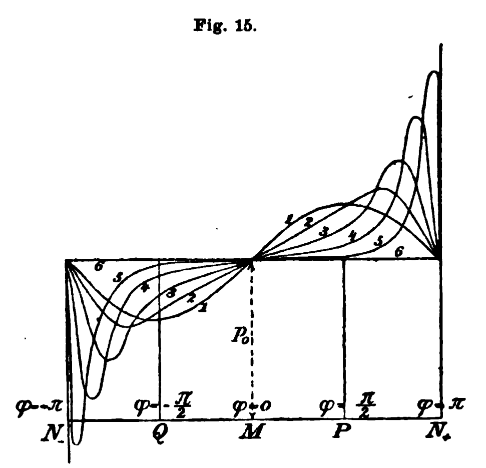
$$p_{\min} = p_0 - \frac{P}{\pi r \alpha}\frac{(\alpha^2-1/4)^{3/2}}{\alpha^2-1}. \tag{59″}$$

Die vorstehenden Formeln ergeben nun im ersten Grenzfalle als extreme Drucke die Werte $p_0 = \pm \infty$. Dabei ist in diesem Falle $\cos \varphi_0 = -1$, $\varphi_0 = \pm \pi$. Während also nach (58') der Druck bei abnehmender Geschwindigkeit im allgemeinen konstant wird, besitzt er an der Unbestimmtheitsstelle $\varphi = \pm \pi$ eine Unstetigkeit und wird in benachbarten Punkten $\pm \infty$.

Man schließt aus den Formeln (59) leicht, daß das Maximum des Druckes gleichmäßig abnimmt, das Minimum gleichmäßig zunimmt, wenn man α stetig von 1 bis ∞ oder die Geschwindigkeit stetig von 0 bis ∞ zunehmen läßt. Ferner zeigt z. B. Gl. (19), daß die Stelle maximalen und minimalen Druckes stetig von $\varphi_0 = \pm \pi$ nach $\varphi_0 = \pm \pi/2$ wandert, wenn α von 1 bis ∞ geht.

Daraufhin läßt sich die Druckverteilung für alle Fälle übersichtlich durch die folgende Fig. 15 darstellen. Als Abszissenachse wählen wir den in eine Gerade abgewickelten Zapfenumfang, als Ordinate tragen wir p auf. Die Mitte der Abszissenachse entspreche der Stelle M größter Schmierschichtdicke ($\varphi = 0$), die Endpunkte N_+ und N_- derselben gehören beide zu der Stelle N kleinster Schmierschichtdicke ($\varphi = \pm \pi$). Mit P und Q ist der tiefste oder höchste Punkt des Zapfenumfanges bezeichnet, so daß also insbesondere P die Stelle bedeutet, in welcher die Linie des Zapfendruckes den Zapfenumfang schneidet.

Fig. 15.



Die einzelnen Druckverteilungsgesetze sind in der Reihenfolge abnehmender Geschwindigkeit mit 1, 2, 3, . . . 6 bezeichnet, so daß die Kurve 1 unserem zweiten Grenzfalle, die Gerade 6 mit einer bei N_+ und N_- aufgesetzten positiven oder negativen unendlich schmalen und unendlich hohen Zacke unserem ersten Grenzfall entspricht.

Man erkennt aus der Figur, wie sich der variable Teil des Druckes bei abnehmender Geschwindigkeit (zunehmender Exzentrizität der Zapfenlage) immer mehr um die kritische Stelle N herum konzentriert. Daß in der Grenze für $\alpha = 1$, wo sich der Zapfen hart an das Lager legt und den Durchfluß des Schmiermittels bei N überhaupt absperrt, an dieser Stelle eine Singularität auftreten muß, ist von vornherein ver-

ständlich. Der konstante Teil p_0 des Druckes ist, da er in unserer Theorie unbestimmt bleibt, für die verschiedenen Kurven der Einfachheit wegen als gleich groß angenommen, worin eine Willkür liegt.

Will man von der in der Figur zugrunde gelegten Größe des Zapfendruckes P zu einem größeren oder kleineren Werte von P übergehen, so hat man nur nötig, die Ordinaten sämtlicher Kurven proportional zu strecken oder zu verkürzen.

Sehr bedenklich muß für die Stichhaltigkeit unserer Theorie das Auftreten *negativen Druckes* erscheinen. Eine Flüssigkeit kann keinen nennenswerten negativen Druck (d. h. Zug) ertragen; sie würde unter dessen Einfluß zerreißen. Wenn wir nun auch annehmen wollen, daß der mittlere Druck p_0, der bei uns unbestimmt blieb, für jeden bestimmten Querschnitt des Lagers einen gewissen positiven Wert besitzt (wobei derselbe übrigens von Querschnitt zu Querschnitt veränderlich sein wird), so gibt es nach Fig. 15 jedenfalls eine untere Grenze für die Geschwindigkeit, nach deren Unterschreitung der variable Bestandteil p_1 des Druckes in der Nähe der Stelle N den positiven Druck p_0 im negativen Sinne überwiegen würde. Unsere Theorie reicht dann nur bis an diese untere Geschwindigkeitsgrenze heran, nicht bis über dieselbe hinaus. Zerreißt nämlich die Ölschicht an der Stelle beginnenden negativen Druckes, so werden die Voraussetzungen hinfällig, aus denen wir die Gleichgewichtslage des Zapfens, die Größe des Reibungsmomentes usw. früher bestimmten. Man wird von hier aus vermuten, daß die Abweichungen zwischen Beobachtung und Theorie, die sich unter anderem in einem starken Anwachsen des Reibungskoeffizienten bei abnehmender Geschwindigkeit zeigten, ihren Grund darin haben mögen, daß die Theorie stillschweigend die Möglichkeit eines negativen Druckes voraussetzte, der vom physikalischen Standpunkte aus ein Unding ist.

Um die Größe des Mittelwertes p_0 und im Zusammenhange damit die Gültigkeitsgrenzen unserer Theorie rechnerisch beurteilen zu können, müßte man die Betrachtung nicht auf den einzelnen Querschnitt beschränken, sondern müßte den Druck auch nach der Längsrichtung des Lagers als veränderlich voraussetzen, also neben $\partial p / \partial \varphi$ das Längsgefälle des Druckes $\partial p / \partial l$ in die Rechnung einführen. Daß man nur auf diesem Wege der Wirklichkeit genau entsprechen kann, zeigen Beobachtungen von Beauchamp Tower, die z. B. in Bachs Maschinenelementen[1]) wiedergegeben sind und die eine Veränderlichkeit des Druckes in der Längsrichtung des Lagers aufweisen. Indessen ist es

1) 4. Abschnitt, Fig. 305, S. 405 der 8. Aufl. Stuttgart 1901.

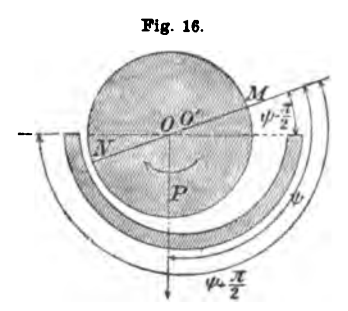
mir einstweilen nicht gelungen, bei einer derartig strengeren Fassung des Problems zu greifbaren Resultaten zu kommen.

§ 7. Halbumschließende Lagerschale.

Wir gehen anhangsweise auf das schon von Osborne Reynolds behandelte Problem ein (vgl. S. 102), bei dem der Zapfen nur zur Hälfte von der Lagerschale umgeben gedacht wird und die Schmierschicht dementsprechend nur auf den halben Zapfenumfang Druckwirkungen übertragen kann. Wir werden für diesen Fall die Rechnungen gegenüber der Reynoldsschen Darstellung wesentlich vereinfachen, obschon sich eine ähnliche Einfachheit wie im Falle des allseitig umschließenden Lagers nicht erreichen läßt.

Es macht keinen wesentlichen Unterschied, ob wir uns den Zapfen von der Lagerschale, wie bei der liegenden Dampfmaschine, oder die Lagerschale vom Zapfen eines Radsatzes getragen denken, wie im Eisenbahnbetriebe. In der Zeichnung (Fig. 16) schließen wir uns an die erstere Vorstellung an. Auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte O und O' von Zapfen und Lagerschale liegt wieder die Stelle kleinster Entfernung N zwischen Zapfen und Lager; von einer Stelle M größter Entfernung kann wegen der nur halbseitigen Ausbildung des Lagers nicht eigentlich die Rede sein. Nichtsdestoweniger können wir uns den zu N diametralen Punkt M auf dem Zapfenumfange markieren und den Winkel φ um den Zapfenmittelpunkt herum von dem Strahle OM aus zählen. Die Richtung des Zapfendruckes möge alsdann durch den Winkel $\varphi = \psi$ bestimmt sein; geht derselbe durch die Mitte der Lagerschale hindurch, so entsprechen den Enden der Lagerschale die Winkel $\varphi = \psi \pm \pi/2$.

Fig. 16.



Man erkennt unmittelbar, daß die Rechnungen des § 2 und 3 auch auf den vorliegenden Fall sich unmittelbar übertragen, daß insbesondere die Formeln (7), (8), (9) ungeändert bestehen bleiben. Dagegen wird die frühere Bestimmung der Konstanten h_0, die auf der Annahme einer in sich zurücklaufenden Schmierschicht beruhte, jetzt ungültig. Statt der Periodizität von p haben wir nämlich jetzt die Bedingung zu stellen, daß der hydrodynamische Druck im Schmiermittel an den Enden der Lagerschale gleich dem Atmosphärendruck werde.

Wir verlangen also, indem wir unter p den Überdruck über eine Atmosphäre verstehen:

$$p = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = \psi \pm \frac{\pi}{2}. \tag{60}$$

Aus Gl. (9) ergibt sich dann:

$$\int\limits_{\psi-\pi/2}^{\psi+\pi/2} \frac{dp}{d\varphi} d\varphi = 0 = 6\lambda r U \int\limits_{\psi-\pi/2}^{\psi+\pi/2} \frac{h-h_0}{h^3} d\varphi,$$

also wegen der Bedeutung von h in (8) bei gleicher Bedeutung von δ, e, α wie früher

$$\int\limits_{\psi-\pi/2}^{\psi+\pi/2} \frac{d\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)^2} - \frac{h_0}{e} \int\limits_{\psi-\pi/2}^{\psi+\pi/2} \frac{d\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)^3} = 0.$$

Führen wir die drei Abkürzungen J_1, J_2, J_3 in der folgenden, gegen früher etwas abweichenden Bedeutung ein

$$J_1 = \int\limits_{\psi-\pi/2}^{\psi+\pi/2} \frac{d\varphi}{\alpha+\cos\varphi}, \quad J_2 = \int\limits_{\psi-\pi/2}^{\psi+\pi/2} \frac{d\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)^2}, \quad J_3 = \int\limits_{\psi-\pi/2}^{\psi+\pi/2} \frac{d\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)^3}, \tag{61}$$

so wird auch jetzt $h_0/e = J_2/J_3$ (s. Gl. (14)). Dabei sind die Integrale J_1, J_2, J_3 jetzt nicht mehr bloße Funktionen von α, sondern Funktionen von α und ψ.

Von den Überlegungen des § 4 läßt sich das geometrische Verfahren vom Anfange des § auf den jetzigen Fall nicht übertragen, weil durch die halbseitige Ausbildung der Lagerschale die Symmetrie der Druckverteilung gestört ist. Dagegen lautet der analytische Ansatz der Gleichgewichtsbedingungen zwischen P und p ebenso wie in den Gl. (41), (42), (43), wobei nur die Integration nicht mehr über den ganzen, sondern über den halben Zapfenumfang zu erstrecken ist. Man bemerke insbesondere, daß bei der Umformung durch teilweise Integration die Glieder $\left[p \begin{smallmatrix}\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{smallmatrix}\right]$ in (42) auch jetzt infolge der Bedingung (60) verschwinden. Unsere zu (43) analogen Gleichgewichtsbedingungen lauten daher

$$\left\{ \begin{aligned} \int\limits_{\psi-\pi/2}^{\psi+\pi/2} \left(\frac{dp}{d\varphi} - q\right) \sin\varphi \, d\varphi &= -\frac{P}{r}\cos\psi, \\ \int\limits_{\psi-\pi/2}^{\psi+\pi/2} \left(\frac{dp}{d\varphi} - q\right) \cos\varphi \, d\varphi &= +\frac{P}{r}\sin\psi. \end{aligned} \right. \tag{62}$$

Wenn wir die bei der Integration fortfallenden oder zu vernachlässigenden Glieder (vgl. S. 123) unterdrücken, erhalten wir hieraus ähnlich wie früher (Gl. (44)):

$$(63)\quad \begin{cases} \int \frac{\sin\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)^2}\,d\varphi - \frac{h_0}{e}\int \frac{\sin\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)^3}\,d\varphi = -\frac{\delta^2 P}{6\lambda\alpha^2 r^2 U}\cos\psi, \\ \int \frac{\cos\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)^2}\,d\varphi - \frac{h_0}{e}\int \frac{\cos\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)^3}\,d\varphi = +\frac{\delta^2 P}{6\lambda\alpha^2 r^2 U}\sin\psi. \end{cases}$$

Die nicht hingeschriebenen Integrationsgrenzen lauten dauernd $\psi \pm \pi/2$. Die Integrale in der ersten Zeile verschwinden nicht mehr wie früher, lassen sich aber leicht auswerten. Bezeichnen wir sie mit i_2 und i_3, so wird

$$(64)\quad \begin{cases} i_2 = \int\limits_{\psi-\pi/2}^{\psi+\pi/2} \frac{\sin\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)^2}\,d\varphi = \frac{2\sin\psi}{\alpha^2-\sin^2\psi}, \\ i_3 = \int\limits_{\psi-\pi/2}^{\psi+\pi/2} \frac{\sin\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)^3}\,d\varphi = \frac{2\alpha\sin\psi}{(\alpha^2-\sin^2\psi)^2}. \end{cases}$$

Ferner lassen sich die Integrale in der zweiten Zeile von (63) auf die in (61) definierten Größen J_1, J_2, J_3 zurückführen und sind (s. die analogen Gl. (45), (45′)) gleich $J_1 - \alpha J_2$ bez. $J_2 - \alpha J_3$. Die Gl. (63) lassen sich daher einfacher so schreiben:

$$(65)\quad \begin{cases} i_2 - \frac{J_2 i_3}{J_3} = -\frac{\delta^2 P}{6\lambda\alpha^2 r^2 U}\cos\psi, \\ J_1 - \frac{J_2^2}{J_3} = +\frac{\delta^2 P}{6\lambda\alpha^2 r^2 U}\sin\psi. \end{cases}$$

Während wir früher *eine* Gleichung (46) zur Bestimmung der *einen* Unbekannten α, nämlich der *Größe* der Exzentrizität der Zapfenlage fanden, haben wir hier *zwei* Gleichungen gefunden zur Bestimmung der *zwei* Unbekannten α und ψ, welche die *Größe* und die *Richtung* der exzentrischen Verschiebung des Zapfenmittelpunktes bestimmen. Als Folge der beiden Gl. (65) ergibt sich noch die von P, U etc. freie Beziehung zwischen α und ψ:

$$(66)\quad (J_1 J_3 - J_2^2)\cos\psi = -(i_2 J_3 - i_3 J_2)\sin\psi.$$

Trotz der verhältnismäßig bequemen Form dieser Gleichung ist an eine formelmäßige Auflösung derselben nicht zu denken. Wir werden daher so vorgehen, daß wir zwei Grenzfälle voranstellen und uns im übrigen durch numerische Rechnung ein Bild der Abhängigkeit zwischen α und ψ in Form einer Tabelle verschaffen.

Dabei ist die Einführung eines Hilfswinkels χ sehr bequem, auf welchen wir folgendermaßen geführt werden. Nach Gl. (16) läßt sich das in (61) definierte Integral J_1 folgendermaßen auswerten:

$$(67)\; J_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\left\{\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right\}.$$

Schreiben wir für die beiden arc tg-Funktionen vorübergehend γ_1 und γ_2, so wird

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\pi}{4}\right), \quad \operatorname{tg}\gamma_2 = -\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\operatorname{ctg}\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

und

$$\operatorname{tg}(\gamma_1-\gamma_2) = \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\,\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{1-\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$$

$$= \sqrt{\alpha^2-1}\,\frac{\sin^2\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\sin\left(\psi+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\cos\psi}.$$

Wir wählen nun unseren Hilfswinkel χ gleich $\gamma_1-\gamma_2$, setzen also:

$$(68)\qquad \operatorname{tg}\chi = \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\cos\psi}.$$

Nach der vorstehenden Umrechnung ist dann

$$(69)\qquad J_1 = \frac{2\chi}{\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

Wir drücken sodann J_2 und J_3 durch χ und α aus. Wir können dabei die Gl. (56′) benutzen, wenn wir in derselben φ durch $\psi \pm \pi/2$ ersetzen und die Differenz der so entstehenden Werte bilden. Drücken wir die Differenz der dabei auftretenden arc tg-Funktionen der kürzeren Schreibweise wegen nach (67) durch J_1 aus, so haben wir

$$J_2 = \frac{\alpha}{\alpha^2-1}J_1 - \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\,\frac{\cos\psi}{\alpha^2-\sin^2\psi},$$

$$J_3 = \frac{2\alpha^2+1}{2(\alpha^2-1)^2}J_1 - \frac{3\alpha^2}{(\alpha^2-1)^2}\,\frac{\cos\psi}{\alpha^2-\sin^2\psi} - \frac{1}{\alpha^2-1}\,\frac{\cos\psi}{\alpha^2-\sin^2\psi}\cdot\frac{\alpha^2+\sin^2\psi}{\alpha^2-\sin^2\psi}.$$

Hier tragen wir den Wert von J_1 aus (69) ein und berechnen nach (68)

$$(70)\qquad \begin{cases} \cos\psi = \sqrt{\alpha^2-1}\,\dfrac{\cos\chi}{\sin\chi}, \quad \alpha^2-\sin^2\psi = \dfrac{\alpha^2-1}{\sin^2\chi}, \\ \dfrac{\alpha^2+\sin^2\psi}{\alpha^2-\sin^2\psi} = \dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2-1}\sin^2\chi - 1; \end{cases}$$

es ergibt sich dann:

$$(71)\qquad \begin{cases} J_2 = \dfrac{2\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}}(\chi - \sin\chi\cos\chi), \\ J_3 = \dfrac{2\alpha^2+1}{(\alpha^2-1)^{5/2}}(\chi - \sin\chi\cos\chi) - \dfrac{2\alpha^2}{(\alpha^2-1)^{5/2}}\sin^3\chi\cos\chi; \end{cases}$$

ferner nach (64) und (70)

$$(72)\qquad \begin{cases} \sin\psi\, i_2 = \dfrac{2(1-\alpha^2\cos^2\chi)}{\alpha^2-1}, \\ \sin\psi\, i_3 = \dfrac{2\alpha(1-\alpha^2\cos^2\chi)\sin^2\chi}{(\alpha^2-1)^2}. \end{cases}$$

Die beiden Grenzfälle, die wir betrachten wollen, sind wieder $\alpha = 1$ und $\alpha = \infty$, d. h. möglichst exzentrische und völlig zentrische Lage des Zapfens im Lager, wobei wir mit dem zweiten Fall beginnen werden.

Der Grenzfall $\alpha = \infty$ und benachbarte Fälle. Wir zeigen zunächst, daß mit $\alpha = \infty$ der Wert unseres Hilfswinkels χ gleich $\pi/2$ wird. Rechnen wir nämlich J_1 nach der Definitionsgleichung (61) für große Werte von α direkt aus, so ergibt sich

$$J_1 = \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\psi-\pi/2}^{\psi+\pi/2}\left(1 - \frac{\cos\varphi}{\alpha} + \cdots\right)d\varphi = \frac{\pi}{\alpha} + \cdots;$$

nach (69) ist aber:

$$\chi = \frac{\sqrt{\alpha^2-1}\cdot J_1}{2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha} + \cdots = \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad \alpha = \infty.$$

Dementsprechend setzen wir für große Werte von α

$$\chi = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$$

und entwickeln die Gl. (71), indem wir noch die etwaigen zweiten Potenzen von ε beibehalten:

$$J_1 = \frac{2}{(\alpha^2-1)^{1/2}}\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right), \quad J_2 = \frac{2\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}}\left(\frac{\pi}{2}+2\varepsilon\right),$$

$$J_3 = \frac{2\alpha^2+1}{(\alpha^2-1)^{5/2}}\left(\frac{\pi}{2}+2\varepsilon\right) + \frac{2\alpha^2}{(\alpha^2-1)^{5/2}}\varepsilon,$$

$$J_1J_3 - J_2^2 = \frac{\frac{1}{2}\pi^2 + 3\pi\varepsilon - 4\varepsilon^2(\alpha^2-1)}{(\alpha^2-1)^3}.$$

Ferner wird nach (68)

$$\cos\psi = -\varepsilon\sqrt{\alpha^2-1}$$

und nach (72)

$$\sin\psi i_2 = \frac{2(1-\alpha^2\varepsilon^2)}{\alpha^2-1}, \quad \sin\psi i_3 = \frac{2\alpha(1-\alpha^2\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)}{(\alpha^2-1)^2},$$

$$\sin\psi(i_2 J_3 - J_2 i_3) = \frac{(1-\alpha^2\varepsilon^2)}{(\alpha^2-1)^{7/2}}(\pi + 4\varepsilon + 2\alpha^2\varepsilon(2+\varepsilon\pi)).$$

Somit ergibt Gl. (66):

$$\varepsilon(\alpha^2-1)\{\tfrac{1}{2}\pi^2 + 3\pi\varepsilon - 4\varepsilon^2(\alpha^2-1)\} = (1-\alpha^2\varepsilon^2)\{\pi + 4\varepsilon + 2\alpha^2\varepsilon(2+\varepsilon\pi)\}.$$

Man erkennt hiernach, daß ε von der Ordnung α^{-2} verschwindet. Vernachlässigt man daraufhin ε sowie $\varepsilon^2\alpha^2$ gegen 1 und 1 gegen α^2, so wird

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon\alpha^2\pi^2 = \pi + 4\alpha^2\varepsilon,$$

also

$$\varepsilon = \frac{\pi}{\frac{1}{2}\pi^2 - 4}\frac{1}{\alpha^2} \quad \text{oder nahezu} \quad \varepsilon = \frac{\pi}{\alpha^2}. \tag{73}$$

Gleichzeitig hat man

$$\cos\psi = -\frac{\pi}{\frac{1}{2}\pi^2 - 4}\frac{1}{\alpha} \quad \text{oder nahezu} \quad \cos\psi = -\frac{\pi}{\alpha}. \tag{73'}$$

In der Grenze für $\alpha = \infty$ wird also $\cos\psi = 0$, $\psi = \pi/2$. Wir sahen ferner, daß in der Grenze $\chi = \pi/2$ war und schließen aus (73), daß $\chi > \pi/2$ für $\alpha < \infty$ ist. Aus der zweiten der Gleichungen (65) entnehmen wir ferner noch den zu $\alpha = \infty$ gehörigen Grenzwert von P/U. Wir haben wegen $\sin\psi = 1$ und den oben angegebenen Werten von J_3 und $J_1 J_3 - J_2^2$ in erster Näherung:

$$\frac{\delta^2 P}{\lambda r^2 U} = 6\alpha^2 \frac{J_1 J_3 - J_2^2}{J_3} = \frac{8\pi}{\alpha} = 0. \tag{74}$$

Der fragliche Grenzfall tritt also ein, wenn P bei endlichem U verschwindet *oder wenn U bei endlichem P unendlich anwächst.*

Der Grenzfall $\alpha = 1$ und benachbarte Fälle. Für $\alpha = 1$ wird nach (68) $\operatorname{tg}\chi = 0$, unter der Voraussetzung, daß $\cos\psi$ nicht oder doch nur von geringerer Ordnung als $\sqrt{\alpha^2-1}$ verschwindet; χ muß alsdann einen der Werte $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ haben. Da χ für große Werte von α größer als $\pi/2$ war und von dem einen nach dem anderen Grenzfall hin sich stetig verändern wird, so vermuten wir, daß dem Grenzfall $\alpha = 1$ der Wert $\chi = \pi$ entsprechen wird. Demzufolge setzen wir für benachbarte Fälle versuchsweise

$$\chi = \pi - \varepsilon$$

und entwickeln $J_1, J_2, \ldots$ nach Potenzen von ε, wobei wir wieder ε^2 beibehalten. Nach (69) und (71) ergibt sich

$$J_1 = \frac{2}{(\alpha^2-1)^{1/2}}(\pi - \varepsilon), \qquad J_2 = \frac{2\alpha\pi}{(\alpha^2-1)^{3/2}},$$

$$J_3 = \frac{(2\alpha^2+1)\pi}{(\alpha^2-1)^{5/2}}, \qquad J_1 J_3 - J_2^2 = \frac{2\pi^2 - 2\pi\varepsilon(2\alpha^2+1)}{(\alpha^2-1)^3}.$$

Ferner ist nach (68) und (72)

$$\cos\psi = -\frac{1}{\varepsilon}(\alpha^2-1)^{1/2},$$

$$\sin\psi\cdot i_2 = 2\left(-1+\frac{\varepsilon^2\alpha^2}{\alpha^2-1}\right),\quad \sin\psi\cdot i_3 = \frac{2\alpha\varepsilon^2}{\alpha^2-1}\left(-1+\frac{\varepsilon^2\alpha^2}{\alpha^2-1}\right),$$

$$\sin\psi(i_2J_3-i_3J_2) = \frac{2\pi}{(\alpha^2-1)^{5/2}}\left(-1+\frac{\varepsilon^2\alpha^2}{\alpha^2-1}\right)(2\alpha^2+1-2\alpha^2\varepsilon^2).$$

Gl. (66) geht daraufhin über in

$$2\pi^2-2\pi\varepsilon(2\alpha^2+1) = 2\pi\varepsilon\left(-1+\frac{\varepsilon^2\alpha^2}{\alpha^2-1}\right)(2\alpha^2+1-2\alpha^2\varepsilon^2).$$

Setzt man $\alpha=1$ außer in dem Nenner α^2-1 und streicht ε^2 gegen 1, außer im Zähler von α^2-1, so ergibt sich

$$\pi-3\varepsilon = 3\varepsilon\left(-1+\frac{\varepsilon^2}{\alpha^2-1}\right),$$

also

(75) $$\varepsilon^3 = \frac{\pi}{3}(\alpha^2-1) \quad\text{oder}\quad \varepsilon = \sqrt[3]{\frac{\pi}{3}}(\alpha^2-1)^{1/3}.$$

Gleichzeitig wird

(75') $$\cos\psi = -\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}(\alpha^2-1)^{1/6}.$$

Für $\alpha=1$ haben wir also auch jetzt $\cos\psi=0$, $\psi=\pi/2$.

Wir fragen uns noch, ebenso wie im vorhergehenden Falle, für welchen Wert von P/U der jetzige Grenzfall eintritt; hierauf antwortet die zweite der Gleichungen (65). Wir setzen in dieser $\sin\psi=1$ und nach den vorangehenden Rechnungen in erster Näherung:

$$J_1J_3-J_2^2 = \frac{2\pi^2}{(\alpha^2-1)^3},\quad J_3 = \frac{3\pi}{(\alpha^2-1)^{5/2}},$$

also wird

(76) $$\frac{\delta^2 P}{\lambda r^2 U} = 6\frac{J_1J_3-J_2^2}{J_3} = \frac{4\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}} = \infty.$$

Der vorliegende Grenzfall findet also statt, wenn P bei endlichem U unendlich anwächst *oder wenn bei endlichem P die Geschwindigkeit U zu Null abnimmt.*

Es handelt sich weiter um die Auflösung unserer Gl. (66) für mittlere Fälle. Wir verfahren dabei so, daß wir unserem Hilfswinkel χ einen beliebigen zwischen $\pi/2$ und π enthaltenen Wert beilegen und die zugehörigen Werte von α und ψ berechnen. Als

Beispiel nehmen wir etwa $\chi = 3\pi/4 = 2{,}36$. Nach (69) bis (72) wird dann:

$$J_1 = \frac{4{,}72}{(\alpha^2-1)^{1/2}}, \quad J_2 = \frac{5{,}72\,\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}}, \quad J_3 = \frac{6{,}22\,\alpha^2 + 2{,}86}{(\alpha^2-1)^{5/2}},$$

$$\cos\psi = -(\alpha^2-1)^{1/2}, \quad \cos\psi(J_1 J_3 - J_2^2) = \frac{3{,}3\,\alpha^2 - 13{,}5}{(\alpha^2-1)^{5/2}},$$

$$\sin\psi\, i_2 = \frac{2-\alpha^2}{\alpha^2-1}, \quad \sin\psi\, i_3 = \frac{\alpha}{2}\,\frac{2-\alpha^2}{(\alpha^2-1)^2},$$

$$\sin\psi(i_2 J_3 - i_3 J_2) = \frac{(2-\alpha^2)(3{,}4\,\alpha^2 + 2{,}9)}{(\alpha^2-1)^{7/2}}.$$

Nach (66) besteht daher für α^2 die folgende quadratische Gleichung:

$$(\alpha^2-1)(3{,}3\,\alpha^2 - 13{,}5) = (\alpha^2-2)(3{,}4\,\alpha^2 + 2{,}9),$$

welche als brauchbare (positive) Wurzel von α^2 liefert:

$$\alpha^2 = 1{,}50, \quad \alpha = 1{,}22.$$

Der zugehörige Wert von ψ ist nach (68)

$$\cos\psi = -0{,}70, \quad \psi = 134^0\,30'.$$

Nach diesem Schema ist die folgende Tabelle zusammengehöriger Werte von χ, α und ψ berechnet worden, der wir die oben besprochenen Grenzfälle hinzufügen:

Tabelle I.

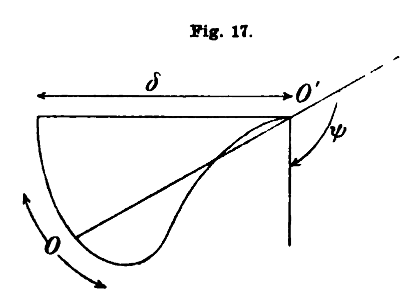
χ	α^2	$\cos\psi$	ψ
$\chi = 180^0$	$\alpha^2 = 1$	$\cos\psi = 0$	$\psi = 90^0$
165^0	1,02	$-0{,}50$	120^0
150^0	1,13	$-0{,}63$	129^0
135^0	1,5	$-0{,}71$	135^0
120^0	2,4	$-0{,}68$	133^0
105^0	6,3	$-0{,}61$	128^0
95^0	33,9	$-0{,}50$	120^0
90^0	∞	0	90^0

Man überzeugt sich noch, daß die zweite und vorletzte Reihe unserer Tabelle bereits durch unsere Näherungsformeln (75) und (73) annähernd gedeckt werden, so daß diese Fälle als solche angesehen werden können, die den Grenzfällen benachbart sind. Z. B. haben wir für $\chi = 165^0$ in Gl. (75) einzutragen $\varepsilon = \pi/12$ und erhalten $\alpha^2 - 1 = \pi^2/576$, $\alpha^2 = 1{,}017$. Ferner entspricht dem Werte $\chi = 95^0$ in Gl. (73) $\varepsilon = \pi/36$ und daher annähernd $\alpha^2 = 36$.

In Fig. 17 ist der Inhalt der vorstehenden Tabelle graphisch erläutert. Der Punkt O' (Mittelpunkt der Lagerschale) ist fest an-

genommen, der Punkt O (Zapfenmittelpunkt) verschiebt sich gegen jenen und wandert z. B. von der in der Figur markierten Lage aus im Sinne des unteren Pfeiles bei wachsender, im Sinne des oberen Pfeiles bei abnehmender Geschwindigkeit. Die Größe der Verschiebung ist $e = \delta/\alpha$, also insbesondere gleich δ für $\alpha = 1$; die Richtung der Verschiebung OO' gegen die vertikale Richtung des Zapfendruckes ist gleich ψ. Auch jetzt weicht der Zapfen, wie man aus der Figur ersieht, hauptsächlich senkrecht gegen den Zapfendruck aus, jedoch kommt im Gegensatz zu § 4 zu der senkrechten Komponente hier im allgemeinen noch eine Verschiebungskomponente im Sinne des Zapfendruckes hinzu.

Fig. 17.



Wir können nun ähnlich wie in § 5 das Reibungsmoment M sowie den Reibungskoeffizienten μ berechnen. Durch die Reibungsgröße q ausgedrückt ergibt sich mit Rücksicht auf (7), wenn wir M wie in § 5 in dem der Umdrehung entgegengesetzten Sinne positiv rechnen:

$$M = -r^2\int q\,d\varphi = \frac{\lambda\alpha r^2 U}{\delta}\left\{4\int\frac{d\varphi}{\alpha+\cos\varphi} - 3\frac{h_0}{e}\int\frac{d\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)^2}\right\},$$

wobei die Integrale von $\psi - \pi/2$ bis $\psi + \pi/2$ zu erstrecken sind. Führen wir die Größen J_1, J_2 aus Gl. (61) ein, so wird

$$M = \frac{\lambda\alpha r^2 U}{\delta}\left(4J_1 - 3\frac{J_2^2}{J_3}\right). \tag{77}$$

Indem wir ferner die zweite der Gleichungen (65) benutzen, berechnen wir

$$\mu = \frac{M}{Pr} = \frac{\delta}{r}\,\frac{\sin\psi}{6\alpha}\left(\frac{J_1 J_3}{J_1 J_3 - J_2^2} + 3\right). \tag{78}$$

Wir betrachten zunächst wieder die beiden Grenzfälle $\alpha = \infty$ und $\alpha = 1$.

Der Grenzfall $a = \infty$. Aus den obigen Rechnungen für diesen Grenzfall ergibt sich unter Vernachlässigung von 1 gegen α und ε gegen 1:

$$J_1 = \frac{\pi}{\alpha},\quad J_2 = \frac{\pi}{\alpha^2},\quad J_3 = \frac{\pi}{\alpha^3},$$

daher wird

$$M_\infty = \frac{\lambda\pi r^2 U}{\delta},\quad \mu_\infty = \frac{\lambda\pi r U}{\delta P}. \tag{79}$$

Diese Formel entspricht genau der Petroffschen Gl. (II) von S. 99, indem wegen der halbumschließenden Lagerschale die benetzte Fläche jetzt zu $F = \pi r$ zu rechnen ist.

Der Grenzfall $a = 1$. In diesem Falle gehen wir von Gl. (78) aus und setzen die für den vorliegenden Grenzfall oben gefundenen Werte ein. Da $\cos\psi = 0$ war, wird jetzt $\sin\psi = 1$. Es ergab sich ferner, wenn wir ε vernachlässigen und, außer in den Nennern, $\alpha = 1$ setzen:

$$J_1 = \frac{2\pi}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}}, \quad J_3 = \frac{3\pi}{(\alpha^2 - 1)^{5/2}}, \quad J_1 J_3 - J_2^2 = \frac{2\pi^2}{(\alpha^2 - 1)^3}, \quad \frac{J_1 J_3}{J_1 J_3 - J_2^2} = 3;$$

mithin folgt, wenn wir die Werte von μ und M in diesem Grenzfalle durch den Index 0 auszeichnen („Reibungskoeffizient und Reibungsmoment der Ruhe"):

$$\mu_0 = \frac{\delta}{r}, \quad M_0 = \mu_0 r P. \tag{80}$$

Diese Formel entspricht genau dem gewöhnlichen Ansatz (I) von S. 99; die geometrische Bedeutung des Reibungskoeffizienten der Ruhe ist dabei dieselbe wie im Falle einer allseitig umschließenden Lagerschale.

Wir berechnen sodann einige zwischen unseren Grenzfällen enthaltene Zwischenwerte von μ, indem wir uns den Wert des Hilfswinkels χ willkürlich vorgeben und nach der zweiten Gl. (65) bez. nach Gl. (78) die zugehörigen Werte von U und μ aufsuchen. Das Resultat der Rechnung enthält die folgende Tabelle, die sich in der Anordnung der χ-Werte an die Tabelle I anschließt:

Tabelle II.

$\chi =$	$\alpha^2 =$	$U =$	$\mu =$
180^0	1	0	μ_0
165^0	1,02	$\frac{\delta^2 P}{\lambda r^2}$ 0,012	$\mu_0 \cdot 0{,}94$
150^0	1,13	„ 0,04	„ 0,93
135^0	1,5	„ 0,08	„ 0,92
120^0	2,4	„ 0,14	„ 1,00
105^0	6,3	„ 0,29	„ 1,34
95^0	33,9	„ 0,62	„ 2,17
90^0	∞	„ ∞	„ ∞

Würden wir μ als Funktion von U bei festgehaltenem P auftragen, so würde sich ein ähnliches Bild wie in Fig. 10 ergeben: *Von dem Größtwerte μ_0 bei $U = 0$ fällt die Kurve des Reibungskoeffizienten bis zu einem Werte $\mu_{\min}$, der etwa 8% niedriger als μ_0 liegt; von da ab erfolgt ein allmählicher Anstieg und für unbegrenzt wachsendes U eine asymptotische Annäherung an die Gerade:*

$$\mu = \frac{\lambda \pi r}{\delta P} U.$$

Es gibt also auch jetzt eine gewisse *Übergangsgeschwindigkeit* $U_{\min}$, für welche der Reibungskoeffizient seinen kleinstmöglichen Wert annimmt. Nach unserer Tabelle liegt dieser Wert etwa bei

$$U = 0{,}08 \frac{\delta^2 P}{\lambda r^2} = \frac{1}{12{,}5} \frac{\delta^2 P}{\lambda r^2};$$

(vgl. hierzu den früher gefundenen analogen Wert aus Gl. (54)). *Auch jetzt wächst der Betrag der Übergangsgeschwindigkeit mit wachsendem Zapfendrucke und mit zunehmender Dünnflüssigkeit des Schmiermittels an.*

Auf die graphische Darstellung der Abhängigkeit zwischen μ und U sowie zwischen M und U oder μ und P können wir hier verzichten, da die betr. Figuren ähnlich aussehen würden wie die früheren Figuren 10, 11 und 12. Hinsichtlich des Grades der Übereinstimmung und Nichtübereinstimmung unserer jetzigen Ergebnisse mit den Beobachtungskurven (Fig. 13) ist dasselbe zu sagen wie in § 5.

Schließlich soll auch für den Fall der halben Lagerschale im Anschluß an § 6 die Verteilung des hydrodynamischen Druckes p über den von der Lagerschale umschlossenen Teil des Zapfenumfanges studiert werden, wenigstens soweit, daß die Frage entschieden werden kann, ob unsere Formeln das Auftreten negativen Druckes ergeben oder nicht.

Wir berechnen zu dem Ende vorerst die Lage der Extremwerte des Druckes p. Diese treten nach Gl. (9) an denjenigen Stellen auf, wo die Schmierschicht die Dicke h_0 hat. Bezeichnen wir den zu diesen Stellen gehörigen Winkel φ wie früher (S. 109) mit $\pm\varphi_0$, so ergibt sich

$$(81) \qquad \frac{h_0}{e} = \frac{J_2}{J_3} = \alpha + \cos\varphi_0 \quad \text{oder} \quad \cos\varphi_0 = \frac{J_2}{J_3} - \alpha.$$

Die Größen J_2 und J_3 sind dabei natürlich jetzt durch die Formeln (61) oder mittels des Hilfswinkels χ durch die Formeln (71) erklärt.

Zunächst ergibt sich für die beiden Grenzfälle $\alpha = 1$ und $\alpha = \infty$ mit Benutzung der Ergebnisse von S. 142 bis 144

$$\alpha = 1: \frac{J_2}{J_3} = \frac{2}{3}(\alpha^2 - 1), \quad \cos\varphi_0 = -1, \quad \varphi_0 = \pm\pi.$$

$$\alpha = \infty: \frac{J_2}{J_3} = \alpha\frac{\pi/2 + 2\varepsilon}{\pi/2 + 3\varepsilon} = \alpha\left(1 - \frac{2\varepsilon}{\pi}\right) = \alpha\left(1 - \frac{2}{\alpha^2}\right), \quad \cos\varphi_0 = -\frac{2}{\alpha},$$
$$\varphi_0 = \pm\pi/2.$$

Der Ort größten Druckes p wandert also mit wachsender Geschwindigkeit von der Stelle größter Annäherung zwischen Zapfen und Lagerschale ($\varphi = \pi$) nach der Mitte der Lagerschale, d. h. nach derjenigen Stelle hin, wo die Richtung des Zapfendruckes die Lagerschale trifft.

Der Ort kleinsten Druckes liegt hinsichtlich des Durchmessers $O'O$ symmetrisch gegen den Ort größten Druckes.

Des genaueren soll der Ort größten oder kleinsten Druckes für verschiedene Werte von χ wieder durch eine Tabelle bestimmt werden. Es ist nur nötig, die Ausdrücke (71) in die Gl. (81) für $\cos\varphi_0$ einzutragen. Neben $\cos\varphi_0$ notieren wir die zugehörigen Werte von $\sin\psi$, die unmittelbar aus der Tabelle von S. 145 folgen. Es ergibt sich:

Tabelle III.

$\chi = 180^0$	$\cos\varphi_0 = -1$	$\sin\psi = 1$
165^0	$-0{,}998$	0,87
150^0	$-0{,}98$	0,78
135^0	$-0{,}93$	0,71
120^0	$-0{,}88$	0,73
105^0	$-0{,}72$	0,79
95^0	$-0{,}5$	0,9
90^0	0	1

Diese Zahlen genügen bereits um zu entscheiden, wann unsere Theorie negativen Druck innerhalb des Schmiermittels ergibt. In Fig. 18 ist der von der Lagerschale umschlossene Teil des Zapfenumfanges in eine Gerade abgewickelt. Die Endpunkte der Geraden sind dementsprechend mit $\psi - \pi/2$ und $\psi + \pi/2$, die Mitte derselben mit ψ bezeichnet. Da nach Tabelle II ψ stets zwischen $\pi/2$ und π liegt, sind die Marken $\pi/2$ und π zu beiden Seiten der Marke ψ angebracht. Ferner folgt aus der vorstehenden Tabelle, daß φ_0 dauernd zwischen $\pi/2$ und π liegt. Dem Winkel φ_0 entspricht das Maximum des Druckes, welches notwendig positiv ist, da p an den Grenzen der Lagerschale verschwindet. Das Minimum des Druckes, welches notwendig negativ ist, entspricht dem Winkel $2\pi - \varphi_0$. Es wird darauf ankommen, ob dieser Winkel zu einem Punkte des von der Lagerschale umschlossenen Zapfenumfanges gehört oder nicht, ob also $2\pi - \varphi_0 \lesseqgtr \psi + \pi/2$ oder, was dasselbe ist, ob

Fig. 18.

$$\pi - \varphi_0 \lesseqgtr \psi - \pi/2. \tag{82}$$

Gilt das obere Zeichen, so tritt das Minimum innerhalb des Gebietes $\varphi = \psi - \pi/2$ bis $\varphi = \psi + \pi/2$ auf und unsere Theorie liefert für die Stelle dieses Minimums und für seine Umgebung negativen Druck.

Gilt das untere Zeichen, so liegt das Minimum außerhalb dieses Gebietes, d. h. es tritt in unserer Schmierschicht überhaupt nicht in Erscheinung; negative Drucke sind dann von unserer Theorie ausgeschlossen. Da die Winkel $\pi - \varphi_0$ sowie $\psi - \pi/2$ nach den vorausgehenden Tabellen beide zwischen 0 und $\pi/2$ liegen, und da der Kosinus zwischen 0 und $\pi/2$ mit wachsendem Winkel abnimmt, können wir die Ungleichung (82) auch so umschreiben:

$$\cos(\pi - \varphi_0) \gtrless \sin\psi \tag{82'}$$

oder auch

$$-\cos\varphi_0 \gtrless \sin\psi. \tag{82''}$$

Unsere Tabelle zeigt nun, daß bis $\chi = 120^0$

$$-\cos\varphi_0 > \sin\psi$$

ist, daß aber zwischen $\chi = 120^0$ und $\chi = 105^0$

$$-\cos\varphi_0 = \sin\psi$$

wird. Mit Hinzuziehung der Tabelle II können wir daher sagen: Für hinreichend große Geschwindigkeit, nämlich jedenfalls von $U \geqq 0{,}29\frac{\delta^2 P}{\lambda r^2}$ ab, haben wir sicher durchweg positiven Druck; für kleine Geschwindigkeiten, nämlich jedenfalls für $U \leqq 0{,}14\frac{\delta^2 P}{\lambda r^2}$, würde unsere Theorie das Auftreten negativen Druckes ergeben. Unsere Theorie tritt also für kleine Werte der Geschwindigkeit in einen bedenklichen Widerspruch mit den wohlverbürgten physikalischen Anschauungen über die Natur der Flüssigkeiten. Wir können nicht umhin anzunehmen, daß für so kleine Geschwindigkeitsbeträge die Schmierschicht zurückweichen muß und daß sie dann nicht mehr den ganzen Zwischenraum zwischen Lagerschale und Zapfen ausfüllen kann. Allerdings werden damit gleichzeitig unsere Rechnungen bezüglich der Lage des Zapfens und der Größe des Reibungsmomentes für diese kleinen Geschwindigkeiten illusorisch, da dieselben wesentlich auf der Annahme beruhten, daß die Schmierschicht an dem halben Zapfenumfang mit Druck anhaftet.

Es erübrigt noch, das Analogon zu Fig. 15 für den vorliegenden Fall zu verzeichnen. Auf Grund der letzten Erörterungen werden wir dabei nur die Druckverteilung für große Werte von U, bei der die Schwierigkeit des negativen Druckes nicht auftritt, genauer bestimmen und uns für kleine Werte von U auf die Analogie mit Fig. 15 berufen.

Allgemein ist die Druckverteilung nach (9) durch die folgende Formel bestimmt (s. auch Gl. (56)), wo $p_0 = 0$ zu setzen und als untere Integrationsgrenze $\psi - \pi/2$ zu schreiben ist:

$$p = \frac{6\lambda r \alpha^2 U}{\delta^2}\left\{\int\limits_{\psi-\pi/2}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)^2} - \frac{h_0}{e}\int\limits_{\psi-\pi/2}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)^3}\right\}.$$

Unter der Annahme eines großen Wertes von α können wir die hier vorkommenden Integrale folgendermaßen entwickeln:

$$\alpha^2\int\limits_{\psi-\pi/2}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)^2} = \int\limits_{\psi-\pi/2}^{\varphi}\left(1 - 2\frac{\cos\varphi}{\alpha} + \cdots\right)d\varphi$$

$$= \varphi - \psi + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\alpha}(\sin\varphi + \cos\psi) + \cdots,$$

$$\alpha^2\frac{h_0}{e}\int\limits_{\psi-\pi/2}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(\alpha+\cos\varphi)^3} = \frac{h_0}{\alpha e}\int\limits_{\psi-\pi/2}^{\varphi}\left(1 - 3\frac{\cos\varphi}{\alpha} + \cdots\right)d\varphi$$

$$= \frac{h_0}{\alpha e}\left(\varphi - \psi + \frac{\pi}{2} - \frac{3}{\alpha}(\sin\varphi + \cos\psi) + \cdots\right).$$

Der Faktor vor der letzten Klammer ist gleich 1, weil $h_0/e = J_2/J_3$ für große Werte von α gleich α wird (vgl. S. 146). Daraufhin wird zunächst

$$p = \frac{6\lambda r U}{\alpha\delta^2}(\sin\varphi + \cos\psi).$$

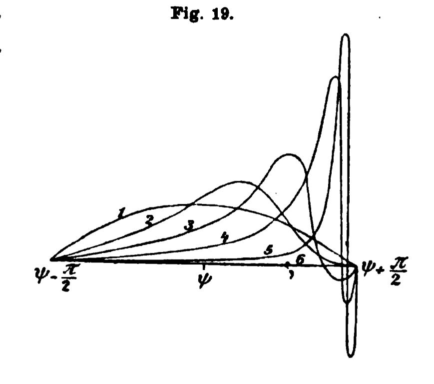
Es ist aber nach Gl. (73') $\cos\psi$ für $\alpha = \infty$ Null. Ferner ist nach der zweiten Gl. (65) und nach S. 142:

$$\frac{6\lambda r U}{\alpha\delta^2} = \frac{P}{r}\frac{J_3}{\alpha^3(J_1 J_3 - J_2^2)} = \frac{2P}{\pi r}.$$

Somit wird schließlich für $\alpha = \infty$

$$p = \frac{2P}{\pi r}\sin\varphi.$$

Fig. 19.



In diesem Grenzfall verteilt sich also der Druck p symmetrisch um die Mitte der Lagerschale. (Kurve 1 in Fig. 19.) Dagegen würde er sich für abnehmende Werte von α oder U nach der Stelle dünnster Schmierschicht hin konzentrieren. Unsere Figur gibt in den Kurven 2, 3, 4 ... ein schematisches Bild hiervon und erläutert gleichzeitig das Auftreten negativen Druckes für kleine Werte von U, welches unsere Formeln verlangen, die Konstitution der Flüssigkeit aber nicht zu leisten imstande sein würde.

Der Inhalt dieses § deckt sich den Ergebnissen nach wesentlich mit der früher genannten Arbeit von Osborne Reynolds; in der Ableitung dieser Ergebnisse aber sind wir vollständig von Reynolds abgewichen, indem wir es einfacher fanden, an die Stelle von recht schlecht konvergenten[1]) Reihenentwickelungen die unmittelbare, numerische Rechnung treten zu lassen.

§ 8. Schlußbemerkungen.

Ich bin mir wohl bewußt und habe bereits an mehreren Stellen (S. 102, 132, 137, 151) darauf hingewiesen, daß die vorstehende Theorie nicht in allen Stücken den wirklichen Vorgängen der Zapfenreibung gerecht wird. Als Ziel meiner Untersuchung möchte ich bezeichnen: *zu zeigen, wie weit man mit der reinen hydrodynamischen Theorie kommt.* Von der Hinzunahme von Hilfsannahmen und der Berücksichtigung naheliegender Korrektionen wurde dabei absichtlich abgesehen. Solche mögen hier zum Schluß, nebst einigen anschließenden Bemerkungen, zusammengestellt werden.

Zweifellos wird bei großen Belastungen eine *elastische Deformation der Lagerschale* eintreten; auch wird durch Temperaturänderungen die Lagerschale in anderer Weise gedehnt, als der Zapfen. Es folgt daraus, daß unsere mittlere Schichtdicke δ nicht konstant ist, sondern einerseits mit der Belastung, anderseits mit der Temperatur und daher auch mittelbar mit der Geschwindigkeit der Zapfenumdrehung veränderlich ist. Reynolds sucht (a. a. O., Sektion VIII) diese Abhängigkeit an Hand der Towerschen Experimente zu bestimmen, während wir dieselbe unberücksichtigt gelassen haben.

Von großem Einfluß auf die innere Reibung der Flüssigkeiten ist bekanntlich die *Temperatur*, von der wir im Vorangehenden so gut wie garnicht gesprochen haben. Dabei handelt es sich nicht sowohl um die Temperatur des Lagers, als um die der Schmierschicht. Unsere Viskositätskonstante λ nimmt nach Beobachtungen von Reynolds bei Olivenöl (a. a. O. § 11 und 12) auf etwa $^2/_3$ ihres ursprünglichen Wertes ab, wenn die Temperatur von 16° auf 49° steigt. Da nun die Reibungsarbeit innerhalb der Schmierschicht verrichtet wird und sich zum guten Teil in eine Temperaturerhöhung derselben umsetzen dürfte, so muß sich namentlich bei hohen Umdrehungszahlen λ merklich verringern. Unsere für ein konstantes λ konstruierten Figuren 11 und 12 sind also in dem Sinne zu korrigieren, daß die Werte von μ und M bei großen Geschwindigkeiten merklich niedriger ausfallen, als in jenen Figuren

1) Petroff bemerkt in der ebenfalls bereits zit. Arbeit (Petersburger Akademie 1900, Vol. X, Nr. 4, S. 16), daß man im allgemeinen nicht weniger als 28 Glieder der fraglichen Reihen berücksichtigen muß.

gezeichnet. Es läßt sich sogar theoretisch verstehen, daß das von der Theorie verlangte Anwachsen des Reibungskoeffizienten mit zunehmender Geschwindigkeit durch das Anwachsen der Temperatur und die Verringerung von λ wett gemacht wird, und daß der Reibungskoeffizient einer von der Geschwindigkeit unabhängigen Grenze zustreben kann, wie Lasche gefunden hat (a. a. O., vgl. bes. Fig. 29).

Unsere Unkenntnis der wahren *Temperatur der Schmierschicht*, die vielleicht wesentlich höher liegt, als die Temperatur des Lagermetalls, erschwert ersichtlich den Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung. Eine bedeutende Schwierigkeit für diesen Vergleich liegt ferner darin, daß in unsere Formeln die *mittlere Schmierschichtdicke* δ eingeht, die in jedem Falle nur sehr ungenau festzustellen und überdies, wie oben bemerkt, mit Belastung und Temperatur veränderlich ist.

Unsere Theorie spricht garnicht von dem *Material des Zapfens oder des Lagers*. Daß es in der Tat hierauf im normalen Betriebe nicht wesentlich ankommt, zeigen die Versuche von Lasche (a. a. O. Fig. 31 und 32). Der Vorgang des „Einlaufens“, der in einer Anpassung der Lagerschale an den Zapfen besteht und bei dem das Material eine wesentliche Rolle spielt, liegt außerhalb unserer Betrachtungen.

In den Formeln von Petroff (vgl. die früher zit. Neue Theorie der Reibung S. 96 ff.) kommt außer der inneren Reibung des Schmiermittels noch eine „äußere Reibung“ vor, welche dem Schlüpfen des Schmiermittels auf den Oberflächen von Zapfen oder Lagerschale proportional gesetzt wird. Bei uns (und ebenso bei Reynolds) ist von einem solchen Schlüpfen niemals die Rede. Vielmehr nehmen wir durchweg an, daß das Schmiermittel an den Oberflächen von Zapfen und Lagerschale *haftet*, womit die Einführung einer „äußeren Reibung“ von selbst entfällt. Tatsächlich hat Warburg[1]) durch Beobachtung der Ausflußmengen an Kapillarröhren festgestellt, daß selbst bei einer nicht netzenden Flüssigkeit wie Quecksilber kein Schlüpfen gegen die Wände der Glasröhre auftritt. Daß ein solches zwischen Öl und Metall vorkommen könnte, ist physikalisch höchst unwahrscheinlich.

Die Annahme des vollkommenen Haftens läßt sich auch so ausdrücken: *Die Adhäsion zwischen dem Schmiermittel und den Metalloberflächen wird als unendlich groß vorausgesetzt.* In diesem Sinne gebraucht, hat das Wort Adhäsion einen einfachen physikalischen Sinn. Andrerseits wird von mangelnder Adhäsion in nicht ganz klarer Weise vielfach dann gesprochen, wenn die Schmierung bei gewissen Geschwindigkeits- oder Belastungsverhältnissen unzureichend wird. Wahr-

1) Ann. Phys. Chem. (Poggendorff) 140 (1870), S. 367.



scheinlich tritt in solchen Fällen ein *Zerreißen der Schmierschicht* ein (bei umschließenden Lagern) oder ein *Zurückweichen* von den Enden der Lagerschale (bei teilweise umschließenden Lagern), wofür ja unsere Theorie (vgl. den Schluß von § 6 und 7) bestimmte Anhaltspunkte liefert. Um in theoretischer Hinsicht Genaueres über diesen Fall aus sagen zu können, müßte man neben Größe und Richtung der Zapfenexzentrizität die *Grenzen der Schmierschicht* in unsere Gleichungen als *Unbekannte* einführen und müßte diese Unbekannten durch geeignete mechanische Prinzipien zu bestimmen suchen. Die Aufgabe würde dadurch außerordentlich verwickelt werden.

Das notorische Anwachsen des Reibungsmomentes bei abnehmender Geschwindigkeit (z. B. beim Auslaufen) deutet man wohl meist dahin, daß sich bei kleinen Geschwindigkeiten die gewöhnliche *trockene Reibung* zwischen dem Material des Zapfens und der Lagerschale bemerklich machen soll. Demgegenüber sahen wir, daß die reine hydrodynamische Theorie ohne fremde Hilfsannahmen von diesem Anwachsen Rechenschaft geben kann und daß auch die erfahrungsmäßige *Proportionalität zwischen Reibungsmoment und Zapfendruck bei hinreichend kleinen Geschwindigkeiten* von selbst zum Vorschein kommt. Hierin sehe ich das interessanteste Ergebnis der hydrodynamischen Theorie.

Es bietet sich von hieraus die lockende Aussicht, die *trockene Reibung* überhaupt auf *Flüssigkeitsreibung* zurückzuführen. Als „Schmiermittel" wäre alsdann bei den gewöhnlichen Versuchen über gleitende Reibung die Luft anzusehen. Da ihre Viskositätskonstante äußerst klein ist, verglichen mit der entsprechenden Konstanten der Öle oder Fette, so würde die „Übergangsgeschwindigkeit", in dem früheren Sinne definiert, für Luft äußerst hoch liegen; infolgedessen würde die Proportionalität zwischen dem Reibungswiderstand und dem gegenseitigen Normaldruck der gleitenden Körper für einen weit größeren Geschwindigkeitsbereich, ja vielleicht für alle realisierbaren Geschwindigkeiten gelten, wie es die gewöhnlichen Coulombschen Reibungsgesetze verlangen. Die letzteren würden sich auf diese Weise als hydrodynamische Folgerungen ergeben. Indessen sind wir zur Zeit noch weit davon entfernt, diese Auffassung als eine experimentell begründete empfehlen zu können.[1])

Eine wichtige Folgerung der Theorie, die sich im großen und ganzen in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung befindet, ist diese: *Es kommt nicht auf die Geschwindigkeit allein oder nicht auf den Zapfendruck allein an, sondern auf das Verhältnis beider* oder, genauer gesagt,

---

1) Warburg und v. Babo (Ann. Phys. Chem. (Wiedemann) 2 (1877), S. 406) sprechen sich gegen diese Auffassung aus, da sie annehmen, daß das Resultat der Flüssigkeitsreibung allemal der Geschwindigkeit proportional sein müsse. Nach unseren Überlegungen bei der Zapfenreibung gilt dieses aber nicht ausnahmslos.

auf das Verhältnis $Ur^2\lambda/P\delta^2$, welches eine unbenannte Zahl ist. Man hat daher allgemein gesprochen (bei gleichbleibender Temperatur und gleichbleibenden Lagerdimensionen) dieselbe Reibung zu erwarten bei mäßiger Geschwindigkeit und hohem Zapfendruck, wie bei kleiner Geschwindigkeit und mäßigem Zapfendruck. Ersetzt man das Schmiermittel durch ein dünnflüssigeres, so ist der Einfluß auf die Reibung derselbe, als ob man die Geschwindigkeit verringert oder den Zapfendruck vermehrt usf. Namentlich in dem Minimalwerte des Reibungskoeffizienten und den zugehörigen Werten von Übergangsgeschwindigkeit und Übergangsdruck kommt diese verhältnismäßige Abhängigkeit zum Ausdruck.

Schließlich möge noch eine spezielle Folgerung der Theorie erwähnt werden, die sich in der Erfahrung wenigstens qualitativ zu bestätigen scheint. Die Stelle geringster Entfernung zwischen Zapfen und Lager ist nach der Theorie bei einem ganz umschließenden Lager von der Richtung des Zapfendruckes aus um 90° *im Sinne* der Umdrehung verschoben; in demselben Sinne ist auch die Stelle größten hydrodynamischen Druckes gegen den Zapfendruck versetzt, und zwar mehr oder weniger, je nachdem die Geschwindigkeit kleiner oder größer ist. Bei einem halbumschließenden Lager liegen die Verhältnisse dem Sinne nach ebenso, nur beträgt die Verschiebung nach Tab. II und III auch für die Stelle geringster Entfernung im allgemeinen keine vollen 90°. Dagegen müßte vom Standpunkte der trockenen Reibung aus, wie bereits in der Einleitung bemerkt, die Auflagestelle gerade im umgekehrten Sinne verschoben sein. Es hat nun Herr Reg.-Bauf. Becker die Freundlichkeit gehabt, in der Eisenbahnhauptwerkstätte Witten im Frühjahr letzten Jahres die zur Reparatur eingelieferten Lokomotiven, soweit sie ihrer Bauart nach immer in dem gleichen Sinne fahren, auf ihre Lager hin zu untersuchen. Derjenige Bereich der Lagerschale, wo dieselbe hauptsächlich getragen hat, läßt sich aus der Oberflächenbeschaffenheit derselben (Färbung, Glättung) deutlich erkennen. Dabei zeigte sich, daß von 20 zur Untersuchung geeigneten Lagern, im Sinne der Umdrehung gesprochen, 16 Lager mehr *vorn*, nur 2 mehr *hinten* getragen hatten, während bei den übrigen 2 Lagern die Sache unentschieden blieb.[1]) Bedenkt man, daß Verunreinigungen und Ungenauigkeiten in der Herstellung der Lager hierbei einen wesentlichen Einfluß haben können, so wird man das genannte Ergebnis als eine befriedigende Bestätigung der Theorie ansehen dürfen. Von der ausführlicheren Veröffentlichung des Versuchsmaterials soll indessen an dieser Stelle abgesehen werden, da dasselbe doch nur eine vorläufige Bedeutung hat.

1) Bei einer späteren Fortsetzung der Versuchsreihe auf weitere 20 Lager waren die Ergebnisse: 14 mehr vorn, 5 mehr hinten, 1 unentschieden.



Kleinere Mitteilungen.

Statische Eigenschaft eines Systems von Punkten, für die eine beliebige Funktion ihrer Lage ein Minimum ist.

In einer kürzlich veröffentlichten Arbeit über „Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen“[1]) hat Herr Finsterwalder mit Hilfe der Vektorenrechnung nebenbei den merkwürdigen Satz bewiesen: *Wenn sich zwei Punkthaufen möglichst nahe liegen, bilden die kürzesten Abstände beider, als Kräfte aufgefaßt, ein Gleichgewichtssystem.* Hierbei wird den Punktsystemen eine möglichst nahe Lage zugeschrieben, wenn die Summe der Quadrate der Abstände entsprechender Punkte beider Systeme ein Minimum ist.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß jener Satz verallgemeinert werden kann. Die Punkte des einen Systems als fest, die des andern als beweglich betrachtend, wollen wir anstelle der Quadratsumme der Abstände der beweglichen Punkte von den festen eine beliebige Funktion eines Systems beweglicher Punkte nehmen. Läßt man irgend einen dieser Punkte allein sich bewegen, aber so, daß die gegebene Funktion konstant bleibt, so beschreibt er gewissermaßen eine partielle Niveaufläche. Wir denken uns eine in diesem Punkt angreifende Kraft, welche die Richtung des schnellsten Wachstums der Funktion hat (also in die Normale der durch den Punkt gehenden partiellen Niveaufläche fällt) und deren Intensität gleich der in dieser Richtung genommenen partiellen Ableitung der Funktion ist. Es werde diese Kraft die partielle Ableitungskraft der Funktion für diesen Punkt genannt. Dann besteht der Satz:

Bei einem Minimum der gegebenen Funktion bilden die zu den einzelnen Punkten gehörigen partiellen Ableitungskräfte ein Gleichgewichtssystem.

Denn bei irgend welchen Verrückungen der Punkte ist die gesamte, von den Ableitungskräften geleistete Arbeit offenbar gleich der zugehörigen Variation der gegebenen Funktion. Diese Variation muß, wenn ein Minimum vorhanden sein soll, bei allen virtuellen Verrückungen der Punkte verschwinden, also müssen die genannten Kräfte sich dann im Gleichgewicht befinden. Da zu den möglichen Verrückungen insbesondere alle die gehören, bei denen die Punkte sich als ein starres System bewegen, so bilden die fraglichen Kräfte ein Gleichgewichtssystem im gewöhnlichen Sinne des Worts.

Nimmt man als Funktion der beweglichen Punkte die Quadratsumme ihrer Abstände von ebenso vielen festen Punkten, so ergibt sich genau der

1) Abh. der K. Bayer. Akademie der Wiss. II. Kl. XXII. Bd. II. Abt. S. 225—260; der fragliche Satz steht auf S. 247.



Finsterwaldersche Satz. Statt der Summe der Quadrate der Abstände könnte man auch die Summe der einfachen Abstände in Betracht ziehen, dann würden die Ableitungskräfte zwar auch in die Verbindungslinien der festen Punkte mit den beweglichen fallen, aber alle die Intensität Eins erhalten.

Stuttgart. R. MEHMKE.

Preisaufgaben aus der Angewandten Mathematik und Physik für 1905.[1]

Académie des Sciences de Paris. Prix Fourneyron (1000 Frs.): Etudes théorique ou expérimentale des turbines à vapeur (wiederholt).

Prix Pierre Guzman (100000 Frs.): Mme veuve Guzman a légué à l'Académie des Sciences une somme de cent mille francs pour la fondation d'un prix qui portera le nom de prix Pierre Guzman, en souvenir de son fils, et sera décerné à celui qui aura trouvé le moyen de communiquer avec un astre autre que la planète Mars. Prévoyant que le prix de cent mille francs ne serait pas décerné tout de suite la fondatrice a voulu, jusqu'à ce que ce prix fût gagné, que les intérêts du capital, cumulés pendant cinq années, formassent un prix toujours sous le nom de Pierre Guzman, qui serait décerné à un savant français, ou étranger, qui aurait fait faire un progrès important à l'Astronomie. Le prix quinquennal, représenté par les intérêts du capital, sera décerné, s'il y a lieu, pour la première fois en 1905.

Prix G. de Pontecoulant (700 Frs.): Ce prix biennal, destiné à encourager les recherches de Mécanique céleste, sera décerné dans la séance publique annuelle de 1905.

Bücherschau.

F. Nušl et **J. J. Frič. Étude sur l'appareil circumzénithal.** Bulletin international de l'académie des sciences de Bohême, 1903. Prague 1903. 8⁰. 64 S. Mit 3 Tafeln.

Für jene Klasse von Methoden der geographischen Ortsbestimmung, die die Beobachtung von Sterndurchgängen durch den gleichen Höhenkreis als Beobachtungselement voraussetzen, sind in neuerer Zeit mehrfach spezielle Instrumente angegeben worden. Zu diesen zählt auch der von den beiden czechischen Astronomen Nušl und Frič konstruierte Circumzenital-Apparat.

Vor einem horizontal gelagerten Fernrohr ist mit gleichfalls horizontal gerichteter Kante ein Prisma angebracht, dessen beide dem Fernrohr zugekehrten Flächen versilbert sind. Dicht unter dem Prisma befindet sich ein Quecksilberspiegel, und die Beobachtung besteht nun in der Festlegung des Augenblicks, zu dem die demselben Stern angehörigen Bilder koinzi-

1) s. auch diese Zeitschr. Bd. 48 (1903), S. 495, Prix Damoiseau.

dieren, die einerseits von der oberen Prismenfläche, anderseits nach doppelter Reflektion am Quecksilberspiegel und an der untern Prismenfläche ins Rohr gelangen. Die mechanische Konstruktion des Apparates, die Reduktionsmethoden, die zufälligen und systematischen Fehlerquellen und ihre Ausmerzung erfahren ausführliche Behandlung. Die erzielte innere Genauigkeit, · die durch eine Reihe von Beobachtungen in Ondřejow bei Prag erprobt worden, schließt sich der mit verwandten Instrumenten erreichten an.

Ich glaube indes nicht, daß der hier erwähnte oder die ihm ähnlichen Apparate, z. B. das von Guyou in den Comptes rendus (Bd. 135, 1902; S. 1174) so warm empfohlene Claudesche „Prismen-Astrolabium", sich des Bürgerrechtes im Dienste geographischer Forschungen erfreuen werden. Einmal empfindet man den Zwang, einen Quecksilberhorizont benutzen zu müssen, immer unangenehm, ferner ist die Konstruktion der fraglichen Instrumente nicht so fest und einfach, wie man das auf weiten Landreisen wünschen mag, und überdies lehrt die allgemeine Erfahrung der astronomischen Meßkunst, daß die bequemere Libelle dem Quecksilberhorizont bei der Errichtung der Lotlinie in keiner Weise an Zuverlässigkeit nachsteht. Für den hier zunächst interessierenden Fall der Ortsbestimmung tun dies nicht nur die glänzenden Ergebnisse der von Küstner wieder neu belebten Horrebow-Talcottschen Methode im großen dar, sondern auch die schönen Resultate, die Hayn[1]) in der Südsee unter wenig günstigen Verhältnissen mit Hilfe eines kleinen, einfach gebauten Zenitteleskopes gewann. Gegenüber den „Nadirinstrumenten", „Prismenastrolabien", „Circumzenitalen" drängen sich neben vereinfachter Vorbereitungsrechnung noch die Vorteile auf, daß die optische Kraft des Fernrohrs, ungetrübt durch reflektierende Medien, voll zur Geltung kommt und daß die Anwendung sich nicht auf eine durch den Prismen- oder Spiegelwinkel bedingte Höhe beschränkt. Beide Vorzüge fallen insbesondere auf Expeditionsreisen schwer in die Wagschale.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

Neue Bücher.[2])

Algebra der Logik. Analysis.

1. Bastian, A., Das logische Rechnen u. seine Aufgaben. Erweiterung einer der Versammlg. deutscher Naturforscher u. Ärzte 1903 überreichten Denkschrift. gr. 8°, 176 S. Berlin 1903, Asher & Co. M. 4.
2. Mathy, E., Applications des fonctions elliptiques à la mécanique, à la géometrie et à la physique. In-4°. Gand 1903, Hoste. Frs. 7.

Astronomie. Geodäsie.

3. Astronomischer Kalender f. 1904, hrsg. v. der k. k. Sternwarte zu Wien. 66. Jahrg. (der neuen Folge 23. Jahrg.). Wien, Gerolds Sohn. M. 2.40.

---

1) „Astronomische Ortsbestimmungen im Deutschen Schutzgebiete der Südsee" (Reichs-Marineamt) Berlin 1897.

2) Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1904.



4. Bauschinger, J., Über das Problem der Bahnverbesserung. (Veröffentlichgn. des königl. astronom. Rechen-Instituts zu Berlin, Nr. 23.) 4°., 35 S. m. 1 Taf. Berlin 1903, Dümmler. M. 2.
5. Encke, J. F., Über die Bestimmung e. elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen. — Hansen, P. A., Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. (Ostwalds Klassiker Nr. 141.) Hrsg. v. J. Bauschinger, 8°, 162 S. Leipzig 1903, Engelmann. kart. M. 2.50.
6. Flammarion, C., Astronomie des Dames. In-12 illustré. Paris 1903, Flammarion. Frs. 3.50.
7. Gausz, Carl Friedrich, Werke. Hrsg. v. der Königl. Gesellsch. der Wiss. zu Göttingen. In 10 Bänden. IX. Bd. 4°, VI u. 528 S. Leipzig 1903, Teubner. kart. M. 26.
8. Haentzschel, Emil, Das Erdsphäroid und s. Abbildung. 8°, VIII u. 140 S. m. 16 Abb. Leipzig 1903, Teubner. geb. M. 3.40.
9. Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. 1. Bd. Ausgleichungs-Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 5. Aufl., durchgesehen v. C. Reinhertz. 1. Lfg. (S. 1—320.) gr. 8°. Stuttgart, Metzler. M. 7.
10. —, Dasselbe. 2. Bd. Feld- u. Landmessung. 6. erweit. Aufl., bearb. v. C. Reinhertz. gr. 8°, XIV, 863 u. 47 S. m. Holzschn. Ebenda. M. 17.80.
11. Stroobant, Paul, Précis d'astronomie pratique. In-16°. Paris 1903, Gauthier-Villars. Frs. 2.50.

Biologie, Statistik.

12. Kapteyn, J. C., Skew frequency curves in biology and statistics. gr. 8°, 45 S. u. 3 Tab. u. 6 Fig. auf 2 Taf. Groningen 1903, Noordhoff. Fl. 1.20.

Darstellende Geometrie.

13. Antomari, X., Cours de géométrie descriptive. 2ᵉ édition, conforme au nouveau programme d'admission à l'École polytechnique. In-8° avec fig. Paris 1903, Nony. Frs. 10.

Geschichte und Biographien.

14. Darmstaedter, L., u. du Bois-Reymond, R., 4000 Jahre Pionier-Arbeit der exakten Wissenschaften. gr. 8°, V u. 389 S. Berlin, Stargardt. M. 4; geb. M. 5.
15. Poggendorf, J. C., Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. IV. Bd. Hrsg. v. A. J. von Oettingen. Lfg. 16 u. 17. Leipzig 1903, Barth. M. 6.

Mechanik.

16. Garrett, Herbert A., The principles of mechanism. Being a short treatise on the Kinematics and Dynamics of machines. Cr. 8vo, 174 p. London 1903, Arnold. 3 s. 6 d.
17. Graf, Otto, Theorie, Berechnung u. Konstruktion der Turbinen u. deren Regulatoren. Ein Lehrbuch f. Schule u. Praxis. Lex. 8°, VI u. 164 S. m. 138 Abb., Tab., Taf. u. prakt. Rechenbeispielen. München, Polyt. Buchhandlung. kart. M. 7.
18. Griot. Gust., Kontinuierliche Balken m. konstantem Trägheitsmoment. Interpolierbare Tabellen zum raschen Auftragen der Einflußlinien f. Momente u. Scheerkräfte, sowie der Kurven f. verteilte Lasten, f. die Praxis berechnet u. geordnet. gr. 8°, 79 S. m. Fig. Zürich, Schulthess & Co. geb. in Leinw. M. 8.
19. Hauptmann, M., Graphische Statik. Eine Sammlung graphostatischer Konstruktionszeichnungen nebst erläut. Text. 5 Taf. m. Text am Fuße. 45,5 × 29,5 cm. Limbach 1903, Stopp. M. 3.50.
20. Marcolongo, R., Teoria matematica dell' equilibrio dei corpi elastici. (Manuali Hoepli, 348—349.) 8°. XIV e 366 p. Milano, Hoepli. L. 3.

21. Neilson, R. M., The steame turbine. 2[d] edition, revised and enlarged. New York 1903, Longmans. Cloth. $ 3.60.

22. Saussure, René de, Théorie géométrique du mouvement des corps (solides et fluides). 1[re] partie. Extrait des Archives des Sciences physiques et naturelles. T. XIII et XIV. 1902. Genève 1903. Kündig.

23. Tallqvist, Hj., Lehrbuch der technischen Mechanik. I. Geometrische Bewegungslehre. Mechanik des materiellen Punktes. Statik der starren Körper. gr. 8°, XII u. 750 S. m. 473 Fig. Helsingfors 1903. (Zürich, Speidel.) M. 16; geb. M. 18.

24. Teichmann, A., Zahlenbeispiel zur statischen Berechnung v. massiven Dreigelenkbrücken vermittelst Einflußlinien. Bearb. nach den Grundzügen v. G. Barkhausen. gr. 8°, 32 S. m. 29 Abb. auf 4 lith. Taf. Wiesbaden, Kreidel. M. 2.40.

Physik und Chemie.

25. Abbe, Ernst, Gesammelte Abhandlungen. 1. Bd. Abhandlungen über die Theorie des Mikroskops. gr. 8°, VIII u. 486 S m. 2 Taf. u. 29 Fig. u. 1 Portr. d. Verf. Jena, Fischer. M. 9; geb. M. 10.

26. Chipart, H., La théorie gyrostatique de la lumière. gr. in-8°, 192 p. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 6.50.

27. Faraday, Mich., Experimental-Untersuchungen üb. Elektrizität. (Aus den Phil. Trans. f. 1846, 1849 u. 1850.) XX. bis XXIII. Reihe (Ostwalds Klassiker Nr. 140). Hrsg. v. A. J. v. Oettingen. 8°, 174 S. m. 11 Fig. Leipzig 1903, Engelmann. kart. M. 3.

28. Gibbs, J. W., Diagrammes et surfaces thermodynamiques. Traduction de M. G. Roy. Avec une introduction de M. B. Brunhes. (Scientia, phys.-mathém. Nr. 22.) Paris 1903, Naud. Frs. 2.

29. Grimsehl, E., Die elektrische Glühlampe im Dienste des physikalischen Unterrichts. (Sonderhefte der Zeitschr. f. den physikal. u. chem. Unterr. 1. Bd. 1. Heft.) gr. 8°, 60 S. m. Abb. Berlin, Springer. M. 2.

30. Kleiber, Joh., u. Karsten, B., Lehrbuch der Physik. Zum besonderen Gebrauch f. techn. Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Fig., durchgerechneten Musterbeispielen u. Übungsaufgaben samt Lösgn. 2. Aufl. gr. 8°, VIII u. 360 S. München 1903, Oldenbourg. geb. in Leinw. M. 4.

31. Linders, Olof, Die für Technik und Praxis wichtigsten physikalischen Größen in systematischer Darstellung, sowie die algebraische Bezeichnung der Größen, physikalische Maßsysteme, Nomenklatur der Größen u. Maßeinheiten. gr. 8°, XII u. 396 S. m. 43 Fig. u. mehreren Tab. Leipzig, Jäh & Schunke (Roßbergsche Buchhandlung.) geb. in Leinw. M. 10.

32. Nernst, Walth., Theoretische Chemie vom Standpunkte der Avogadroschen Regel u. der Thermodynamik. 4. Aufl. gr. 8°, XIV u. 750 S. m. 36 Abb. Stuttgart 1903, Enke. M. 16; geb. in Leinw. M. 17.60.

33. Pfaundler, Leop., Die Physik des täglichen Lebens. Gemeinverständlich dargestellt. (Naturwissensch. u. Technik in gemeinverständlichen Einzeldarstellungen, 1. Bd.) Lex. 8°, XII u. 420 S. Stuttgart, Deutsche Verlagsanstalt. geb. in Leinw. M. 7.50.

34. Rohr, M. von, Die Theorie der optischen Instrumente. I. Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten vom Standpunkte der geometrischen Optik. Bearb. v. den wissensch. Mitarbeitern an der optischen Werkstätte v. Carl Zeiß, P. Culmann, S. Czapski, A. König, F. Löwe, M. von Rohr, H. Siedentopf, E. Wandersleb. gr. 8°, XXII u. 587 S. m. 133 Abb. Berlin, Springer. M. 18.

35. Weber, Wilh., u. Kohlrausch, Rud., Fünf Abhandlungen üb. absolute elektrische Strom- u. Widerstandsmessung. (Ostwalds Klassiker Nr. 142.) Hrsg. v. Frdr. Kohlrausch. 8°, 116 S. m. 2 Bildnissen u. 2 Fig. Leipzig, Engelmann. kart. M. 1.80.

36. Weder, Otto, Die Knotenlinien quadratischer Membranen. 8°, 6 S. m. 1 Taf. Progr. Zittau 1903.
37. Wiebe, H. F., Tafeln über die Spannkraft des Wasserdampfes zwischen 76 und 101,5 Grad bezogen auf das Luftthermometer, m. e. Beiblatt, enth. die Korrektionen auf das Wasserstoff-Thermometer. Auf Grund der Ergebnisse neuer Versuche berechnet u. herausg. 2. verm. Ausg. gr. 8°, IX, II u. 30 S. Braunschweig 1903, Vieweg & Sohn. M. 2.

Tafeln, Rechenapparate.

38. Knowles, W., Calculating Scale. A substitute for the Slide Rule. 16mo. London 1903, Spon. 1 s.
39. Küster, F. W., Logarithmische Rechentafeln f. Chemiker. Im Einverständnis m. der Atomgewichtskommission der deutschen chemischen Gesellsch. f. den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium u. in der Praxis berechnet u. m. Erläuterungen versehen. 4., neu berechnete u. erweiterte Aufl. 8°, 99 S. Leipzig, Veit & Co. geb. in Leinw. M. 2.
40. Stampfer, S., Sechsstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst Hilfstafeln, einem Anhange und einer Anweisung zum Gebrauche der Tafeln. Neu bearb. v. Eduard Doležal. 20. Aufl. Schulausgabe. Wien, Gerolds Sohn. geb. M. 3.
41. Zimmermann, H., Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. 9—11. Taus. Lex. 8°, XXXIV u. 204 S. Berlin 1903, Ernst & Sohn. geb. in Leinw. M. 5.

Verschiedenes.

42. Annuaire pour l'an 1904, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. Paris 1903, Gauthier-Villars. Frs. 1.50.
43. Zehnder, Ludwig, Das Leben im Weltall. 8°, 125 S. m. 1 Taf. Tübingen u. Leipzig, Mohr. kart. M. 2.50.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Alexandroff, Iwan, Aufgaben aus der niederen Geometrie, nach Lösungsmethoden geordnet u. zu einem Übungsbuche zusammengestellt. Mit einem Vorwort von M. Schuster. gr. 8°, VI u. 123 S. m. 100 Fig. Leipzig u. Berlin 1903, Teubner. geb. in Leinw. M. 2.40.

Amodeo, Frederico, Elementi di Algebra. (Parte prima del volume secondo degli Elementi di Matematica.) Opera destimata alle scuole medie Italiane. Napoli 1903, Pierro.

Annuaire pour l'an 1904, s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 42.

Astronomischer Kalender für 1904, s. N. B. 3.

Breuer, Adalbert, Die Normalform der allgemeinen Kegelschnittsgleichung. Ein Beitrag zur analytischen Geometrie. Eisenach 1888, Bacmeister. M. 1.

— Mathematische Vorschule der Astronomie in bezug auf die scheinbare Bewegung des Fixsternhimmels. Eine pädagogische Skizze. Wien 1895, Selbstverlag. M. 1.

— Besprechung von: W. Binder. Die cotierte Darstellung auf einer Bildebene nebst einem Vorschlage zur einheitlichen Bezeichnung in der darstellenden Geometrie. Sonderabdruck aus der Zeitschr. f. d. österr. Gymn. 1900, Heft 12.

Breuer, Adalbert, Beitrag zur Theorie der Orthogonal-Projektion des Kreises. Sonderabdruck aus der Zeitschr. f. das Realschulwesen, XXVIII, Heft 9.

— Beiträge zur Methodik der sphärischen Trigonometrie. Sonderabdruck aus der Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterr. XXXII, 1902, Heft 8.

— Die kubische Gleichung in methodischer Behandlung. Sonderabdruck aus der Zeitschr. f. d. österr. Gymn. 1901, Heft 10. Selbstverlag.

— Die kubische Gleichung in neuer Behandlung. Sonderabdruck aus der Zeitschr. f. d. österr. Gymn. 1903, Heft 1. Selbstverlag.

— Der irreduzible Fall der kubischen Gleichung in algebraischer Behandlung. Sonderabdruck aus der Zeitschr. f. d. österr. Gymn. 1903, Heft 11. Selbstverlag.

— Rein-algebraische Lösung der kubischen Gleichung. Wien 1903, Daberkow. M. 1.

Burali-Forti, C., Lezioni di geometria metrico-projettiva. (Biblioteca matematica vol. X.) Torino, Fratelli Bocca.

Chipart, H., Théorie gyrostatique de la lumière, s. N. B. 26.

Gibbs, J. W., Diagrammes et surfaces thermodynamiques, s. N. B. 28.

Haentzschel, E., Das Erdsphäroid u. seine Abbildung, s. N. B. 8.

Krausz, Fritz, Überhitzter Dampf zu Koch- und Heizzwecken. Sonderabdruck aus der Zeitschr. der Dampfkesseluntersuchungs- u. Versicherungsgesellschaft. Wien 1903, Verlag der Dampfkesseluntersuchungs- u. Versicherungsgesellschaft e. G.

Linders, Olof, Physikalische Größen, s. N. B. 31.

Marcolongo, R., Teoria matematica dell' equilibrio dei corpi elastici, s. N. B. 20.

Peirce, O. B., Contributions from the Jefferson Physical Laboratory, Harvard College: On the temperature coefficients of magnets made of chilled cast iron (Proc. Am. Ac. vol. 38 Nr. 19, Febr. 1903); On families of curves which are the lines of certain plane vectors either solenoidal or lamellar (ib., Nr. 24, May 1903); On the thermal conductivities of certain pieces of rock from the Calumet and Hecla mine (ib., Nr. 24, May 1903); On the lines of certain classes of solenoidal or lamellar vectors, symmetrical with respect to an axis (ib., vol. 39 Nr. 12, Dec. 1903).

Poggendorff, J. C., Biographisch-literarisches Handwörterbuch, s. N. B. 15.

Redlich, Richard, Vom Drachen zu Babel, Sonderabdruck aus „Globus“. Bd. 84, Nr. 23 vom 17. Dez. 1903.

Rieger, J., Graphische Tafel zur Berechnung gewalzter, genieteter u. hölzerner Träger (2 Bl. auf Karton). Nebst Text (4 S. m. 1 Fig.) 52×24,5 cm. Brünn 1903, (Wien, Lehmann & Wentzel.) M. 8.

Rohr, M. von, Die Theorie der optischen Instrumente, I, s. N. B. 34.

Salmon, George, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, frei bearbeitet von Wilhelm Fiedler. 6. Aufl. II. Tl. Leipzig 1903, Teubner. geb. M. 9.

Saussure, René de, Théorie géometrique du mouvement des corps (solides et fluides), s. N. B. 22.

Schlotke, J., Die Kegelschnitte u. ihre wichtigsten Eigenschaften in elementargeometrischer Behandlung. Dresden 1903, Kühtmann. M. 3.20; geb. M. 3.40.

Stampfer-Doležal, Sechsstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln, s. N. B. 40.

Weber, O., Die Knotenlinien quadratischer Membranen, s. N. B. 36.

Zehnder, L., Das Leben im Weltall, s. N. B, 43.

Neue Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie.

Von F. Ludwig in Greiz.

III.

Bis dat, qui cito dat.

1. *Bateson, W.* Variation and Differentiation in Parts and Brethren. Cambridge (I. And and C. F. Clay) 1903. 23 S.
2. *Darbishire, A. D.* Third Report on Hybrids between Waltzing Mice and Albino Races. Biom. V. II. p. 282—285.
3. *Duncker, Georg.* Über Asymmetrie bei Gelasimus Pugilator Latr. Biom. V. p. 307—320.
4. *Elderton, Palin.* Graduation and Analysis of a Sickness Table. Biom. V. II. p. 260—272, 503—504.
5. *Elderton, Palin.* Tables of Powers of Natural Numbers and of the Sums of Powers of the Natural Numbers. Biom. V. II. p. 474—480.
6. *Johannsen, F.* Über Erblichkeit in Populationen und in reinen Linien. Fischer, Jena 1903.
7. *Kapteyn, I. C.* Skew Frequency Curves in Biology and Statistics. Published by the Astronomical Laboratory at Groningen. Groningen 1903. 45 pp. 2 Tafeln und 6 Figuren.
8. *Ludwig, F.* Was könnten unsere Schüler im botanischen Unterricht von der Biometrie und insbesondere von den Variationskurven erfahren? „Natur und Schule" 1903/04. III Bd. H. 1 und 2.
9. *Mac Leod.* Over de gevoelige periode van den invloed der voeding op het aantal randbloemen bij de korenbloem *(Centaurea Cyanus)*. Overgedrukt uit de Handelingen van het zesde Vlaamsch natuur-en geneeskundig Congres gehouden te Kortrijk op 28. Sept. 1902. 8 S.
10. *Mc Intosh.* Variation in Ophiocoma nigra (O. F. Müller). Biom. V. II. p. 463—473.
11. *Myers Charles, S.* Craniological notes. Biom. V. II. p. 504—562.
12. *Pearl, Raymond* and *Dunbar, Frances, I.* Variation and Correlation in Arcella. Biom. V. II. p. 321—337.
13. *Pearson, K.* and *Lee, Alice.* On the Laws of Inheritance in Man. I. Inheritance of Physical Charakters. Biom. V. II. p. 357—462.
14. *Pearson, K., Jakob, S.* and *Lee, A.* Craniological Notes. Biom. V. II. p. 338 bis 356.
15. *Pearson, K.* Associative Mating in Man. Biom. V. p. 481—498.
16. *Pearson, K.* On the Probable Errors of Frequency Constants. Biom. V. II. p. 273—281.
17. *Reinöhl, Fr.* Variation im Andröceum der Stellaria media Cyr. Inauguraldissert. Tübingen 1903. 44 S. 4°. 3 Taf.
18. *Smith, Groffrey.* Actinosphaerium Eichorni. A Biometrical Study in the Mass Relations of Nucleus and Cytoplasm. Biom. V. II. p. 241—254.
19. *Vogler, Paul.* Die Variabilität von Paris quadrifolia L. in der Umgebung von St. Gallen. Flora od. Allgem. Bot. Ztg. Bd. 92. 1903. H. 4.
20. *Vogler, Paul.* Die Variation der Blütenteile von Ranunculus Ficaria Vierteljahrsschrift der Naturforsch.-Gesellsch. in Zürich 1903. Bd. 48. p. 321 bis 328.
21. *Warren, Ernest.* A Preliminary Attempt to ascertain the Relationship between the Size of Cell and the Size of Body in Daphnia magna Strauß. Biom. V. II. p. 255—259.
22. *Wasteels, C. E.* De Variatiecurven met betrekking tot de polynomiale waarschijnlijkheidswet. Handelingen van het vierde Vlaamsch natuur-en geneeskundig Congres, gehouden te Brussel, 30. Sept. 1900. p. 33—45.
23. *Wasteels, C. E.* Over het bepalen der Variatie en Correlatie. Hand. van het vijfde Vlaamsch. Nat.-en gen. Congr. geh. te Brugge op 29. Sept. 1901. 10 S.
24. *Wasteels, C. E.* Een Variatiemeter. Hand. van het zesde Vlaamsch nat.-en. gen. Congr. geh. te Kortrijk op 28. Sept. 1902. 8 S.
25. *Wasteels, C. E* en *J. Mac Leod.* Over de veranderlijkheid van het aantal

ribben bij Scalaria communis overgedrukt uit de Handelingen van het vijfde Vlaamsch Nat.-en geneeskundig Congr. gehouden te Brugge op 29. Sept. 1901.

26. *Weldon, W. F. R.* Mr. Batesons Revisions of Mendel's Theory of Heredity. Biom. V. II. p. 286—298.

27. *Weldon, W. F. R.* and *Pearson, K.* Inheritance in Phaseolus vulgaris. Biom. II. p. 499—503.

28. *Woods, Frederick Adams.* Mendel's Laws and some Records in Rabbit Breeding. Biom. V. II. p. 299—306.

Außer den wichtigen Arbeiten in der Zeitschrift Biometrika liegen diesmal eine Anzahl von biometrischen Abhandlungen vor, welche hervorragende Bedeutung haben. In erster Linie meine ich die Abhandlung des Direktors der Sternwarte in Groningen, Prof. Kapteyn (7), der die unsymmetrischen Variationskurven in leicht verständlicher Form ableitet und völlig neu behandelt. Der erste Teil, welcher für Nichtmathematiker bestimmt ist, setzt nur die Kenntnis der Kombinations- und Wahrscheinlichkeitslehre voraus und ist völlig populär geschrieben, während der zweite das allgemeine Problem mathematisch behandelt. Weiter gilt dies von den Abhandlungen von Wasteels in Gent, welche gleichfalls populäre Ableitungen der Theorie geben (22), zum andern Teil für die variationsstatistische Praxis von unschätzbarem Werte sind (23; 24). Wer sich selbst schon mit Untersuchungen über Variation und Korrelation beschäftigt hat, der hat es gewiß empfunden, wie lästig die langen Berechnungen trotz Rechenmaschine noch sind. Wasteels hat zwei neue Methoden zur Bestimmung der Variationskurven und Korrelationskoeffizienten mitgeteilt, die schnell zum Ziel führen und von denen die eine der graphischen Statik entlehnt ist, während die andere mit dem Integraphen oder dem Integrator in leicht erlernbarer Weise arbeitet. Zur Ermittelung des Variationskoeffizienten hat er ein einfaches, auf der Lehre vom Trägheitsmoment basierendes Instrument erfunden, bei welchem durch Gewichte die Bestimmung des Koeffizienten erfolgt. Zur Theorie und Praxis kommen noch in Betracht die Abhandlungen (1; 4; 5; 6 mit 27); für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht an höheren Schulen (8) zugleich mit (7, 22, 23, 24). Eine prächtige Arbeit, welche die Unentbehrlichkeit der biometrischen Methoden bei der Analyse der bisher angenommenen Pflanzen- und Tierspezies evident beweist, ist die von Friedrich Reinöhl in Künzelsau (Württemberg) über Stellaria media (17), wie auch die botanischen Arbeiten von Prof. Mac Leod in Gent über Centaurea Cyanus (9) und von Prof. Vogler in St. Gallen über Paris quadrifolia (19) und Ranunculus Ficaria (20), von Weldon und Pearson über Phaseolus communis (27) allgemeineres Interesse beanspruchen. Dem Gebiet der Tierkunde gehören an die Arbeiten über die Urtiere Actinosphaerium Eichorni (18) und Arcella (12), den Stachelhäuter Ophiocoma nigra (10), über die Krustentiere Gelasimus pugilator (3) und Daphnia magna (21), über die Zahl der Rippen bei dem Schneckenhaus der Scalaria communis (21) über Tanzmäuse etc. (2); während dem anthropologischen Gebiet die Arbeiten (11; 13; 14; 15) angehören

Neue Beiträge zum Mendelschen Gesetz der Bastarde liefern (21; 26; 28).

Abhandlungsregister 1902 — 1903.

Von E. Wölffing in Stuttgart.

[Die Abhandlungen, welche mir und meinen Mitarbeitern nicht zugänglich waren, sind mit * bezeichnet.] Die Verweise von Nr. 1649 an beziehen sich auf das nachfolgende technische Abhandlungsregister.

Abkürzungen.

A.A.E.I. Atti dell' associazione elettrotecnica italiana, Milano 7.
A.A.M. Abhandlungen der K. Bayr. Akademie der Wissenschaften, München 21.
A.A.N. Atti dell' R. Accad. delle Scienze fisiche e matematiche Napoli 11.
A.A.P. Atti della R. Accad. di Scienze, Lettere e Belle Arti, Palermo (3) 6.
A.A.P.M. Atti dell' Accad. Peloritana, Messina 16.
A.A.T. Atti della R. Accad. Torino 38.
A.A.W. Anzeiger der K. K. Akad. Wien 1902—03.
A.B.Z. Allgemeine Buchhändlerzeitung, Leipzig 1901.
A.C.P. Annales de Chimie et de Physique, Paris (7) 27—30.
A.D.M. Annali di Matematica pura ed applicata, Milano (3) 8—9.
A.E.N. Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Paris (3) 19.
A.F. Comptes rendus de l'association française pour l'avancement des sciences 1902.
A.F.G.P. Archiv für die gesamte Physiologie, Bonn 1903.
A.F.S.P. Archiv für Schulpraxis, Paderborn 5.
A.G.G. Abhandlungen der Gesellschaft der Wissensch. Göttingen (2) 2.
A.G.L. Abhandlungen der K. Sächs. Ges. der Wiss. Leipzig 24—25; 27.
A.G.N.H. Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften, Hamburg 17.
A.Gr. Archiv der Math. u. Physik, Leipzig (3) 4—6.
A.H. Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, Hamburg 31.
A.H.S. Aus der Heimat, Stuttgart, 16*
A.I.V. Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Venezia (7) 10; (8) 1—2.
A.J.B. Astronomical Journal, Boston 22.
A.J.C. Astrophysical Journal, Chicago 15—17.
A.J.L. Aeronautical Journal, London 7.
A.J.M. American Journal of Mathematics 25.
A.J.P. Artillerie-Journal, Petersburg 1901.
A.J.S. American Journal of Science, New Haven (4) 14—16.
A.K.K. Archiv für Kriminalanthropologie und Kriminalistik, Leipzig 7.
A.M. Acta mathematica, Stockholm 25; 27.
A.M.A.F. Arkif för Math. Astronomi och Fysik, Stockholm 1.
A.M.A.P. Atti e Memorie della R. Accademie di Scienze, Lettere ed Arti, Padova 18.
A.M.T. Archives du Musée Teyler, Harlem (2) 8.
A.N. Archives néerlandaises, Harlem (2) 7—8.
A.N.K. Astronomische Nachrichten, Kiel 159—161; 163.
A.N.L. Annalen der Naturphilosophie Leipzig 2.
A.N.W. Arch. nauk, Warszawa 1.
A.ofM. Annals of Mathematics, Cambridge (Mass.) (2) 3—5.
A.O.P. Annales de l'Observatoire, Paris 23.
A.P.B. Bulletin der K. K. Akademie der Wiss. Petersburg (5) 16.
A.P.L. Annalen der Physik, Leipzig (4) 9—12.

A.R.L. Astronomische Rundschau, Lussinpiccolo 4.
A.R.O.E. Annals of the R. Observatory, Edinburgh 1.
A.S.A. Anales de la Sociedad Cientifica Argentina, Buenos Ayres 55.
A.S.B. Annales de la Société Scientifique, de Bruxelles, Louvain 26—27.
A.S.G. Archives des Sciences physiques et naturelles, Genève (4) 14—15.
A.S.M.F. Annales de la Société météorologique de France, Paris 31.
A.S.U.J. Annales Scientifiques de l'Université, Jassy 2.
A.T. Annales de la Faculté, Toulouse (2) 3—4.
A.U.F. Annuario della libera Università, Ferrara 1901—02.
A.U.G. Annales de l'Université, Grenoble 15.
A.U.L. Universitets Arskrift, Lund 37.
A.U.R. Annuario della R. Università degli Studi, Roma 1901—02.
A.V.A.S. Bihang till K. Svenska Vetenskaps Akademiens Handlingar, Stockholm 28.
A.V.G. Archief voor verzekeringswetenschap, s'Gravenhage 5.
A.V.L. Annalen für Versicherungswesen, Leipzig 32—34.
A.V.N. Allgemeine Vermessungsnachrichten 1902.
B.A. Bulletin astronomique, Paris 19—20.
B.A.B. Bulletin de l'Ac. Roy. des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts, Bruxelles 1903.
B.A.C. Oversigt der K. Dansk. Vidensk. Selsk. Forhandlinger, Kjöbenhavn 1902.
B.A.P. Sitzungsber. der K. K. tschech. Ak. Prag 6.
B.D. Bulletin des Sciences math., Paris (2) 26—27.
B.D.M. Bolletino di Matematica, Bologna 1.
B.G.C. Bolletino delle sedute dell' Acad. Gioënia, Catania 76.
B.G.F. Berichte der naturforsch. Gesellsch. der Wiss. Freiburg 13.
B.G.L. Berichte der K. Sächs. Gesellschaft d. Wissensch., Leipzig 54—55.
B.H. Berichte über die Hydrographie, Petersburg 24.
B.H.J. Berg- und Hüttenmännisches Jahrbuch, Leoben 1902.
Bi. Biometrika, Cambridge 2.
B.I.C. Bulletin international, Krakau 1901—02.
B.I.P. Bulletin international de l'Acad. des Sciences, Prag 6.
B.I.Z. Bauingenieurzeitung, Berlin 2.
B.L. Der Bauzeichner, Lübeck 1.
B.M. Bibliotheca mathematica, Leipzig (3) 3—4.
B.R.A.G. Bulletin der Russ. Astron. Gesellsch., Petersburg 9.
B.S.A.F. Bulletin de la Soc. Astron. de France, Paris 16.
B.S.B.A. Bulletin de la Soc. belge d'Astronomie, Bruxelles 8.
B.S.I.E. Bulletin de la Société internationale des Electriciens, Paris (2) 2.
B.S.M.F. Bulletin de la Société Minéralogique de France, Paris 25.
B.S.P. Blätter für die Schulpraxis, Spandau 1902.
B.S.V. Bulletin de la Soc. Vaudoise des Sciences Naturelles, Lausanne (4) 38 bis 39.
B.S.W. Bulletin of the Philos. Soc. Washington 14.
B.U.K. Universitätsnachrichten, Kiew 1902—03.
B.V.A.S. Öfversigt af K. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar, Stockholm 59.
C. Casopis, Prag 31—32.
C.A.A. Verslagen der zittingen der K. Ak. van Wetenschappen, Amsterdam 11.
C.A.C. Berichte der K. K. Ak. der Wissenschaften, Krakau 39; 42.
C.B. Chemische Berichte 35.
C.I.M. Congrès internationaux des Mathématiciens 2 (Paris).
C.M.G. Zentralblatt für Mineralogie und Geologie, Stuttgart 1902.
C.M.N.Y. Cassiers Magazine, New York 20.
C.P.L. Communications for the Physical laboratory at the University, Leiden 81—82.
Cr. Journal f. reine u. angewandte Math. Berlin 125—126.
C.R. Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Ac. des Sciences, Paris 135—137.
C.R.R. Korrespondenzblatt des Naturforschervereins zu Riga 46.
C.T.B. Ciel et Terre, Bruxelles 24.
C.T.L. Czasopis techniczne, Lemberg 20.
D.A.W. Denkschriften der K. K. Akademie der Wissensch. Wien 72—73.
D.B.H. Deutsche Bauhütte, Hannover 1902.
D.I.G. De Ingenieur, s'Gravenhage 16—17.
D.M. Der Mechaniker, Berlin 10—11.
D.U.Z. Deutsche Uhrmacherzeitung, Berlin 25.
D.V.M. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Leipzig 12.
D.V.N. Verhandlungen der Deutschen Naturforscherversammlung, Leipzig 74.
D.W.B. Das Weltall, Berlin 3.
D.Z.R. De Zee, Rotterdam 24.

E.C.Z. Elektrochemische Zeitschrift, Berlin 10.
E.M. L'enseignement Mathématique, Paris 4—5.
E.M.W. The English mechanic and world of science, London 74—76.
E.N. Engineering News, New York 47.
E.P. Električestvo, Petersburg 1902.
E.R. Electrical Review, London 42, 51.
F.M. Annales de la Faculté, Marseille 13.
G.B. Giornale di Matematiche, Napoli 40—41.
G.C.I. Gazzetta Chimica Italiana 32.
G.M.B. Gaceta matematica, Bukarest 8.
G.S.P. Giornale di Scienze Naturali ed Economiche, Palermo 23.
G.T.K. Geographisk Tidskrift, Kjöbenhavn 16.
G.W.B.B. Germania, Wissenschaftliche Beilage, Berlin 1902.
G.Z. Geographische Zeitschrift, Leipzig 1902.
H.E.B. Himmel und Erde, Berlin 24.
H.H. Hansa, Hamburg 39.
I.A.M. Illustrierte Aëronautische Mitteilungen, Straßburg 6.
I.C. L'Industria chimica 5
I.E.E. India East Engineer, Calcutta (2) 8.
J.A.S.C. Journal of the American Chemical Society, Easton 24—25.
J.B.A.A. Journal of the British Astronomical Association, London 12.
J.D.S. Journal des Savants, Paris 1902.
J.F.I. Journal of the Franklin Institution, Philadelphia 153.
J.I.A. Journal of the Institute of Actuaries, London 36.
J.I.E.E. Journal of the Institute of Electrical Engineers, London 32.
J.M. Journal de Math. pures et appliquées, Paris (5) 8—9.
J.M.P.N. Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes, Lisboa (2) 6.
J.N.S.W. Jornal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales Sydney 36.
J.P. Journal de Physique, Paris (4) 1—2.
J.P.C. The Journal of Physical Chemistry, Ithaca 6—7.
J.P.V.F. Jahresbericht des physikalischen Vereins, Frankfurt a. M. 1900.
J.R.P.C.G. Journal der Russischen Phys. Chem. Gesellschaft, Petersburg 34—35.
J.S.G. Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur, Breslau 80.
J.S.M. Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas, Porto 15.
J.U.T. Journal of the College of Science, Tokio 16.
J.V.N.S. Jahreshefte des Vereins für Vaterländische Naturkunde, Stuttgart 59.
K.T. Der Kulturtechniker, Breslau 1902.
K.Z. Kriegstechnische Zeitschrift, Berlin 4; 6.
L.E. L'Elettricista, Roma 12.
L.E.P. L'Electricien, Paris 25.
L.L.P. Lehrproben und Lehrgänge aus der Praxis der Gymnasien und Realschulen, Halle 67.
M. Mathesis, Gand (2) 2—3.
M.A. Math. Annalen, Leipzig 57.
M.A.D.J. Monatshefte des allgemeinen deutschen Jagdschutzvereins, Berlin 1902.
M.A.G.S. Mitteilungen aus dem Gebiete des Seewesens, Pola 30.
M.A.N.C. Mémoires de l'Académie Nationale des Sciences, Arts et Belles Lettres, Caen 1901.
M.A.S. Memoirs of the Roy. Astr. Society 54.
M.A.T.P. Memoires de l'Acad. imp. tchèque, Prag 1901.
M.B. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Mitteilungen, Stuttgart (2) 5.
M.F.I. Mitteilungen über Forschungen und Arbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Berlin 4—9.
M.G.K. Meddelser om Grönland, Kjöbenhavn 25.
M.G.S. Mathematical Gazette, Stroud 2.
M.G.W. Mitteilungen der Naturwiss. Gesellschaft, Winterthur 4.
M.H. Monatshefte für Math. und Physik, Wien 14.
M.I.B. Memorie della Reale Accademia delle Scienze dell' Instituto di Bologna 8.
M.L. Mühle, Leipzig 39.
M.L.A.O. Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium 19.
M.M. Messenger of Mathematics, London 31—32.
M.M.F. American Mathematical Monthly, Springfield 9—10.
M.M.L. Mineralogical Magazine, London 13.
M.M.L.M. Mitteilungen aus dem mechanischen Laboratorium, München 28.
M.N.A.S. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, London 62—63.
Mon Monist, New York 12.
M.P.A. Le Matematiche pure ed applicate, Città di Castello 2.
M.P.G.Z. Mitteilungen der physikalischen Gesellschaft, Zürich 3.
M.P.I.C.E. Minutes of proceedings of the institution of civil engineers London 1.
M.P.L. Mathematikai és physikai lapok, Budapest 10—11.

M.P.O. Bote der Experimentalphysik und Elementarmathematik, Odessa 28—29.
M.R.B. Marine-Rundschau, Berlin 12.
M.S.B. Mémoires de la Soc. des Sciences physiques et naturelles, Bordeaux (6) 2.
M.S.Br. Mitteilungen der Sternwarte, Breslau 2.
M.S.L. Mémoires de la Société Roy. des Sciences, Liège 3.
M.S.O. Denkschriften der mathematischen Abteilung der neuruss. Gesellsch. der Naturforscher, Odessa 85—87.
M.S.P.A.O. Miscellaneous scientific papers of the Allegheny Observatory Allegheny (2) 9.
M.S.S.I. Memorie della Società dei Spettroscopisti Italiani, Catania 30—32.
M.T.E. Mathematikai és természettudomanyi értesítö, Budapest 20.
M.V.A.P. Mitteilungen des Vereinigung von Freunden der Astronomie und kosmischen Physik, Berlin 12.
M.W.G. Mitteilungen des Württembergischen Geometervereins, Stuttgart 1902.
M.W.R. Monthly Weather Review, Washington 30—31.
M.y.R.M. Memorias y Revista de la Sociedad Cientifica „Antonio Alzate" Mejico 19.
M.Z. Meteorologische Zeitschr., Wien 19.
N. Nature, London 68.
N.A. Nouvelles Annales de Mathématiques, Paris (4) 2—3.
N.C.P. Il Nuovo Cimento, Pisa (5) 5.
N.G.G. Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen 1902—03.
N.L.A. Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, Roma 56.
N.M.A.B. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux Arts, Bruxelles 54.
N.M.L. Nautical Magazine, London 71.
N.O. Natur und Offenbarung, Münster 48.
N.R. Naturwissenschaftliche Rundschau, Braunschweig 18.
N.T.G. Nederl. Tydschrift voor geneeskunde, Amsterdam 2.
N.W. Naturwissenschaftliche Wochenschrift, Jena 17.
P. Prometheus, Berlin 14.
P.A. Popular Astronomy, Northfield Minn. 10.
P.A.Bo. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, Boston 38.
P.A.S.C.E. Proceedings of the American Society of Civil Engineers; New York 27.
P.B.R.L. Periodische Blätter für Realienunterricht und Lehrmittelwesen, Tetschen 7.
P.C.P.S. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge 12.
P.E.I.C. Public Earthquake Investigation Comittee, Tokio 19.
P.E.M.S. Proceeding of the Edinburgh Mathematical Society, Edinburgh 21.
P.F.W. Przeglad filoz. Warszawa 4—5.
P.G.M. Petermanns Geographische Mitteilungen, Gotha 49.
Pit. Il Pitagora, Palermo 9.
P.L.O. Publikation of the Lick Observatory, Sacramento 7.
P.L.M.S. Proceedings of the London Mathematical Society, London 34—35.
P.M. Philosophical Magazine, London (6) 5—6.
P.M.R. Periodico di Matematica, Livorno 6.
Pol.M. Il Politecnico, Milano 1902.
P.P.S. Proceedings of the American Philosophical Society, Philadelphia 42.
P.P.S.L. Proceedings of the Physikal Society, London 18.
P.R. The Physical Review, New York 15—17.
P.R.S.E. Proceedings of the Royal Society, Edinburgh 24.
P.R.S.L. Proceedings of the Royal Society, London 70—72.
P.R.S.V. Proceedings of the Royal Society of Victoria, Melbourne (2) 10.
P.T.R.S.C. Proceedings and Transactions of the Royal Society of Canada, Montreal (2) 7.
P.T.W. Przeglad techniki, Warszawa 39.
P.Z. Physikalische Zeitschr., Göttingen 4.
Q.J.M.S. Quarterly Journal of the Meteorological Society, London 29.
R.A.A. Reports of the Australasian Association for the Advancement of Science, Melbourne 8.
R.A.R.L. Rendiconti della Reale Accademie dei Lincei, Roma (5) 11 B; 12 A; B.
R.A.N. Rendiconti della Reale Accademia Napoli (3) 9.
R.B.A. Reports of the British Association for the advancement of science 71; 72.
R.C.L. Revista de Ciencias, Lima 6.
R.C.M.P. Rendiconti del Circolo Matematico, Palermo 16—17.
R.F.M. Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali, Pavia 3; 4 A; B.
R.G. Railroad gazette, New York 1902.
R.G.O. Revue générale des Sciences pures et appliquées Paris 13—14.
R.I.B. Rendiconto delle Sessioni dell' Academia dell' Istituto, Bologna (2) 4.
R.I.L. Rendiconti del Istituto Lombardo, Milano (2) 35—36.
R.M.B. Revista maritima Brazileira, 39.

Z.B.G. Zentralblatt f. Baugewerbe, Berlin 2.
Z.B.G.V. Zeitschr. des bayr. Geometervereins 1902.
Z.E. Zeitschr. f. Elektrochemie, Halle 8—9.
Z.F. Zeitschr. f. Forstwesen, Berlin 1902.
Z.F.N. Zeitschr. f. Naturwissenschaften, Stuttgart 75.
Z.G.E. Zeitsch. d. Gesellsch. f. Erdkunde, Berlin 36.
Z.G.F. Zentralblatt für das gesamte Forstwesen, Wien 1902.
Z.G.V. Zeitschr. f. d. gesamte Versicherungswissenschaft, Berlin 2—3.
Z.H. Zeitschr. f. math. u. naturwiss. Unterricht, Leipzig 33.
Z.K.M. Zeitschr. f. Kristallographie und Mineralogie, Leipzig 36—38.
Z.L.H. Zeitschr. f. Lüftung und Heizung, Berlin 8.
Z.Ö.C.P. Zeitschr. f. öff. Chemie, Plauen 1901.
Z.Ö.G. Zeitschr. f. d. österr. Gymnasien, Wien 1902.
Z.P. Zeitschr. f. physikal. chem. Unterricht., Berlin 15—16.
Z.P.C. Zeitschr. f. physikal. Chemie, Leipzig 42—44.
Z.P.K. Zeitschr. f. Philosophie u. philosoph. Kritik, Leipzig 118.
Z.R.W.L. Zeitschr. des Rheinisch-Westphälischen Landmesservereins, Kassel 21—22.
Z.S. Zeitschr. f. Mathematik u. Physik, Leipzig 48—49.
Z.Z. Zentralblatt für Zuckerindustrie, Magdeburg 9.

Geschichte der angewandten Mathematik.

1. *K. Heun.* Über die Einwirkung der Technik auf die Entwicklung der theoretischen Mechanik. D.V.M. 12. 389.

2. *M. Jacobi.* Nikolaus von Cusa als Mathematiker u. Physiker. Z.F.N. 75. 25.

3. *J. A. C. Oudemans* et *J. Bosscha.* Galilée et Marius. A.N. 8. 115.

4. *E. Goldbeck.* Galileis Atomistik und ihre Quellen. B.M. (3). 3. 84.

5. *F. Burckhardt.* Zur Geschichte des Thermometers. V.N.B. 16. 1.

Siehe auch 1376.

Logikkalkul.

6. *A. N. Whitehead.* The logic of relations, logical substitution groups and cardinal numbers. A.J.M. 25. 157.

7. **H. Mac Coll.* Logique tabulaire. R.D.M.M. 10. 212.

8. *P. S. Poretzky.* Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques. S.M.Ka. 11. 17.

9. *E. W. Davis.* Some groups in logic. S.M.Am. 9. 346.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

10. **N. Herz.* Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Z.Ö.G. 1902. 961.

11. *H. Brömse* und *E. Grimschl.* Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitslehre. Z.P.K. 118. 145.

12. **W. Gosiewski.* Über die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung (poln). W.M. 6. 76.

13. *R. de Montessus.* Un paradoxe du calcul des probabilités. N.A. (4) 3. 21. — *Lechalas* 343.

14. *P. Mansion.* Démonstration du théorème de Jacques Bernoulli. A.S.B. 26. 191; M. (3) 3 Suppl.

15. *P. Mansion.* Sur une intégrale considérée en calcul des probabilités. A.S.B. 26. 211.

16. *W. F. Sheppard.* New tables for the probability integrals. Bi. 2 No. 2.

17. **W. Gosiewski.* Über das Gesetz der großen Zahlen (poln.). W.M. 6. 89.

18. **J. Eggenberger.* Das Gesetz der großen Zahlen, dessen Wesen und Geschichte, sowie seine Bedeutung für das Versicherungswesen. A.V.L. 32. 100.

19. *N. Vaschide* et *H. Piéron.* Les applications du calcul des probabilités à la méthode scientifique. E.M. 5. 3.

20. *D. André.* Mémoire sur les couples actives de permutations. S.M. 31. 105.

21. **W. Gosiewski.* Zarys teoryi matematycznej monadologii (Versuch einer mathematischen Theorie der Monadologie). P.F.W. 4. 1.

22. *T. N. Thiele.* En opgave i sansynlighetsregning. T.M. 14. B. 11.

23. *W. Gosiewski.* Über das Petersburger Problem (poln.). W.M. 6. 167.

24. *P. Mansion.* Sur la représentation proportionelle. B.D. (2) 27. 203.

25. **A. A. Markov.* Antwort (russ.). S.M.Ka. (2) 9. 41.

26. *N. Vaschide* et *H. Piéron.* Réponse à M. Cailler. E.M. 5. 223.

Siehe auch 53; 63; 66; 70; 112; 512; 513.

Fehlerrechnung.

27. *E. Czuber.* Über einen Satz der Fehlertheorie und seine Anwendung. D.V.M. 12. 23.

28. *B. Weinberg.* Betrachtungen über Fehlerverteilungen. A.N.K. 161. 113.

29. *A. Féraud.* Sur un problème de probabilité des erreurs. B. A. 20. 291.

30. *E. Goedseels.* Vraie signification de l'erreur moyenne A. N. K. 163. 369.

31. *W. H. Keesom.* Reductie van waarnemingsvergelijkingen, die meer dan eene gemeten grootheid bevatten. C. A. A. 11. 14.

32. *K. Pearson.* On a general theory of the method of false position. P. M. (6) 5. 658.

33. *P. Harzer.* Über die Bestimmung der Teilfehler von Maßstäben nach der Gill-Lorentzenschen Methode. A. N. K. 161. 161.

34. *P. Harzer.* Über die Bestimmung der Teilfehler von Maßstäben nach der ersten Hansenschen Methode. A. N. K. 161. 381.

35. **A. Abetti.* Criterio di reiezione di un' osservazione dubbiosa. M. S. S. I. 31. 125.

36. *K. Pearson.* On the mathematical theory of errors of judgment with special reference to the personal equation. T. R. S. L. 198. 235.

37. **Kremers.* Ausgleichung eines Liniennetzes. A. V. N. 1902. 69.

38. **Bischoff.* Ausgleichung von Polygonzügen. Z. B. G. V. 1902. 102.

Siehe auch 144; 1387; 1391; 1665.

Methode der kleinsten Quadrate.

39. **H. Jacoby.* A theorem concerning the method of least squares. A. J. B. 22. 84.

40. **J. Nidzuhara.* On 2 theorems concerning the method of least squares. A. J. B. 22. 139.

41. *E. le Grand Roy.* Démonstration élémentaire d'un principe de la méthode des moindres carrés. B. S. N. 27. 23.

42. **H. L. Rice.* On the fallacy of the method commonly employed in finding the probable error of a function of 2 or more quantities whose adjusted values have been derived from the same least-square solution. A. J. B. 22. 149.

43. *C. E. Adams.* The adjustement of triangulation by least squares. T. N. Z. I. 35. 201.

Siehe auch 1683.

Politische Arithmetik.

44. *J. H. Smith.* On the decimalization of English money and some simplifications in long division. P. E. M. S. 21. 111.

45. *J. W. Butters.* On the decimalization of money. P. E. M. S. 21. 112.

46. **J. D. Hamilton Dickson.* The late J. Hamblin Smith's rule for the decimalization of English money. R. B. A. 72. 529.

47. *P. G. La Chesnais.* La répésentation proportionelle. B. D. 27. 107.

Siehe auch 36.

Zinsrechnung.

48. *J. Byskov.* Om procent pro anno. T. M. 13. A. 103.

Rentenrechnung.

49. *S. Johnsen.* En modbemaerking. T. M. 14. A. 18; 43. — *J. Byskov.* 38.

Statistik.

50. **V. Volterra.* Sui tentativi di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali. A. S. R. 1901—1902.

51. *F. Ludwig.* Neuere Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie. Z. S. 49. 269.

52. *J. D. van der Waals* jun. Statistische elektro-mechanica. C. A. A. 11. 79. 243.

53. **J. D. van der Plaats.* Nog iets over de toepassing der waarschijnlijkheidsrekening op medische statistiek. N. T. G. 2. 1028.

54. *R. Teece.* Die Zunahme des Krebses. J. I. A. 36. 89. — *G. Kind* und *W. R. Day.* 120.

55. *K. Pearson.* Mathematical contributions to the theory of evolution. P. R. S. L. 71. 288; T. R. S. L. 200. 1.

56. *A. Lee, M. A. Lewens* and *K. Pearson.* On the correlation of the mental and physical characters in man. II. P. R. S. L. 71. 106.

57. **K. Pearson.* On the systematic fitting of curves for observations and measurements. Bi. 2. No. 1.

58. *W. Láska.* Über die charakteristischen Zahlen der meteorologischen Elemente. M. 2. 19. 465.

59. *F. E. Cave-Browne-Cave* and *K. Pearson.* On the correlation between the barometrical height at stations on the Eastern side of the Atlantic P. R. S. L. 70. 465.

60. *Großmann.* Die mittlere Bewölkung einer Periode als Function ihrer hellen und trüben Tage. A. H. 31. 6.

61. *J. Eggenberger.* Mortalitäts- und Invaliditätsverhältnisse der Arbeiter in den k. bayr. Berg-, Hütten- und Salinenbetrieben. Z. G. V. 3. 228.

Siehe auch 1541; 1543.

Sterblichkeit.

62. *E. M. Moors* and *W. R. Day.* Sterblichkeit in New South Wales und Viktoria und Konstruktion einer Sterbetafel aus einer Volkszählung und den Sterbefällen der angrenzenden Jahre. J. I. A. 36. 151.

63. *C. L. Landré.* Das Kombinieren der Sterbenswahrscheinlichkeiten aus verschiedenen Beobachtungsserien. Z. G. V. 3. 237.

Siehe auch 61; 77.

Versicherungsmathematik.

64. *A. Schülke.* Lebensversicherungsrechnungen beim Unterricht. U. M. N. 9. 37.

65. *A. Quiquet.* Sur l'emploi simultané des lois de survie distinctes. C. R. 136. 1544.

66. **Oster.* Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit. A. V. L. 33. 1.

67. *G. J. Mounier.* Een belangrijk vraagstuk onderzocht en toegelicht. A. V. G. 5. 161.

68. **B. Danielewicz.* Über eine allgemeine Bezeichnung in der Lebensversicherung (poln.). W. M. 6. 98.

69. *B. Oster.* Über die Herleitung der Formeln für Lebensversicherungsprämien. A. Gr. (3) 4. 44.

70. **G. J. Mounier.* Jets over de waarschijnlijkheid a posteriori in verband met premieberekening. A. V. G. 5. 327.

71. **Oster.* Zur Aufklärung über die Zillmersche Methode. A. V. L. 34. 17.

72. *A. Hunter.* Die Wirkung des Policenverfalls auf die Berechnung der Prämien und Reserven. J. I. A. 36. 51.

73. **H. F. Landré.* Differenz zwischen der Nettoreserve und der Reserve aus Reserveprämien. A. V. L. 34. 19.

74. **H. F. Landré.* Die Zillmersche Reserve. A. V. L. 34. 189.

75. **C. L. Landré.* Zusammenhang zwischen der Nettoreserve und der Reserve aus Reserveprämien. A. V. L. 34. 77.

76. **J. H. Peek.* Über eine rationelle Methode der Bestimmung des Zuschlags. Z. G. V. 2. 8.

77. **R. H. van Dorsten.* Sterfte formules. M. P. M. 8. 155.

78. *H. W. Manly* and *E. C. Thomas.* Über die Abschätzung von Pensionsfonds. J. I. A. 36. 209.

79. *L. Goldschmidt.* Die Höhe der Abgangsvergütung in der Lebensversicherung. R. V. (2) 14. 319.

80. **H. Unger.* Die Mathematik und Technik der Arbeitslosenversicherung. Z. G. V. 3. 177.

Siehe auch 18.

Spiele.

81. *A. Markov.* K voprosu o razorenii igrokov (Zur Frage nach dem Ruin der Spieler). S. M. Ka. 13. 38.

82. **G. Maupin.* Quelques jeux de hasard. Petits chevaux. Ba-Quan. Tournant 5 billes. Démarquage par les cartes. A. F. 1902. 259.

Numerisches Rechnen.

83. *J. Taylor.* Note on mental division by large numbers. P. E. M. S. 21. 140.

84. *A. Martin.* A method of computing the common logarithm of a number without making use of any logarithm but that of some power of 10. C. I. M. 2. 231.

85. **H. S. Davis.* Some vices and devices in astronomical computations. S. (2) 15. 289.

Siehe uuch 44; 2072—73.

Analytische Näherungsmethoden.

85[a]. *L. Tripart.* Du calcul approximatif. E. M. 4. 418.

85[b]. *E. Holst.* En tilnaermelsesformel. T. M. 14. A. 10.

86. *E. Borel.* Sur l'approximation les uns par les autres des nombres formant un ensemble dénombrable. C. R. 136. 297.

87. *E. Borel.* Sur l'approximation des nombres par les nombres rationels. C. R. 136. 1054.

88. *A. Wiman.* Über die angenäherte Darstellung von ganzen Funktionen. A. M. A. F. 1. 105.

89. **Puller.* Bestimmung des Wertes $c=\sqrt{a^2+b^2}$. A. V. N. 1902. 73.

90. **W. Wojtan.* Nowe wzory przyblizone na $\sqrt{a^2-b^2}$ (Neue Näherungsformeln zur Berechnung von $\sqrt{a^2-b^2}$). C. T. L. 1901. 103.

91. *L. Valençon.* Nota sobra un método abreviado para extraer la raiz cúbica. A. S. A. 55. 75.

92. — Estrazione abbreviata della radice quadrata. Pit. 9. 23.

93. *J. A. Normand.* Expressions algébriques approximatives des transscendantes logarithmiques et exponentielles. C. R. 136. 277; 436.

94. *A. W. Williamson.* Computation of logarithms. M. M. F. 10. 70.

95. *A. Kiselev.* Predel pogrešnosti soveršacmoj pri vyčislenijach pomoščju pjatiznačnych logarithmov (Fehlergrenze bei Rechnungen mit 5-stelligen Logarithmen). M. P. O. 29. 101.

96. *C. E. Mac Vicker.* Approximation to tan A. M. G. S. 2. 288.

97. *T. Adrian.* Über die Berechnung der Näherungswerte von π. U. M. N. 9. 30.

98. *I. Florov.* Zavisimost meždu perimetrami pravilnych mnogougolnikov i vyčislenie π (Zusammenhang zwischen den Umfängen der regulären Polygone und Berechnung von π). M. P. O. 29. 182.

99. *R. Gans.* Über die numerische Auflösung von partiellen Differentialgleichungen. Z. S. 48. 394.

100. *A. Pujet.* Évaluation des aires paraboliques et des volumes analogues. Methode approchée de Gauß. T. S. U. R. 1. 295.

101. **M. H. Bauer.* Annäherungsformeln im Schiffsbau. S. B. 4. 375; 435; 482.

Siehe auch 2052—53.

Numerische Gleichungen.

102. *E. B. van Vlock.* A sufficient condition for the maximum number of imaginary roots of an equation of the n-th degree. A of M. (2) 4. 190.

103. *A. Pellet.* Sur l'approximation des racines réelles des équations. S.M. 30. 176.

104. **L. E. Boettcher.* Rozwiązywanie równan liczebnych (Über die Auflösung der numerischen Gleichungen. C. T. L. 29. 269; 294.

105. **L. E. Boettcher.* Praktyczne rozwiązywanie liczebnych algebraicznych równań stopni wyższych (Über die Auflösung der algebraischen Gleichungen aller Grade). C. T. L. 1901. 7; 15.

106. **L. E. Boettcher.* Rozwiązywanie równań liczebnych. Przybliżony rachunek rzeczywistych pierwiastków (Lösung der numerischen Gleichungen. Genäherte Berechnung der reellen Wurzeln). C.T.L. 1901. 91; 114.

107. **A. Pellet.* Sur l'approximation des racines des équations. A.F. 1902. 166.

108. **F. Giudice.* Sul calcolo assintotico delle radici reali d'equazioni. G.B. 41. 14.

109. *P. A. Lambert.* New applications of Mac Lewins Series in the solution of equations and in the expansion of functions. P. P. S. 42. 85.

110. **R. Perrin.* Sur un critérium de l'existence de racines réelles d'une équation numérique dans un intervalle donné. A. F. 1902. 178.

111. *T. H. Miller.* On the imaginary roots of the equation $\cos x = x$. P. E. M. S. 21. 160.

112. *H. R. G. Opitz.* Über die Auflösung der transzendenten Gleichung

$$\int_0^x e^{-x^2 dx} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\lambda x^{2\lambda+1}}{\lambda!\,(2\lambda+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

A. Gr. (3) 5. 42.

113. **W. Weiler.* Physikalische Gleichungen. P. B. R. L. 7. 18.

Siehe auch 100; 126; 166; 168; 173.

Mathematische Tafeln.

114. **A. Schleußinger.* Eine Multiplikationstafel. Z. B. G. V. 1902. 6.

115. *O. Dietrichkeit.* Höherstellige Logarithmentafeln. Z. S. 48. 457.

116. *S. Gundelfinger.* Historisches und Kritisches zur Berechnung von $\log \frac{1+x}{1-x}$ bei gegebenem $\log x$. A.N.K. 160. 293.

117. **P. Barbarin.* Sur les tables trigonometriques centésimales. R. M. S. 12. 449.

118. *C. E. Adams.* On the construction of a table of natural sizes by means of a new relation between the leading differences. T. N. Z. I. 35. 408.

Siehe auch 153; 169; 2123.

Logarithmen.

Siehe 84; 115; 116; 172.

Nomographie.

119. *M. d'Ocagne.* Über einige elementare Grundgedanken der Nomographie. A. Gr. (3) 5. 70.

120. *C. Berdellé.* Sur l'usage du papier rayé en Algèbre. E. M. 4. 455.

121. *M. d'Ocagne.* Sur une classification nouvelle des modes de représentation nomographique des équations à un nombre quelconque de variables. C. R. 136. 33.

122. *M. d'Ocagne.* Sur la résolution nomographique du triangle de position pour une latitude donnée. C. R. 135. 728.

123. *H. Fürle.* Über Rechenblätter. S. M. B. 1903. 26.

Siehe auch 125; 160; 1370; 2054a.

Graphischer Kalkul.

124. *N. Delaunay.* Sur le calcul graphique des fonctions elliptiques et de quelques fonctions ultraelliptiques. S. M. 30. 113.

125. *M. d'Ocagne.* Sur divers modes d'application de la méthode graphique à l'art du calcul. C. I. M. 2. 419.

126. *A. E. Wynne.* Note on the graphical solution of quadratics. M.G.S. 2. 228.

127. **S. J. Rutgers.* Graphische Berekening van beton-ijzer-constructies. D. I. G. 17. 246.

128. **F. Merl.* Graphische Bestimmung von Grabenprofilen und Rohrweiten. K. T. 1902. 20.

129. **K. Orbanowski* und *H. Rothe.* Graphische Ermittelung von Schottkurven. S. B. 3. 425; 469.

Siehe auch 216; 232; 275; 1075; 1391; 1584; 1971—77.

Mittelwerte.

130. **H. C. Plummer.* Note on the principle of the arithmetic mean. M.N.A.S. 62. 545.

Siehe auch 1339.

Interpolation.

131. *C. Alasia.* Un capitul al teoriei interpolaţiunii. G. M. B. 8. 33; 55; 81; 104.

132. *C. A. Laisant.* Note sur un problème d'interpolation. S. M. 31. 66.

133. *F. G. Teixeira.* Sur la convergence des formules d'interpolation de Lagrange, de Gauß etc. Cr. 126. 116.

134. *E. G. Brown.* On the use of standard functions in interpolation. T. N. Z. I. 35. 420.

135. *J. Weeder.* Over interpolatie gegrond op eene gestelde minimumwaarde. C. A. A. 11. 434.

Harmonische Analyse.

136. *H. S. Carlslaw.* The applications of Fouriers series to mathematical physics. R. B. A. 71. 557.

137. *R. W. Prentiss.* Practical application of Fouriers series to harmonic analysis. P. R. 15. 257.

Siehe 665; 2027—28.

Geometrische Näherungsmethoden.

138. *B. Carrara.* I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. R. F. M. 3. 926; 1056. 4 A. 39; 142; 337; 442; B. 3.

139. *E. Lebon.* Sulla identità di 2 metodi elementari pel calcolo di π. M. P. A. 2. 197.

140. *G. B. Halsted.* The length of the circle. M. M. F. 9. 248.

140a. *W. Koch.* Über Näherungsformeln zur elementaren Berechnung der Zahl π. U. M. N. 9. 83; 104. — *C. Langhans.* 53.

141. *R. M. Milne.* Extension of Huygens' approximation to a circular arc. M. G. S. 2. 309.

142. *O. Biermann.* Über näherungsweise Kubaturen. M. H. 14. 211.

143. *O. Biermann.* Zur näherungsweisen Quadratur und Kubatur. M. H 14. 226.

144. *F. Berger.* Über ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Form empirisch ermittelter Kurven. Z. S. 49. 306.

Geometrographie.

145. *R. Mehmke.* Bemerkungen zur Geometrographie. D. V. M. 12. 113. — *R. Güntsche* 289.

146. *R. Güntsche.* Beiträge zur Geometrographie II. A. Gr. (3) 6. 133.

147. *S. Leisen.* Konstitutions- und Strukturformeln für geometrische Konstruktionen. U. M. N. 9. 33; 55.

148. *R. Güntsche.* Geometrographische Siebzehnteilung des Kreises. S. M. B. 1902. 10.

Winkelteilung.

149. *J. N. Miller.* Application of Millers trisector to the quinquesection of any angle. P. R. S. E. 24. 302.

150. *H. Schoeler.* Angenäherte n-Teilung eines beliebigen Winkels mit Zirkel und Lineal. A. Gr. (3) 4. 128.

151. *E. Lampe.* Bemerkungen über einige angenäherte n-Teilungen von Winkeln. A. Gr. (3) 4. 130.

152. *A. Kempe.* Über die stetige Erzeugung gewisser Schleifenkurven, die einen beliebigen Winkel in gleiche Teile teilen. Z. S. 49. 342.

153. Dezimale Ephemeriden. Z. S. 49. 97.

Siehe auch 169.

Korbbogenkurven.

154. **Puller.* Absteckung eines zweifachen Korbbogens und Berechnung von Korbbögen. Z. R. W. L. 1902. 62; 132.

Verbindungskurven.

155. *C. Jorio.* Contributo allo studio delle curve di raccordo a due centri. A. A. T. 68. 656.

156. * *N. Cummings*. Solutions of curve passing through 2 fixed points. E.N. 47. 438.

Siehe auch 175; 207; 1392; 1564—66; 1970; 2019—23; 2029—32.

Inhalte.

157. *J. Schnöckel*. Ein Apparat zur Bestimmung des Flächeninhalts, des statischen Moments, Trägheitsmoments und beliebiger anderer Momente krummlinig begrenzter ebener Figuren. Z.S. 49. 372.

Siehe auch 100; 142; 234; 1973; 2009—11; 2054 a.

Mechanische Quadratur.

158. *E. Lampe*. Elementare Ableitung einiger Formeln der mechanischen Quadratur. S.M.B. 1903. 29.

159. * *J. Buchanan*. The errors in certain quadrature formulae. P.L.M.S. 34. 335.

Siehe auch 100; 143; 1973.

Planimeter.

160. *A. Gawehn*. Die Quadratglastafel als Universalplanimeter. A.V.N. 1902. 205.

Siehe auch 317.

Rechenmaschinen.

161. * — Rechenapparate der Gegenwart. A.B.Z. 1901. No. 12.

162. * *Werner*. Rechenmaschinen. V.F.Z.M. 20 II 449.

163. * *G. Lange*. Die deutsche Rechenmaschine. B.S.P. 1902. No. 22.

164. * *A. Wolff*. Kann die russische Rechenmaschine ihren alten Platz in der Schule behaupten oder ist ihr der Posner-Langersche Rechenkasten vorzuziehen. A.F.S.P. 5. 465; 488; 506; 527.

165. *Abegg*. Über mechanische Rechenhilfsmittel nach logarithmischem Prinzipe. J.S.G. 80. 16.

166. *V. Gernet*. Mašina Meslin'a dlja rešenija uravnenij (Meslins Maschine zur Lösung von Gleichungen). M.P.O. 29. 242.

167. *Troncet*. Sur un calculateur mécanique appelé arithmographe. C.R. 36. 807.

168. *F. Marre*. Máquina para resolver ecuaciones imaginada y construida por el profesor Meslin. A.S.A. 55. 161

169. *L. Fabry*. Note sur l'emploi de la machine à calculer et de la division centésimale de l'angle droit pour le calcul des ephémérides de planètes. B.A. 20. 209.

170. * *D. T. Wilson*. The star-correction machine. P.A. 10. 82.

171. *R. Mehmke*. Anfrage. Z.S. 49. 98.

Siehe auch 157; 2070; 2071; 2074.

Rechenschieber.

172. *C. S. Jackson*. The slide rule and its use in teaching logarithms. M.G.S. 2. 330.

173. * *W. Wojtan*. Rozwiązywanie równań drugiego stopnia zapomocą wysawki logarytmicznej (Auflösung der quadratischen Gleichungen mittels des Rechenschiebers). C.T.L. 1901. 68.

174. * *H. Thiele*. Rechenschieber im Laboratorium. Z.Ö.C,P. 1901. 467.

175. * *Stiff*. Slide rule computations for laying out curves. E.N. 47. 147.

Gometrischer Kalkul.

176. *E. Carvallo*. Conférence sur les notions de calcul géométrique utilisées en mécanique et physique. N.A. (4). 2. 433.

Vektorenrechnung.

177. *L. Prandtl*. Grundsätze für eine einheitliche Schreibung der Vektorenrechnung im technischen Unterricht. D.V.M. 12. 444.

178. *M. Casamassima*. Principii di calcolo vettoriale. Pit. 9. 1.

179. *F. Schur*. Über die Zusammensetzung von Vektoren. Z.S. 49. 352 — *H. Hamel* 362.

180. *J. V. Collins*. A general notation on vector analysis. M.M.F. 10. 161.

181. *R. W. H. T. Hudson*. The analytic theory of displacements. S.A.Am. 9. 308.

182. * *E. Correale*. Alcune proprietà relative a sistemi equivalenti di vettori. G.B. 40. 281.

183. *C. Burali-Forti*. I. vettori nella geometria elementare. Pit. 9. 65; 113.

184. *P. O. Peirce*. On families of curves which are the lines of certain plane vectors either solenoidal or lamellar. P.A.Bo. 38. 663.

185. *P. Appell*. Sur les fonctions et vecteurs de point contenant uniquement les dérivées premières des composantes de la vitesse. S.M. 31. 68.

186. *F. L. Hitchcock*. On vector differentials. P.M. (5). 5. 187.

187. *E. Naetsch*. Über ein in der Vektoranalysis auftretendes System partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung. A. Gr. (3) 5. 56.

188. *E. Jahnke.* Eine einfache Anwendung der Vektorrechnung auf die Optik. S.M.B. 1903. 53.

Siehe auch 446; 532; 790.

Quaternionen.

189. *D. Efremov.* Osnovanija geometričeskoj teorii kvaternionov (Grundlagen einer geometrischen Theorie der Quaternionen. M.P.O 30. 1; 25; 49; 82.

190. *A. Baker.* The principles at the base of quaternion analysis. P.T.R.S.C. (2). 7. C 17.

191. *P. G. Tait.* Quaternion notes. P.R.S.E. 24. 344.

192. *L. E. Dickson.* A matrix defined by the quaternion group. M.M.F. 9. 243.

193. *W. Peddie.* Quaternion-binaries, an extension of quaternions to give an eight-element system applicable to ordinary space. P.R.S.E. 24. 70.

194. *C. J. Joly.* Quaternions and projective geometry. P.R.S.L. 71. 177; T.R.S.L. 201. 223.

195. *W. Peddie.* On the use of quaternions in the theory of screws. P.R.S.E. 24. 314.

Zeichenwerkzeuge.

196. *— Création d'une machine à dessiner universelle. R.G.O. 13. 797.

197. *C. Pagliano.* Sull'uso del compasso di apertura fissa nella risoluzione dei problemi della geometria elementare e sulla sostituzione di un disco al predetto compasso. B.D.M. 1. 201.

198. *E. Buckingham.* On a mechanical method for tracing the curves x^2y = const. P.R. 17. 117.

199. *H. Poole.* A mechanical construction for the quartic trisectrix. P.E.M.S. 21. 138.

200. **H. C. Richards.* On the harmonic curves known as Lissajous figures. J.F.I. 153. 269.

201. **S. Mackenzie.* An instrument for drawing a sine curve. P.R. 15. 366.

202. **C. O. Mailloux.* Notes sur le tracé des courbes de vitesses en fonction du temps. T.A.I.E.E. 19. 1035.

Siehe auch 2050; 2164—66.

Kurvenzeichnen.

203. **H. Feldmann.* Die Papierkonstruktion der Ellipse und die graphische Abwicklung des Kreises. B.L. 1. 274; 289.

204. **A. Jagot.* Tracé mécanique de la sinusoïde. R.S. 18. 53.

205. **V. Strouhal.* Analytische Darstellung der Lissajousschen Figuren. S.G.B. 1902. N. 9.

206. *— Génération géométrique des courbes ornamentales chez les Grecs. R.G.O. 13. 845.

207. **H. Fischer.* Kurvenabsteckung mittelst Strahlenbest. u. Ableitung hieraus. Z.F. 1902. 674.

208. **O. Simony.* Kurve mit konstantem hydraulischem Radius. Z.G.F. 1902. 114.

209. **Taylor.* Suggestion fore a more uniform practice in fixing the lengths of spiral courves. E.N. 47. 308.

Siehe auch 144; 152; 198—201; 282; 2024—27.

Darstellende Geometrie.

210. **S. Bordiga.* I metodi della geometria descrittiva. A.I.V. (8) 1. 609.

211. *E. Müller.* Zur Frage der Bezeichnungsweise der darstellenden Geometrie. Z.S. 49. 89.

212. *R. Mehmke.* Über die darstellend-geometrische Konstruktion der Schmiegungsebene einer Raumkurve in einem gegebenen Punkt. Z.S. 49. 277.

213. *F. J. Obenrauch.* Die erste Raumkurve der Pythagoräischen Schule, ihre orthogonale und imaginäre Projektion. M.H. 14. 187.

214. *C. Heumann.* Die Darstellung der Krümmung nach der Methode der darstellenden Geometrie. A.Gr. (3) 6. 283.

Projektion.

215. **B. Szépréthy.* Egy különös kettös projekczió alkalmazása a gömb felülelénck ábrázolására (Über eine spezielle Doppelprojektion zur Darstellung der Kugeloberfläche). M.S.L. 10. 207.

216. *H. Hilton.* On the graphical solution of astronomical problems. T.M. (6) 6. 66.

217. **P. Cassani.* Sulla proiezione stereoscopica. A.I.V. (8) 2. 35.

Siehe auch 213; 222; 236; 237; 1649; 2065.

Perspektive.

218. *D. Regis.* Sulla prospettiva parallela. A.A.T. 38. 314.

219. **F. R. Vogel.* Darstellungsweise in der isometrischen Perspektive. D.B.H. 1902. No. 48.

220. *E. Baudran.* Représentation des objets au moyen de deux perspectives sur un même tableau. N.A. (4) 2. 552.

221. **A. E. Caddy.* Photographie perspective. I.E.E. (2) 8. 82.

Axonometrie.

222. *C. Beyel.* Über Axonometrie und schiefe Parallelprojektionen. A. Gr. (3) 4. 237.

223. **J. Sobotka.* Axonometrische Darstellung aus 2 Rissen und Koordinatentransformationen. S. G. B. 1901. No. 35.

224. *F. Schilling.* Über den Pohlkeschen Satz. Z. S. 48. 487.

Schattenkonstruktionen.

225. *E. Michel.* Sur la courbe d'ombre d'une surface particulière du 4. ordre. A. F. 1902. 171.

Beleuchtungskunde.

226. *E. Weinnoldt.* Über die Konstruktion von Isophengen auf F_2. A. Gr. (3) 4. 22.

Photogrammetrie.

227. **G. Loria.* Fondamenti geometrici della fotogrammetria. G. B. 41. 1.

228. *P. Caubet.* Détermination des éléments des clichés photographiques d'une même zone. B. A. 19. 420.

229. *K. Bohlin.* Vereinfachte Formeln für Astrogramme. A. V. A. S. 28. No. 5.

230. *E. Dolezal.* Photogrammetrische Lösung des Wolkenproblems aus einem Standpunkte bei Verwendung der Reflexe. S. A. W. 111. 788.

Siehe auch 1468; 1598; 1651; 1699.

Kristallographie.

231. **G. Wolff.* Untersuchungen über die Genauigkeitsgrenzen der Gesetze der geometrischen Kristallographie. Z. K. M. 38. 1.

232. **A. J. Moses* u. *A. F. Rogers.* Formeln und graphische Methoden zur Bestimmung von Kristallen auf Grund von Koordinatenwinkeln und Millerschen Indices. Z. K. M. 38. 209.

233. **A. Johnsen.* Bemerkungen zum Kristallvolumen. C. M. G. 1902. 591.

234. *G. Cesaro.* Calcule du volume d'une forme crystalline quelconque. M. S. L. 3. No. 3.

235. **E. Sommerfeldt.* Bemerkungen zu der Volumtheorie von Kristallen. C. M. G. 1902. 633.

236. *V. Goldschmidt.* Über Kristallprojektionen. Z. K. M. 36. 388.

237. **K. Schaum.* Projektion mit dem Pulfrich-Leissschen Kristallrefraktoskop (Schnittkurven der Index- und Strahlenflächen). S. G. M. 1902. 64.

238. *U. Panichi.* Contributi alla cristallografia zonale. L'omologia e la cristallografia zonale. A. A. T. 38. 135.

239. **H. Hilton.* Ein einfacher Beweis für die Rationalität des anharmonischen Verhältnisses von Flächen einer Zone. M. M. L. 13. 69.

240. **J. Beckenkamp.* Die vizinalen Flächen und das Rationalitätsgesetz. Z. K. M. 36. 111.

241. **H. Hilton.* Über Violas Methode der Abteilung der Kristallklassen aus dem Prinzip der Homogeneität. Z. K. M. 36. 151. — C. Viola 153.

242. **C. Lippitsch.* Stereometrie der einfachen isoaxialen Formen des regulären Kristallsystems. Z. K. M. 38. 227.

243. **G. Wulff.* Über den Gang der Rechnung in der Theodolitmethode. Z. K. M. 36. 29.

Siehe auch 622.

Modelle.

244. *V. Snyder.* Models of the Weierstrass Sigma function and the elliptic integral of the second kind. M. M. F. 9. 121.

245. *T. Schmid.* Über ein kinematisches Modell. Z. S. 48. 462.

Mechanik. Allgemeines.

246. **G. K. Suslov.* Elemente der analytischen Mechanik (russ.) B. U. K. 1902. No. 3. 4. 6. 7. 9. 11. 12e.

Siehe auch 1; 176.

Prinzipien der Mechanik.

247. *— Grundlagen der Mechanik. G. W. B. B. 1902. No. 9.

248. *P. Duhem.* L'évolution de la mécanique. R. G. O. 14. 63; 119; 171; 247; 301; 352; 416.

249. **V. Ermakov.* Osnovnye zakony mechaniki. (Die Grundgesetze der Mechanik). T. P. M. K. 1901. 21.

250. **M. Lévy.* Sur les principes de la mécanique rationelle de M. C. de Freycinet. J. D. S. 1902. 245.

251. *G. K. Suslov.* Die Grundhypothese der Dynamik. B. U. K. 1902. No. 10c.

252. *W. Peddie.* Physical principles. N. 68. 78.

253. **L. Couturat.* Sur la métaphysique de Leibniz. R. D. M. M. 10. 1.

254. **E. Grimsehl.* Zur experimentellen Einführung der Begriffe Kraft, Maß und Energie. Z. P. 16. 135.

255. **B. Biegeleisen.* Rozwój pojęcia ruchu w mechanice. (Die Entwicklung

des Begriffs der Bewegung in der Mechanik). P.F.W. 4. 306; 5. 17,

256. *G. Combebiac.* Les idées de Hertz sur la mécanique. E.M. 4. 247.

257. *J. Classen.* Über die Anwendung mechanischer Grundvorstellungen auf naturphilosophische Entwicklungen. V. N.V.H. (3) 9. IX.

258. **K. Gruhn.* Eine neue Richtkraft. D.M. 11. 73.

259. *Z. Gyözö.* Über den Energieumsatz in der Mechanik. A.P.L. 10. 419. — *H. Januschke* 11. 445.

260. **F. J. Rogers.* Special cases of velocity of energy. P.R. 16. 230.

261. **H. Zemplén.* Über den Energieumsatz in der Mechanik (ung.). M. P.L. 10. 318.

262. **W. Lermantov.* Apparat von Hicks zur experimentellen Erläuterung des Prinzips von der Erhaltung der Bewegungsmenge (russ.) J.R.P.C.G. 34. 367

263. **G. Zemplén.* Anordnung der mechanischen Prinzipien auf Bewegungen mit Reibung. M.P.L. 10. 128.

264. *M. Réthy.* Über das Prinzip der kleinsten Aktion und jene Klasse der mechanischen Prinzipien, der es angehört. (ung.). M.T.E. 20. 354.

265. *H. Brell.* Über die Anwendung des Prinzips des kleinsten Zwanges auf die Schwingungen einer Saite. S.A.W. 111. 1088.

266. *E. Förster.* Zum Ostwaldschen Axiom der Mechanik. Z.S. 49. 84.

Siehe auch 401; 402; 547; 1014; 1091; 1449; 1450.

Kinematik.

267. **R. de Saussure.* Théorie géométrique du mouvement des corps. A. S.G. (4) 14. 14; 209.

268. *Andoyer.* Sur un problème de mécanique rationnelle. B.D. 26. 293.

269. *F. Kraft.* Application du mouvement d'un plan invariable Σ, passant d'une position donnée Σ_1 à une autre position donnée Σ_2. E.M. 5. 30.

270. *F. Kraft.* Équivalence du mouvement d'un système invariable à 3 dimensions Σ qui passe d'une manière quelconque d'une position donnée Σ_1 à une autre position donnée Σ_2. E.M. 5. 178.

271. *P. J. Suchar.* Sur un exemple de transformation corrélative en mécanique. C.R. 135. 679.

272. *P. J. Suchar.* Sur une transformation réciproque en mécanique. C. R. 136. 76.

273. **K. Zorawski.* O pewnych zmianach dlugości liniowych elementów podczas ruchu ciaglego ukla du materyalnych punktow II (Über gewisse Variationen der linearen Elemente während der Bewegung eines kontinuierlichen Punktsystems). C.A.C. 42. 170.

274. **L. Bickart.* Rotations dans un plan. R.M.S. 12. 569.

275. *C. Runge.* Über die Zusammensetzung und Zerlegung von Drehungen auf graphischem Wege. Z.S. 48. 435.

276. **K. Zorawski.* Über gewisse Änderungsgeschwindigkeiten von Linienelementen bei der Bewegung eines kontinuierlichen materiellen Systems. B.I. C. 1901. 486.

277. *W. S. Burnside.* On the four rotations wich displace one orthogonal system of axes into another. A.M. 25. 291.

278. *G. O. James.* Note on the projections of the absolute acceleration in relative motion. S.M.Am. 9. 143.

279. *G. Fubini.* Sugli spazii a 4 dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti. A.D.M (3) 9. 33.

280. *K. Laves.* Die Bedeutung der Hansenschen idealen Koordinaten vom kinematischen Standpunkt betrachtet. A.N.K. 161. 277.

281. *F. Kraft.* Équivalence du mouvement d'une ligne droite invariable σ au déplacement d'une position donnée σ_1 à une autre position donnée σ_2. E. M. 4. 347.

282. *J. J. Quinn.* A development of the conic sections by kinematic methods. M.M.F. 9. 283.

283. *G. Koenigs.* Sur le théorème analogue à celui de Bobillier dans le cas du roulement d'une surface sur une surface applicable. C.A. 136. 354.

284. *V. Strazzeri.* Sul moto di una sfera che si appoggia a due rette che l'incontrano. M.P.A. 2. 243.

285. *P. Duhem.* Sur quelques formules de cinématique utiles dans la théorie générale de l'élasticité. C.R. 136. 139.

286. **G. Ramisch.* Kinematische Bestimmungen der Ortsveränderung eines Punktes von einem Krahngerüst. B.I. Z. 2. 107; 115.

287. *F. Jung.* Zur geometrischen Behandlung des Massenausgleichs bei vierkurbeligen Schiffsmaschinen. D.V.N. 74. 47.

Siehe auch 202; 245; 335; 384; 1669; 2012; 2085; 2087; 2091—92; 2097.

Kinematische Geometrie.

288. *R. Mehmke.* Über die Benennung und kinematische Unterscheidung der

verschiedenen Arten von Kurvenpunkten, sowie über Krümmungen und Windungen verschiedener Ordnung. Z.S. 49. 62.

Mechanismen.

289. *O. Biermann.* Kinematische Deutung der additiven Periodizität. M.H. 14. 206.

290. **A. Emch.* Algebraic transformations of a complex variable realized by linkages. T.S.M.Am. 3. 493.

291. *P. Somoff.* Über einige Gelenksysteme mit ähnlich-veränderlichen oder affin veränderlichen Elementen. Z.S. 49. 25.

292. **F. J. Vaes.* Indeeling van de stangenvierhoeken. D.I.G. 16. 270.

293. **E. Delassus.* Sur les systèmes articulés gauches. A.E.N. (3) 19. 119.

294. **M. Pelíšek.* Sur le déplacement du quadrilatère articulé gauche. B.I.P. 6. 40.

295. **F. W. Rüffert.* Über Hohltriebe und Flankenzahntriebe. D.U.Z. 26. 270; 284.

296. **B. v. Czudnochowski.* Neue elektromagnetische Bewegungsmechanismen. Z.P. 16. 48.

297. *G. Koenigs.* Sur le mouvement relatif de la pièce et de l'outil dans la taille des profils des mécanismes. C.R. 136. 1056.

Siehe auch 406—08; 2013—17; 2077.

Schraubenrechnung.

298. **R. W. H. T. Hudson.* Matrix rotation in the theory of screws. M.M. 32. 51.; R.BA. 72. 528.

299. **C. J. Joly.* Representation of screws by weighted points. T.R.I.A. 32. 61.

Siehe auch 195; 369; 394.

Statik.

300. **Levi-Cività.* Cinetostatica. A. M.A.P. 18.

301. **E. Wolletz.* Zur Lehre von den 3 Gleichgewichtsarten eines nur der Schwerkraft unterworfenen starren Systems. * L.L.P. 67. 92. — *A. Lechthaler* 69. 62.

302. *G. Bardelli.* Su un teorema statico di Leibniz. R.I.L. (2) 35. 412.

303. *R. Mehmke.* Zur Reduktion eines Kräftesystems auf 2 Einzelkräfte. Z.S. 49. 382.

304. *G. Hamel.* Über die Instabilität der Gleichgewichtslage eines Systems von 2 Freiheitsgraden. M.A. 57. 541.

305. *A. Dittrich.* Jok třeba zvoliti vazby a síly, aby soustava jimi daná dala se realisovati (Wie muß man Verbindungen und Kräfte wählen, damit ein gegebenes System derselben sich verwirklichen läßt). C. 31. 406.

306. *H. W. Chapman.* The problem of Columbus. P.M. (6) 5. 458.

307. **M. Lewicki.* Obliczanie statyczne murów odzieżowych (Statische Berechnung von Böschungsmauern). P. T. W. 39. 129.

308. **F. Kretschmar.* Berechnung statisch unbestimmter Systeme im Schiffsbau. S.B. 2. 772; 812; 909, 955.

309. **F. Kretschmar.* Statisch unbestimmte Systeme im Schiffsbau. S.B. 3. 385.

Siehe auch 797; 843; 2082—2122.

Graphische Statik.

310. *N. J. Hatzidakis.* Eine Bemerkung zur graphischen Statik. Z. S. 49. 95.

311. *B. Mayor.* Sur la statique graphique dans l'espace. C. R. 136. 85.

312. *B. Mayor.* Sur une réprésentation plane de l'espace et son application à la statique graphique. C. R. 135. 1318; 136. 37.

313. *W. Schlink.* Über die Deformation von rhombischen Netzen und ähnliche Probleme. D. V. M. 12. 309.

Siehe auch 1548.

Schwerpunkte.

314. **M. H. Bauer.* Graphische Ermittlung von Schwerpunkten und Trägheitsmomenten beliebig gestalteter Flächen. Ihre Anwendung auf schiffbauliche Rechnungen. S. B. 2. 440.

315. **P. Weiske.* Neue Schwerpunktsbestimmung des Trapezes. Z.A.W. 48. 75.

316. *C. E. Wasteels.* Sur le centre de gravité des figures sphériques. M. (3) 2. 217; 241.

317. *G. L. Tiraspolskij.* Bestimmung des Schwerpunkts einer krummlinig begrenzten ebenen Fläche mit Hilfe des Polarplanimeters von Amsler. Z.S. 49. 92.

318. *O. Stolz.* Ein Satz der Integralgeometrie. S. A. W. 112. 343.

Siehe auch 322; 353; 1974; 2054a.

Momente.

319. *H. Amstein.* Détermination de la valeur de l'intégrale $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{a^2 \sin^{2p}\vartheta + b^2 \cos^{2p}\vartheta}$. B. S. V. (4) 39. 1.

820. *W. H. Derriman.* On an oscillating table for determining moments of inertia. PM. (6) 5. 648.

821. *E. Rehfeld.* Reduktion der Trägheitsmomente einfacher Körper auf die Trägheitsmomente einzelner Massenpunkte, die auf ihrer Oberfläche liegen. A. Gr. (3) 6. 237.

822. **H. Keferstein.* Berechnung des Trägheitsmomentes eines Körpers in bezug auf eine zu einer Schwerpunktsachse parallele Achse. Z. P. 16. 77.

823. *G. Cesàro.* Sur les moments d'inertie des polygones planes et des polyèdres. N. M. A. B. 54. 1.

824. *S. Jolles.* Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines Raumstückes. A. Gr. (3) 4. 100.

Siehe auch 157; 287; 314; 1974; 2054a; 2081; 2094.

Kettenlinien.

825. *C. Burali-Forti.* Sulle linee funicolari. M.P.A. 2. 184.

826. *H. Bouasse.* Sur les courbes de déformation des fils. A. T. (2) 3; 85; 217; 4. 357. 5. 127. — *A. Leduc* et *P. Sacerdote* 5. 125.

827. *G. Pennacchietti.* Sopra un integrale d'una classe di problemi dell' equilibrio d'un filo flessibile e inestendibile. R. C. M. P. 16. 376.

828. *A. Kneser.* Die Stabilität des Gleichgewichts hängender schwerer Fäden. Cr. 125. 189.

829. *R. C. Maclaurin.* The influence of stiffness on the form of a suspended wire or tape. P. M. (6) 6. 166.

830. **H. Grob.* Einfache Methode zur Bestimmung der Zugspannungen und Kurvenform beliebig aufgehängter Freileitungen. M. P. G. Z. 3. 8.

Siehe auch 562; 2114; 2115.

Differentialgleichungen der Mechanik.

831. *G. Morera.* Sulle equazioni dinamiche di Lagrange. A. A. T. 38. 121.

832. *G. Fubini.* Ricerche gruppali relative alle equazioni della dinamica. R. A. L. R. 12 A. 502; B. 60.

833. **P. V. Voronec.* Über eine Transformation der Gleichungen der Mechanik (russ.). B. U. K. 1902. No. 7c.

834. *L. Boltzmann.* Über die Form der Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome generalisierte Koordinaten. A. A. W. 1902. 355; S. A. W. 111. 1603; P. Z. 4. 281.

Siehe auch 339; 363; 364.

Dynamik des Punktes.

835. *N. J. Hatzidakis.* Notes sur la mécanique. E. M. 4. 413.

836. **N. N. Šiler.* Pädagogische Bemerkung in betreff der Formel der Zentripetalkraft (russ.). B. U. K. 1902. Nr. 10c.

837. *A. F. dall' Acqua.* Moti di un punto libero a caratteristiche indipendenti. R. A. L. R. 12. A. 243.

838. *A. F. dall' Acqua.* Traiettorie dinamiche di un punto libero sollecitato da forze conservative. R. A. L. R. 12. A. 333.

839. *E. Vallier.* Sur la discussion et l'intégration des équations différentielles du 2. ordre à coefficients constants. C. R. 136. 919; 941.

Siehe auch 340; 341.

Gezwungene Bewegung.

840. *W. F. Meyer.* Über einen Zusammenhang zwischen Flächentheorie und Mechanik. D.V. M. 12. 482.

841. *C. Bourlet.* Sur le mouvement d'un point pesant sur une courbe avec une résistance proportionnelle au carré de la vitesse. N. A. (4) 3. 175.

Zentralbewegung.

842. *V. Jamet.* Sur la théorie des forces centrales. N. A. (4) 3. 216.

843. *C. A. Laisant.* Sur une propriété des mouvements dus à une force centrale. S. M. 31. 156.

844. **A. Cadenat.* Sur le paradoxe de mécanique de Hertz. A. F. 1902. 97.

845. *E. Strömgren.* Über die Bedeutung kleiner Massenänderungen für die Newtonsche Zentralbewegung. A.N.K. 163. 129.

846. *H. Liebmann.* Über die Zentralbewegung in der nichteuklidischen Geometrie. B. G. L. 55. 146.

847. *Laisant.* Une propriété des orbites fermées correspondant à des forces centrales. C. R. 135. 880.

Siehe auch 271; 336.

Tautochronen.

848. *J. Weingarten.* Über eine Aufgabe der Mechanik. A. Gr. (3) 5. 1.

Brachistochronen.

849. *Hâton de la Goupillière.* Sur le problème des brachistochrones. C.R. 135. 614.

850. *Hâton de la Goupillière.* Quelques cas d'intégration de l'équation des brachistochrones. C. R. 135. 657.

Pendel.

351. *S. A. F. White.* Note on the compound pendulum. P.P.S.L. 18. 231.

352. **W. Schultz.* Das Beschweren des Pendels als Mittel zur Gangverlangsamung. D. U. Z 25. 69; 86.

353. **G. Bley.* Bestimmung des Schwerpunktes und des Schwingungsmittelpunktes des Pendels. D. U. Z. 25. 246.

354. *F. v. Hefner-Alteneck.* Über die unmittelbare Beeinflussung von Pendelschwingungen durch äußere Kräfte. S. A. B. 1903. 842.

355. **St. Germain.* Le pendule sphérique. M. A. N. C. 1901.

356. **H. Schnell.* Der Foucaultsche Pendelversuch. Z. P. 16. 141.

357. *G. Neumayr.* Bestimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels auf absolutem Wege. A. A. M. 21. 479.

358. *F. Meisel.* Zur Theorie des Foucaultschen Pendelversuchs. Z. S. 48. 465.

359. *M. Volkov.* Majatnik Fuko (Das Foucaultsche Pendel). M. P. O. 28 256

360. **S. Riefler.* Das Nickelstahlkompensationspendel. D. U. Z. 26. 123.

361. *E. Wiechert.* Ein astatisches Pendel hoher Empfindlichkeit zur mechanischen Registrierung von Erdbeben. P. Z. 4. 821.

Siehe auch 378.

Dynamik des Körpers.

362. *C. Burali-Forti.* Sul moto di un corpo rigido. A. A. T. 38. 155.

363. *A. Waßmuth.* Über eine Ableitung der allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers. S. A. W. 111. 777.

364. *F. Jung.* Bemerkung zur Ableitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen. A. Gr. (3) 6. 206.

365. *R. Gilbert.* Mouvement initial d'un solide invariable. N. A. (4) 2. 562.

366. **E. Grimsehl.* Der „freie" Fall. Z. P. 16. 90.

367. **A. Hall.* The fall of bodies. S. (2) 17. 349.

368. **P. V. Voronec.* Die Bewegungsgleichung des ohne Gleitung auf der unveränderlichen Ebene rollenden Körpers (russ). B. U. K. 1903. Nr. 1b.

369. *A. Grünwald.* Zur Veranschaulichung des Schraubenbündels. Z. S. 49. 211.

370. **R. de la Rive.* Transmission de l'énergie cinétique dans un corps solide qui se meut sans forces extérieures. A. S. G. (4) 14. 313.

371. *H. Andoyer.* Problème de mécanique rationnelle. N. A. (4) 3. 241.

372. **B. A. Smith.* The bicycle wheel. R. A. A. 8. 191.

Siehe auch 495; 552.

Dynamik des Systems.

373. *M. Contarini.* Sul moto d'un sistema olonomo di corpi rigidi. R. A. L. R. 12. A. 507.

374. *P. Stäckel.* Bericht über die Mechanik mehrfacher Mannigfaltigkeiten. D. V. M. 12. 469.

375. *J. Horn.* Die Bewegungen in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage. Cr. 126. 194.

376. *Beghin.* Extension du théorème de Carnot au cas où certaines liaisons dépendent du temps. J. M. (5) 9. 29.

377. *S. H. Burbury.* On the variation of entropy as treated in W. Gibbs' Statistical Mechanics. P. M. (6) 6. 251.

378. **E. T. Whittaker.* On the solution of dynamical problems in term of trigonometric series. P. L. M. S. 34. 206.

379. *J. Mestschersky.* Über die Integration der Bewegungsgleichungen im Probleme zweier Körper von veränderlicher Masse. A. N. K. 159. 229.

380. *R. Mehmke.* Ein Satz über die Zweikörperbewegung. Z. S. 49. 96.

381. **H. S. Hele Shaw.* The resistance of road vehicles to traction. R. B. A. 72. 314.

382. **E. Wickersheimer.* Sur la direction des automobiles. A. F. 1902. 123.

383. **H. Frahm.* Neue Untersuchungen über die dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen von Schiffsmaschinen mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzschwingungen. M. F. I. 6. 33.

384. *F. Kraft.* Équivalence des rotations autour d'axes parallèles et des translations d'un système invariable. E. M. 4. 175.

Siehe auch 287; 1670; 1673.

Drehung.

385. *P. Duhem.* Sur la stabilité de l'équilibre relatif. J. M. (5) 8. 215.

386. *C. Lagrange.* Sur le mécanisme élémentaire de la rotation d'un corps autour de son centre d'inertie et sur la notion de l'infiniment petit absolu. B. A. B. 1903. 347.

387. *H. Graßmann.* Die Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt. Z. S. 48. 329.

388. **G. Kolossoff.* On the Goriatsheff case of rotation of a heavy body about a fixed point. M. M. 32. 84.

389. *G. Kolossoff.* Sur le cas de M. Goriatcheff de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe. R. C. M. P. 16. 346. — *R. Marcolongo* 349.

390. *H. Padé.* Sur l'herpolodie. N. A. (4) 3. 289.

Siehe auch 274; 275.

Kreisel.

391. *A. G. Greenhill.* The mathematical theory of the top. A. of M. 5. 1.

392. *E. G. Gallop.* On the rise of a spinning top. P. C. P. S. 12. 82.

393. *O. Kragh.* Über die Kreiselbewegung an der Erdoberfläche. Z. S. 49. 315.

394. **H. Sellentin.* Die Kreiselwirkung der Schrauben. S. B. 3. 227.

395. *A. S. Chessin.* On the motion of gyroscopes. T. S. L. 12. 21.

Relative Bewegung.

Siehe 393.

Stoß.

396. *Beghin* et *Rousseau.* Sur les percussions dans les systèmes non holonomes. J. M. (5) 9. 21. — *P. Appell* 27.

397. *W. Neljubov.* Bestimmung der Stoßdauer auf elektrometrischem Wege (russ.). J. R. P. C. G. 34. 561.

398. *T. Levi-Cività.* Condition du choc dans le problème restreint des 3 corps. C. R. 136. 221.

Reibung.

399. **Pagliani.* Teoria dell' attrito. A. A. P. (3) 6.

400. **L. Defessez.* Über die Reibung. D. U. Z. 26. 205.

401. *Z. Győző.* Über die Anwendung der mechanischen Prinzipe auf reibende Bewegungen. A. P. L. (4) 12. 356.

402. *H. Heimann.* Ein Beispiel zum Satze vom Minimum der Reibungsarbeit. Z. S. 48. 471.

403. **R. Stribeck.* Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager. M. F. I. 7. 1.

404. *H. Chaumat.* Sur les lois expérimentales du frottement de glissement. C. R. 136. 1634.

405. *T. Levi-Cività.* Sur la singularité dont sont affectées pour une vitesse nulle les équations du mouvement d'un point matériel frottant sur une surface. A. Gr. (3) 5. 28.

406. *Charve.* Frottement dans les engrenages. F. M. 13. 1.

407. **F. van Iterson.* Tandraderen. D. I. G. 16. 830.

408. **F. J. Vaes.* De afslijtingskarakteristick bij tandraderen. D. I. G. 16. 825.

409. *M. Segel.* Über eine Methode zur Bestimmung der inneren Reibung fester Körper. P. Z. 4. 493.

Siehe auch 263; 380; 1725; 2076—80.

Potentialtheorie.

410. *E. R. Neumann.* Neue Integraleigenschaften sukzessiver Potentiale. N. G. G. 1902. 242.

411. *A. M. Ljapunov.* Sur le principe fondamental de la méthode de Neumann dans le problème de Dirichlet. S. M. Kh. 7. 229.

412. *S. Zaremba.* Sur les fonctions fondamentales de M. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composée de polynomes curvilignes. C. R. 137. 39.

413. *J. Plemelj.* Über die Anwendung der Fredholmschen Funktionalgleichung in der Potentialtheorie. S. A. W. 112. 21.

414. **A. C. Dixon.* Expansions by means of Lamés fonctions. P. L. M. S. 35. 162.

415. *L. N. G. Filon.* On a new mode of expressing solutions of Laplace's equation in terms of operators involving Bessel's fonctions. P. M. (6; 6. 193.

416. **G. Lauricella.* Integrazione delle doppia equazione di Laplace in un campo a forma di corona circolare. A. I. V. (7) 10. 236.

417. **A. C. Dixon.* On the Newtonian potential. R. B. A. 72. 526.

418. **H. Nogaoka.* On some special cases of lines of force due to the homogeneous body of rotation. R. S. T. 9.

419. *D. N. Zejliger.* Potencial odnorodnago šarovago sloja na vnutrennjuju točku (Das Potential einer homogenen Kugelschicht auf einen Punkt im Innern derselben). S. M. Ka. 12. 85.

420. *T. J. Bromwich.* Note on the potential of a surface distribution. R. B. A 71. 556.

421. *A. Korn.* Einige Sätze über die Potentiale von Doppelbelegungen. S. A. M. 1903. 3.

422. **L. Donati.* Teorema generale relativo alla distribuzione del potenziale in una rete di fili conduttori con alcune applicazioni. R. I. B. (2) 4. 65.

423. *V. Volterra.* Sur les équations aux dérivées partielles. C. I. M. 2. 377.

424. *A. S. Chessin.* On the true potential of the force of gravity. T.S.L. 12. 1.

Siehe auch 591; 673; 921; 1013: 1038; 1039; 1886.

Attraktion.

425. **E. Wickersheimer.* Attraction universelle. A. F. 1902. 127.

426. *C. Neumann.* Über eine gewisse Gattung von Kugelflächenintegralen. B. G. L. 55. 264.

Gravitation.

427. **P. Lebedew.* The physical causes of the deviations from Newton' law of gravitation. A. J. C. 16. 155,

428. *R. Geigel.* Über Absorption von Gravitationsenergie durch radioaktive Substanz. A. P. L. 10. 429. — *W. Kaufmann* 894.

429. *G. Kučera.* Eine Bemerkung zur Arbeit des Herrn R. Geigel: Über Absorption von Gravitationsenergie (A. P. L. 10. 429). P. Z. 4. 319. — *R. Geigel* 353.

430. *G. Bakker.* Gravitation und Kapillarität. A. P. L. 11. 207.

431. **V. Wellmann.* On a numerical relation between light and gravitation. A. J. C. 15. 282.

Siehe auch 424; 649; 704; 922; 1110.

Hydrostatik.

432. *D. Schor.* Simon Stevin und das hydrostatische Paradoxon. B. M. (3) 3. 198.

433. *W. Ramsay.* Note on hydrostatic pressure. R. B. A. 71. 529.

434. *E. Scheeffer.* Gleichgewicht und Stabilität eines schwimmenden homogenen Würfels. S. N. D. (2) 10. Heft 4. 97.

435. **A. R. Liddell.* Die Verwertung von Stabilitätsberechnungen. S. B. 3. 195; 230.

436. *G. Schülen.* Stabiles Gleichgewicht schwimmender Körper. Z. H. 33. 356; 556.

437. **Sellentin.* Der Angriffspunkt des Auftriebs. S. B. 3. 529.

438. *W. Schmidt.* Zur Textgeschichte der schwimmenden Körper. B. M. (3) 3. 176.

439. *P. Duhem.* Sur la stabilité de l'équilibre et les variables sans inertie. C. R. 135. 1088.

440. *P. Duhem.* Sur la stabilité et les petites mouvements des corps fluides. J. M. (5) 9. 233.

441. *P. Duhem.* Des conditions nécessaires pour qu'un fluide soit en équilibre stabile. C. R. 135. 1290.

442. **V. Volterra.* Sur la stratification d'une masse fluide en équilibre. A. M. 27. 105.

443. **R. W. H. T. Hudson.* Note on the conditions of equilibrium of a flexible membrane under hydrostatic pressure. M. M. 31. 159.

Siehe auch 692.

Hydrodynamik.

444. *P. Duhem.* Sur les équations de l'hydrodynamique. A. T. (2) 3. 253.

445. *P. Duhem.* Recherches sur l'hydrodynamique. A. T. (2) 3. 315; 4. 101; 5. 1.

446. *P. Appell.* Sur quelques fonctions et vecteurs de point dans le mouvement d'un fluide. C. R. 136. 187.

447. *P. Appell.* Sur quelques fonctions de point dans le mouvement d'un fluide. J. M. (5) 9. 1.

448. *F. Ahlborn.* Über den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes. A. G. N. H. 17. 3.

449. **W. M. Kutta.* Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten. I. A. M. 6. 133.

450. *S. R. Cook.* On the distribution of pressure around spheres in a viscous fluid. P. M. (6) 6. 424.

451. **L. J. Bodaszewski.* Teorya ruchu wody na zasadzie ruchu chu falowego. Część pierwsza (Theorie der fließenden Gewässer, auf das Prinzip der Wellenlehre gegründet I). A. N. W. 1. 1.

452. *C. W. Oseen.* Bidrag till teorien för vågrörelse i strömmar. A. U. L. 37. Nr. 7.

453. *J. Boussinesq.* Extension à des cas où le fond est courbé, du mode d'écoulement qui se conserve dans une nappe d'eaux d'infiltration reposant sur un fond plat. C. R. 137. 153.

454. *J. Boussinesq.* Sur la stabilité d'un certain mode d'écoulement d'une nappe d'eaux d'infiltration. C. R. 137. 101.

455. *J. Boussinesq.* Sur un mode simple d'écoulement des nappes d'eau d'infiltration à lit horizontal, avec rebord vertical tout autour, lors qu'une partie de ce rebord est enlevée depuis la surface jusqu'au fond. C. R. 137. 5.

456. *L. Natanson.* Über die Dissipationsfunktion einer zähen Flüssigkeit. Z. P. C. 43. 179.

457. **L. Natanson.* Sur la fonction dissipative d'un fluide visqueux. B. I. C. 1902. 488.

458. *L. Natanson. Sur la propagation d'un petit mouvement dans un fluide visqueux. B. I. C. 1902. 19.

459. P. Duhem. Sur les équations du mouvement et la rélation supplémentaire au sein d'un milieu vitreux. C. R. 136. 343.

460. P. Duhem. Sur le mouvement des milieux vitreux affectés de viscosité et très peu déformés. C. R. 136. 592.

461. *Lord Rayleigh. On the vibrations of a rectangular sheet of rotating liquid. P. M. (6) 5. 297.

462. E. G. Coker and S. B. Clement. An experimental determination of the variation with temperature of the critical velocity of flow of water in pipes. T. R. S. L. 201. 45.

463. *E. C. Murphy. Effect of curvature upon the flow of water in pipes. P. A. S. C. E. 27. 862. — H. F. Mills 874. — C. H. Tutton 886. — C. W. Sherman 893. — S. G. Wisker 901.

464. *P. A. Guye et F. L. Perrot. Les lois de Tate et l'égouttement des liquides. A. S. G. (4) 14. 699.

465. A. Viterbi. Sull' equilibrio di un elissoide isotropo. R. A. L. R. 12. A. 249. 300.

466. *L. Natanson. Sur la déformation d'un disque plastico-visqueuse. B. I. C. 1902. 494.

467. D. de Francesco. Alcune formole della meccanica dei fluidi in uno spazio a 3 dimensioni di curvatura costante. A. A. N. 11 No. 9—10.

Siehe auch 185; 440; 585; 696; 697; 1011; 1328.

Tropfen.

468. *P. A. Guye et F. L. Perrot. Étude expérimentale sur la forme et sur le poids des gouttes statiques et dynamiques. A. S. G. (4) 15. 132.

Siehe auch 464.

Drehung von Flüssigkeiten.

469. J. H. Jeans. The equilibrium of rotating liquid cylinders. P. R. S. L. 70. 46.

470. H. Poincaré. Sur la stabilité de l'équilibre des figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation. T. R. S. L. 198. 333.

471. G. H. Darwin. The stability of the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid. P. R. S. L. 71. 178; T. R. S. L. 200. 251; V. A. G. 37. 202.

472. G. H. Darwin. Poincaré's pear-shaped figure of equilibrium of rotating liquid. R. B. A. 71. 550.

473. G. H. Darwin. On the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid. T. R. S. L. 198. 301.

474. J. H. Jeans. On the equilibrium of rotating liquid cylinders. T. R. S. L. 200. 67.

Siehe auch 461; 1175.

Wirbel.

475. *K. Zorawski. O zachowaniu ruchu wirowego (Über die Erhaltung der Wirbelbewegung). C. A. C. 39. 236.

476. P. Sreznewskij. Einige geometrische Sätze über die Krümmung eines Luftstroms in athmosphärischen Wirbeln. A. P. B. 16. 185.

477. *A. Viterbi. Sopra una classe di moti vorticosi permanenti. A. I. V (8) 1. 449; 2. 175.

478. L. W. Oseen. Om ett fall af hvirfvelrörelse i en vätska. B. V. A. S. 59. 289.

Siehe auch 1459; 1460.

Reibung von Flüssigkeiten.

479. *G. Ercolini. Attrito interno dei liquidi isolanti in un campo elettrico. N. C. P. (5) 5. 249.

Siehe auch 543; 886; 920; 1149.

Bewegung von Körpern in Flüssigkeiten.

480. W. Steckloff. Mémoire sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini. A. T. (2) 4. 171.

481. *P. Bassi. Sulla azioni idrodinamiche esercitate da corpi solidi oscillanti in seno ad un liquido. N. C. P. (5) 5. 109.

482. *C. Zakrzewski. Sur les oscillations d'un disque plongé dans un liquide visqueux. B. I. C. 1902. 235.

483. *K. Zarkrzewski. O oscylacgi krążka w plynie lepkim (Über die Schwingungen einer in eine viskose Flüssigkeit getauchten Scheibe). C. A. C. 42. 392.

484. Hadamard. Sur les glissements dans les fluides. C. R. 136. 299; 545.

Siehe auch 434—38; 450; 1010.

Aerodynamik.

485. J. H. Kinealy. Pneumatics. C. M. N. Y. 20. 317.

486. C. W. Oseen. Bidrag till teorien för vågrörelse i strömnar. A. U. L. 37 No. 7.

487. Marey. Le mouvement de l'air étudié par la chronophotographie. S. F. P. 1902. 10.

488. H. Fettback. Über eine Methode zur Bestimmung der Geschwindigkeit

von Gasen und Dämpfen in Rohrleitungen. Z.Z. 9. 1016.

489. *H. Lorenz.* Die stationäre Strömung von Gasen durch Rohre mit veränderlichem Querschnitt. P.Z. 4. 333.

490. *V. Blaess.* Über Ausströmversuche mit gesättigtem Wasserdampf. P. Z. 4. 82.

491. **A. Langen.* Untersuchungen über die Drucke, welche bei Explosionen von H und CO in geschlossenen Gefäßen auftreten. M.F.I. 8. 1.

492. *L. Jacob.* Mouvement d'un solide dans un milieu gazeux. C.R. 136. 1386.

493. *Jacob.* Sur la résistance des gaz parfaits au mouvement des solides. C. R. 136. 492.

494. **L. S. Blackden.* Observations and experiments relative to equilibrium in air of a body heavier then air. A. J.L. 7. 28.

495. **J. H. Hume-Rothery.* On one explanation of the soaring of birds. M. M. 32. 115.

496. *Sebert.* Sur l'aérodynamique et la théorie du champ acoustique. C.R. 137. 357.

Siehe auch 510; 1657—63; 1721; 1761; 2113.

Reibung der Gase.

Siehe 510; 897.

Äußere Ballistik.

497. *M. E. Graber.* A general theory of projectiles. M.M.F. 10. 98.

498. *L. Lecornu.* Sur le mouvement vertical d'un projectile dans un milieu résistant. S.M. 30. 202.

499. **R. Bauer.* Bestimmung der Abgangsrichtung eines Gewehrgeschosses durch Berechnung der Einfallswinkel. A.K.K. 7. 153.

500. **Krause.* Witterungsverhältnisse und Flugbahn des 8mm Geschosses. K. Z. 1902. 433.

501. *P. Appell.* Sur l'équation différentielle du mouvement d'un projectile sphérique pesant dans l'air. A.Gr. (3) 5. 177.

502. *G. Eiffel.* Expériences sur la résistance de l'air. C.R. 137. 30.

503. *L. Lecornu.* Sur le mouvement vertical d'un projectile dans un milieu résistant. S.M. 30. 302.

504. **M. P. Pavlov.* K. voprosu o dviženii tela v soprotivljajuščejsa srede (Über die Frage der Bewegung eines Körpers in einem widerstehenden Mittel). A.J.P. 1901. 433.

505. *J. Violle.* Sur le phénomène aérodynamique produit par le tir des canons grêlifuges. C.R. 137. 397.

506. **F. Neesen.* Bestimmung der Geschoßachsenrichtung am Ende der Flugbahn. V.P.G. 5. 110.

507. **F. Neesen.* Bestimmung der Geschwindigkeit und Umdrehungszahl eines Geschosses am Ende der Flugbahn. V.P.G. 4. 380.

508. *F. Kötter.* Über die Linksabweichung des Geschosses bei aufgepflanztem Seitengewehr. S.M.B. 1903. 65.

509. *Charbonnier.* Sur la théorie du champ acoustique. C.R. 137. 171.

510. *P. Charbonnier.* La théorie du champ acoustique et le frottement intérieur des gaz. C.R. 137. 378.

511. *v. Blittersdorff.* Der Arbeitsverlust beim Schuß infolge der Wärmeabgabe an die Waffe und die Ermittlung desselben. K.Z. 6. 58.

512. *Parst.* Die Tiefenausdehnung der Geschoßgarbe. K.Z. 4. 330.

513. *H. Rohne.* Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das gefechtsmäßige Abteilungsschießen der Infanterie. K.Z. 4. 119.

Siehe auch 492; 493; 496.

Innere Ballistik.

514. *—. Widerstände der Geschoßbewegung im Lauf. M.A.D.J. 1902. 295.

515. *C. Cranz* u. *K. R. Koch.* Untersuchung über die Vibration des Gewehrlaufes. A.A.M. 21. 557.

516. *E. Vallier.* Tracé des courbes de pressions. C.R. 135. 942.

517. *E. Vallier.* Sur la loi des pressions dans les bouches à feu. C.R. 135. 842.

518. **v. Zedlitz* u. *Neukirch.* Neue Formeln zur Berechnung des Gasdruckes und der Geschwindigkeiten in den Rohren der Feuerwaffen. K.Z. 4. 525.

519. *Heydenreich.* Neue Methoden zur Berechnung des Verlaufs der Gasdruckkurven in Geschützrohren. K.Z. 6. 292.

520. *W. Wolff.* Über die Verbrennungsweise des Pulvers. K.Z. 6. 1.

521. *H. Mache.* Über die Schutzwirkung eines Gitters gegen Gasexplosionen. S.A.W. 111. 1223.

Siehe auch 491.

Physiologische Mechanik.

522. *O. Fischer.* Das statische und kinetische Maß für die Wirkung eines Muskels. A.G.L. 27. 483.

523. *C. Henry*. Sur le travail statique du muscle. C.R. 136. 41.

524. * *G. Weiss*. Le travail musculaire d'après les recherches de M. Chauveau. R.G.O. 14. 147.

525. *A. Imbert* et *J. Gagnière*. Inscription de l'état variable de la tension du fil de l'ergographe; équation du mouvement et expression du travail. C.R. 137. 278.

Math. Physik, Allgemeines.

526. * *H. Poincaré*. Revue annuelle et physique. R.G.O. 14. 28; 88.

527. * *H. Poincaré*. Relation between experimental physics and mathematical physics. Mon. 12. 516.

528. * *W. A. Stekloff*. Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. A.E.N. (3) 19. 191.

Siehe auch 113; 136; 137; 176.

Prinzipien der Physik.

529. * *G. H. Knibbs*. The history of the atomistic conception and its philosophical import. R.A.A. 8. 18.

530. * *L. Silberstein*. Versuch einer Theorie der physikalischen Operatoren. A.N.L. 2. 201.

531. * *L. Silberstein*. Teorye operatorów fizycznych. Związek zjawisk w czasie (Theorie der physik. Operatoren. Zusammenhang der Erscheinungen in der Zeit). P.F.W. 5. 424.

532. *J. Perrin*. Le principe d'équivalence et la notion d'énergie. R.M.M. 11. 55.

533. * *L. Natanson*. Inertia and coercion. J.P.C. 7. 118.

534. * *E. F. Nichols* and *G. F. Hull*. The pressure due to radiation. P.R. 17. 26; A.J.C. 17. 315.

535. * *Donati*. Teorie elettriche. Teorie elettroatomistiche. A.A.E.I. 7. No. 1.

536. *M. Abraham*. Prinzipien der Dynamik des Elektrons. A.P.L. 10. 105.

537. *M. Abraham*. Dynamik des Elektrons. N.G.G. 1902. 20.

538. *M. Wildermann*. Theory of the connexion between energy of electrical waves or of light introduced into a system and chemical energy, heat energy, mechanical energy etc. of the same. P.M. (6) 5. 208.

539. *G. W. A. Kahlbaum*. Über Gewichtsänderung bei chemischen und physikalischen Untersuchungen in geschlossenem Rohr und über Herrn Heydweillers Entdeckung. V.N.B. 16. 441.

Siehe auch 4; 52; 248; 716; 969; 970; 972; 1092; 1108—10; 1332; 1335; 1336; 1777; 2055.

Differentialgleichungen der math. Physik.

540. *E. T. Whittaker*. On the partial differential equations of mathematical physics. M.A. 57. 303; R.B.A. 72. 523.

541. * *S. Zaremba*. Contribution à la théorie d'une équation de la physique. B.I.C. 1901. 477.

Absolutes Maßsystem.

542. *L. Gorczyński*. Kritische Bemerkungen zu den Dimensionssystemen der Physik. P.Z. 4. 158.

Siehe auch 1772.

Molekularphysik.

543. *G. Jäger*. Der innere Druck, die innere Reibung, die Größe der Molekeln und deren mittlere Weglänge bei Flüssigkeiten. S.A.W. 111. 697.

544. *M. Reinganum*. Über Molekularkräfte und elektrische Ladungen der Moleküle. A.P.L. 10. 334.

545. *A. Lampa*. Zur Molekulartheorie anisotroper Dielektrika. Mit einer experimentellen Bestimmung der Dielektrizitätskonstante einer gespannten Kautschukplatte senkrecht zur Spannungsrichtung. S.A.W. 111. 982.

546. * *H. V. Ridout*. The size of atomes. P.P.S.L. 18. 335.

Siehe auch 299; 409; 645; 688; 773; 880; 1777,

Kohäsion.

547. *C. Neumann*. Beiträge zur analytischen Mechanik. B.G.L. 54. 340.

548. *A. Leduc* et *P. Sacerdote*. Sur la cohésion des liquides. S.F.P. 1902. 76.

549. * *Sacerdote*. Sur la cohésion des liquides. S.F.P. 1902. 35.

550. * *G. Bakker*. Interprétation des expériences de M.M. Leduc et Sacerdote sur la cohésion des liquides. J.P. (4) 1. 716.

Siehe auch 623; 691; 988; 1025; 1538.

Elastizität.

551. *G. Combebiac*. Sur les équations générales de l'élasticité. S.M. 30. 242.

552. *V. Fischer*. Darstellung der Bewegungsgleichung für elastische Körper in Vektorform. Cr. 126. 233.

553. *E. G. Coker*. An apparatus for measuring strain and applying stress. T.R.S.E. 40. 263.

554. *Lord Kelvin*. A new specifying method for stress and strain in an elastic solid. P.R.S.E. 24. 97.

555. *O. Tedone.* Saggio di una teoria generale delle equazioni dell' equilibrio elastico per uno corpo isotropo. A.D. M. (3) 8. 129.

556. *O. Tedone.* Sulle equazioni dell' equilibrio elastico per un corpo isotropo con speciale riguardo alle forze di massa e su alcuni problemi relative alla sfera elastica. R.C.M.P. 17. 241.

557. *Lord Rayleiyh.* On the work done by forces operative on one or more points of an elastic solid. P.M. (6) 6. 385.

558. —. La ley de las deformaciones elasticas. A.S.A. 55. 41.

559. **P. Cardani.* Determinazione diretta del rapporto di Poisson nei fili metallici. N.C.P. (5) 5. 73.

560. *P. Cardani.* Direkte Bestimmung der Poissonschen Beziehung bei Drähten. P.Z. 4. 449.

561. *M. Cantone.* Sul coefficiente di Poisson per il caucciù. R.I.L. 36. 873.

562. *L. Maurer.* Über die Deformation elastisch gekrümmter Flächen. A. Gr. (3) 6. 1; 260.

563. *H. Heimann.* Die durch Eigengewicht verursachte Deformation eines längs einer Mantellinie unterstützten Kreiszylinders. Z.S. 49. 348.

564. **A. Foeppl.* Versuche über Elastizität und Festigkeit von Gußeisen. M.M.L.M. 28. 1.

565. *A. F. Jorini.* Momento medio di flessione nella trave continua. R.I.L. 35. 313.

566. *F. Villareal.* Flexion de las vigas. R.C.L. 6. 14; 99.

567. *H. Bouasse.* Sur les déformations des corps solides. A.C.P. (7) 29. 384.

568. *L. Prandtl.* Zur Torsion von prismatischen Stäben. P.Z. 4. 758.

569. **C. Bach.* Die Elastizitäts- und Festigkeitseigenschaften von Eisensorten. M.F.I. 9. 70.

570. *F. Beaulard.* Sur l'anisotropie de la soie et la valeur du coefficient de Poisson. C.R. 136. 1303.

571. *F. Beaulard.* Sur les paramètres élastiques des fils de soie. C.R. 135. 623; A.U.G. 15. 191.

572. *F. Purser.* On the application of Bessels functions to the elastic equilibrium of a homogeneous isotropic cylinder. T.R.I.A. 32. 31.

573. *L. N. G. Filon.* On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load with special reference to points of concentrated or discontinous loading. P.R.S.L. 70. 491.

574. *G. Angenheister.* Beiträge zur Kenntnis von der Elastizität der Metalle. A.P.L. 11. 188.

575. *L. N. G. Filon.* On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load. T.R. S.L. 198. 147.

576. **A. Francke.* Kreisförmige Unterlagen. Z.A.W. 48. 65.

577. **T. Boggio.* Sull' equilibrio delle membrane elastiche. A.I.V. (8) 1. 619.

578. **J. H. Michell.* The flexure of a circular plate. P.L.M.S. 34. 223.

579. **A. Francke.* Die Lage der Nulllinie der Biegungsspannungen bei Annahme der Bachschen Formel für das Verlängerungsverhältnis des Materials. B.I.Z. 2. 131.

580. **A. Francke.* Die Lage der Nulllinie der Biegungsspannungen bei Verschiedenheit des Elastizitätsmaßes des Materials für Zug- und Druckspannung. B.I.Z. 2. 51.

581. *G. Fubini.* Sopra una classe di equazioni che ammettono come caso particulare le equazioni delle membrane e delle piastre sonore. R.I.L. (2) 35. 779.

582. *D. de Francesco.* Sul moto di un filo e sull' equilibrio di una superficie fiessibile ed inestensibile. R.A.N. (3) 9. 227.

583. *J. Hadamard.* La théorie des plaques élastiques planes. T.S.M.Am. 3. 401.

584. **G. Lauricella.* Sulla deformazione di una sfera elastica isotropa per date tensioni in superficie. N.C.P. (5) 5. 5.

585. *A. Viterbi.* Sull' equilibrio di un elissoïde planetario di rivoluzione elastico istropo. R.A.L.R. 12 A. 249; 300.

586. *C. Bach.* Die Elastizität der verschiedenen Stellen einer Haut entnommenen Treibriemen. M.F.I. 5. 1.

587. *L. N. G. Filon.* On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load with special reference to points of concentratet or discontinuous loading. T.R.S.L. 201. 63.

588. **C. Schenk.* Darstellung des Einflusses der Durchbiegung eines Wagebalkens auf Empfindlichkeit und Schwingungsdauer. D.M. 11. 4.

589. *J. Morrow.* On an instrument for measuring the lateral contraction of tie-bars and on the determination of Poisson's ratio. P.M. (6) 6. 417.

590. **S. Dunkerley.* Spannungswirkungen auf die verschiedenen Teile einer Kurbelwelle an einem wirklichen Fall einer Vierkurbelschiffswelle beleuchtet. S.B. 4. 223; 275; 330; 393; 441; 495.

591. *H. Lamb.* On Boussinesq's problem. P.L.M.S. 34. 276.

592. *G. de Metz.* Rigidité des liquides. C.R. 136. 604.

Siehe auch 285; 330; 383; 443; 465; 610; 653; 654; 664; 697; 1410; 1551; 1602; 1641; 1738—71; 1881.

Thermoelastizität.

593. *A. Wassmuth.* Apparate zum Bestimmen der Temperaturänderungen beim Drehen oder Tordieren von Drähten. S.A.W. 111. 996.

594. *A. Wassmuth.* Über die bei der Biegung von Stahlstäben beobachtete Abkühlung. S.A.W. 112. 578.

595. *J. R. Benton.* Elasticity at low temperatures. M.W.R. 31. 20.

Siehe auch 654; 843; 844.

Elektroelastizität.

596. *E. Ercolini.* Influenza del campo elettrico sull' elasticità del vetro. N.C.P. (5) 4. 270.

Siehe auch 1806.

Magnetoelastizität.

597. *R. Arnoux.* Élasticité et magnétisme. J.P. (4) 2. 258; S.F.P. 1903. 20.

598. *A. Heydweiller.* Zur Theorie der magnetoelastischen Wechselbeziehungen. A.P.L. (4) 12. 602.

Siehe auch 1139; 1156; 1157.

Festigkeit.

599. *Revere.* La deformazione e la rottura dei corpi solidi. Pol.M. 1902 März.

600. *G. Kuntze.* Ein Beitrag zur Festigkeitslehre. A.P.L. 11. 1020.

601. *M. Grübler.* Zur Festigkeit spröder Körper. D.V.N. 74. 34.

602. *G. A. Hulett.* Beziehung zwischen negativem Druck und osmotischem Druck. Z.P.C. 42. 353.

603. *A. Foeppl.* Über die Abhängigkeit der Härteziffer von der Größe der Druckfläche und dem Krümmungsradius. M.M.L.M. 28. 34.

604. *W. Cassie.* On the measurement of Youngs modulus. P.P.S.L. 18. 215.

605. *M. Grübler.* Zur Festigkeit spröder Körper. P.Z. 4. 78.

606. *B. Galicin.* Über die Festigkeit des Glases. A.P.B. (5) 16. 1.

607. *H. Bouasse.* Sur le coefficient *σ* de Poisson pour le caoutchouc vulcanisé. J.P. (4) 2. 490.

608. *S. Kusakabe.* On the modulus of rigidity of rocks. R.S.T. 14. 103.

609. *W. H. Warren.* Investigation in regard to the comparative strength and elasticity of Portland cement mortar and concrete when reinforced with steel rods and when rot reinforced. J.N.S.W. 36. 290.

610. *C. Bach.* Elastizität- und Festigkeitseigenschaften von Eisensorten. M.F.I. 9. 70.

611. *K. G. Meldahl.* Widerstandsfähigkeit eines dünnen Hohlzylinders gegen äußern Druck. Z.B.G. 2. 121.

612. *H. Sellenthin.* Die Festigkeit von Lademasten. S.B. 3. 933; 981; 1029.

613. *C. Bach.* Eine Stelle an manchen Maschinenteilen, deren Beanspruchung auf Grund der üblichen Berechnung stark unterschätzt wird. M.F.I. 4. 35.

614. *H. Sellenthin.* Die Beanspruchung schnelllaufender Schubstangen. S.B. 4. 369; 429.

615. *L. Gümbel.* Über Torsionsschwingungen von Wellen. S.B. 3. 580; 628.

616. *Ascione.* Motrice a vapore monocilindrica. Resistenza alla flessione. A.A.P.M. 16.

617. *J. Bruhn.* Die Querfestigkeit von Schiffen. S.B. 3. 11; 49.

Siehe auch 127; 128; 564; 569; 1557; 1564; 1660; 1741; 1744; 1914—60.

Kristallstruktur.

618. *E. v. Fedorow.* Theorie der Kristallstruktur II. Z.K.M. 36. 209.

619. *W. Voigt.* Fragen der Kristallphysik I. N.G.G. 1903. 87.

620. *Lord Kelvin.* Molecular dynamics of a crystal. P.R.S.E. 24. 205.

621. *J. Beckenkamp.* Zwillingsbildung. Z.K.M. 36. 466.

622. *E. v. Fedorew.* Zonale Kristallographie und Theorie der Kristallstruktur. Z.K.M. 37. 22.

623. *C. Viola.* Beziehung zwischen Kohäsion, Kapillarität und Wachstum der Kristalle. Z.K.M. 36. 558.

624. *W. Schmidt.* Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Kristallen mit elektrischen Wellen. A.P.L. 9. 919; 11. 112.

625. *J. Beckenkamp.* Über den Paramagnetismus einiger hexagonaler und regulärer Kristalle. Z.K.M. 36. 102.

Siehe auch 1142; 1144; 1145.

Kristalloptik.

626. *G. Wulff.* Untersuchungen im Gebiete der optischen Eigenschaften isomorpher Kristalle. Z.K.M. 36. 1.

627. **C. Viola*. Détermination des 3 paramètres optiques principaux d'un cristal. B. S. M. F. 25. 147.

628. **P. Gaubert*. Sur les bandes biréfringentes provoquées par la pression, avec rupture des faces, sur les cristaux cubiques. B. S. M. F. 25. 154.

629. *T. Pockels*. Über die Änderung der Lichtfortpflanzung im Kalkspat durch Deformationen. A. P. L. 11. 726.

630. **F. Pearce*. Des courbes obscures. A. S. G. (4) 15. 457.

631. *W. Voigt*. Beiträge zur Aufklärung der Eigenschaften pleochroitischer Kristalle. N. G. G. 1902. 48.

632. *J. Boussinesq*. Théorie de l'absorption de la lumière par les cristaux symmétriques. C. R. 136. 193.

633. *J. Boussinesq*. Sur l'absorption de la lumière 1) par les cristaux symmétriques 2) par certains milieux dissymmétriques tels que les corps naturellement isotropes solides, ou fluides, sensibles au magnétisme et qu'on soumet à son action. C. R. 136. 272.

Siehe auch 2062—63.

Schwingungen.

634. *J. Horn*. Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen. Z. S. 48. 400.

635. *Lord Rayleigh*. On the free vibrations of systems affected with small rotatory terms. P. M. (6) 5. 293.

636. *J. W. Peck*. Note on the special epochs in vibrating systems. P. M. (6) 5. 511.

637. *C. C. Farr*. Two spherical harmonic relations. T. N. Z. I. 35. 414.

638. *G. Zambiasi*. Composizione ottica dei movimenti vibratorii di 3 o più suoni. R. A. L. R. 12. A. 48.

639. *J. Horn*. Zur Theorie der unendlich kleinen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad. Z. S. 49. 246.

640. *F. A. Schulze*. Die Schwingungsdauer und Dämpfung asymmetrischer Schwingungen. A. P. L. 9. 1111.

641. *J. Nabl*. Über die Longitudinalschwingungen von Stäben mit veränderlichem Querschnitt. S. A. W. 111. 846.

642. *O. Waldstein*. Über longitudinale Schwingungen von Stäben, welche aus parallel zur Längsachse zusammengesetzten Stücken bestehen. S. A. W. 111. 930.

643. **F. J. Rogers*. Frequencies of a horizontally suspended coiled spring. P. R. 15. 374.

644. *G. Bisconcini*. Sulle vibrazioni trasversali di una lamina che dipendono da 2 sole parametri. R. A. L. R. 12 A. 385.

645. *J. H. Jeans*. On the vibrations set up in molecules by collisions. P. M. (6) 6. 279.

646. *W. Ritz*. Zur Theorie der Serienspektren. A. P. L. (4) 12. 264.

647. *A. J. Batschinski*. Ein Versuch, die periodische Gesetzmäßigkeit der chemischen Elemente physikalisch zu erklären. Z. P. C. 42. 372.

Siehe auch 265; 320; 383; 461; 481—83; 515; 588; 615; 1047; 1154; 1158; 1180; 1181; 1280; 1293; 1668; 1716.

Wellenlehre.

648. *Rottok*. Meereswellenbeobachtungen. A. H. 31. 329.

649. *E. T. Whittaker*. On the general solution of Laplace's equation and the equation of wave motives and on an undulatory explanation of gravity. M. N. A. S. 62. 617.

650. *O. Heaviside*. The undistorted cylindrical wave. N. 68. 54.

651. *P. Duhem*. Sur les ondes au sein d'un milieu vitreux affecté de viscosité et très peu déformé. C. R. 136. 733.

652. *P. Duhem*. Des ondes du 2. ordre par rapport à la vitesse au sein des milieux vitreux doués à la viscosité et affectés de mouvement finis. C. R. 136. 1032.

653. *P. Duhem*. Sur la propagation des ondes dans un milieu parfaitement élastique affecté de déformations finies. C. R. 136. 1379.

654. *P. Duhem*. La propagation des ondes dans les milieux élastiques selon qu'ils conduisent ou ne conduisent pas la chaleur. C. R. 136. 1537.

655. *P. Duhem*. Des ondes du 1. ordre par rapport à la vitesse au sein d'un milieu vitreux doué de viscosité et affecté de mouvement finis. C. R. 136. 858.

656. *E. Kohl*. Über ein Integral der Gleichungen für die Wellenbewegung, welches dem Dopplerschen Prinzipe entspricht. A. P. L. 11. 96.

657. *J. Boussinesq*. Calcul direct et simple de la vitesse de propagation du front ou de la tête d'une onde dans un milieu ayant des équations de mouvement compliquées. C. R. 136. 427.

658. *E. Kohl*. Über das dem Dopplerschen Prinzipe entsprechende Integral der Gleichungen für die Wellenbewegung. A. P. L. 11. 515.

659. **H. Lamb*. On wave-progagation in two dimensions. P. L. M. S. 35. 141.

660. **T. J. I'A. Bromwich.* Note on the wave surface of a dynamical medium, aeolotropic in all respects. P. L. M. S. 34. 307.

661. *P. Duhem.* Sur les quasi-ondes. C. R. 135. 761.

662. *P. Duhem.* Sur les ondes-cloisons. C. R. 137. 237.

663. **H. Nagaoka.* On destructive sea waves. R. S. T. 15. 126.

664. *J. Boussinesq.* Sur l'extinction graduelle du mouvement à l'arrière d'une onde isolée dans un milieu élastique éprouvant une résistance proportionelle ou à la vitesse ou au déplacement. C. R. 136. 337.

665. *T. R. Lyle.* Preliminary account of a wave-tracer and analyser. P. M. (6) 6. 549.

Siehe auch 451; 689; 1150; 1410.

Strahlen.

666. *J. Wimshurst.* Roentgen rays. R. R. A. 6. 102.

667. *G. Holtsmark.* Eine Methode für die Intensitätsmessung von Röntgenstrahlen nebst einer Berechnung der Wellenlänge derselben. A. P. L. 10. 522.

668. *H. Haga* und *C. H. Wind.* Über die Beugung der Röntgenstrahlen. A. P. L. 10. 305.

669. **R. Blondlot.* Sur la polarisation des rayons X. J. P. (4) 2. 169.

670. **W. Lebedinski.* Wirkung der X-Strahlen auf die dynamische Leitung. E. P. 1902. 318.

671. **H. Starke.* Über die elektrische und magnetische Ablenkung schneller Kathodenstrahlen. V. P. G. 5. 241.

672. *P. Lenard.* Über die Beobachtung langsamer Kathodenstrahlen mit Hilfe der Phosphoreszenz und über Sekundärentstehung von Kathodenstrahlen. A. P. L. (4) 12. 449.

673. *A. Wehnelt.* Potentialverteilung im dunklen Kathodenraum. A. P. L. 10. 542.

674. *T. Des Coudres.* Zur elektrostatischen Ablenkung der Rutherfordstrahlen. P. Z. 4. 483.

675. *G. Sagnac.* La longueur d'onde des rayons *N* déterminéc par la diffraction. C. R. 136. 1435; S. F. P. 198; J. P. (2) 4. 553.

676. *G. Sagnac.* Bestimmung der Wellenlänge der N-Strahlen durch Beugung. P. Z. 4. 601.

677. **R. Blondlot.* Sur une nouvelle espèce de lumière. J. P. (4) 2. 339.

Siehe auch 1102; 1124; 1182; 1183; 2064; 2065.

Radioaktivität.

678. *E. Rutherford.* The radioactivity of Radium and Thorium. P. M. (6) 5. 445.

679. *E. Rutherford.* The radioactivity of Uranium. P. M. (6) 5. 441.

680. *E. Rutherford.* Radioactic change. P. M. (6) 5. 576.

681. *P. Curie.* Sur la radioactivité induite et sur l'émanation du radium. C. R. 136. 223.

682. *P. Curie* et *J. Daune.* Sur l'émanation du radium et son coefficient de diffusion dans l'air. C. R. 136. 1314.

683. *E. Rutherford.* Excited radioactivity and the method of its transmission. P. M. (6) 5. 95.

684. *P. Curie* et *J. Daune.* Sur la disparition de la radioactivité induite par le radium sur les corps solides. C. R. 136. 364.

685. **F. Cook Gates.* Effect of heat on excited radioactivity. P. R. 16. 300.

Siehe auch 428; 429; 702; 977; 996; 1103; 1183.

Kapillarität.

686. **G. Bakker.* Théorie de la capillarité IV. J. P. (4) 2. 354.

687. *L. Grunmach.* Neue, nach der Kapillarwellenmethode ausgeführte Bestimmungen der Oberflächenspannung von Flüssigkeiten. A. P. L. 9. 1261.

688. **N. E. Dorsey.* Surface tension: molecular forces. S. (2) 17. 868.

689. **L. Grunmach.* Neue experimentelle Bestimmungen der Oberflächenspannung von Flüssigkeiten durch Messung der Wellenlänge der auf ihnen erzeugten Kapillarwellen. P. Z. 4. 26; D. V. N. 74. 12.

690. **Descudé.* Tension superficielle des mélanges d'alcool éthylique et d'eau. J. P. (4) 2. 348.

691. *A. Brandt.* Über die Beziehung zwischen der Formel von J. Stefan für den Kohäsionsdruck einer Flüssigkeit und der Zustandsgleichung von van der Waals. A. P. L. 10. 783.

Siehe auch 430; 623; 710.

Viskosität.

692. *P. Duhem.* Sur les conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre d'un système visqueux. C. R. 135. 939.

693. *A. Batschinski.* Studien zur Kenntnis der Abhängigkeit der Viskosität der flüssigen Körper von der Temperatur und ihrer chemischen Konstitution. S. N. M. 1902. 265.



694. **W. Natanson.* O funkcyi dyssypacyjnej plynów lepkich (Über die Zerstreuungsfunktion einer viskosen Flüssigkeit). C. A. C. 42. 399.

695. *P. Duhem.* Sur la viscosité en un milieu vitreux. C. R. 136. 281.

696. **W. Natanson.* O odkoztalcaniu krążka plastyczno-lepkiego (Über die Deformation einer plastisch-viskosen Scheibe). C. A. C. 42. 405.

697. *L. Natanson.* Über die Deformation einer elastisch viskösen Scheibe. Z. P. C. 43. 185.

698. **O. Scorpa.* Determinazione della viscosità del fenolo allo stato liquido. N. C. P. (5) 5. 117.

Siehe auch 450; 456—58; 460; 466; 482; 483; 655.

Absorption.

Siehe 428; 429; 651; 652.

Diffusion.

699. **M. Thiesen.* Zur Theorie der Diffusion. V. P. G. 4. 348.

700. **J. Thovert.* Recherches sur la diffusion. J. P. (4) 1. 771.

701. *H. W. Morse* and *G. W. Pierce.* Diffusion and supersaturation in gelatine. P. A. Bo. 38. 625.

702. *F. Wallstabe.* Über die Diffusion von Radiumemanation in Flüssigkeiten. P. Z. 4. 721.

703. *C. Barus.* The diffusion of vapour into nucleated air. A. J. S. (4) 15. 472.

704. **E. Solvay.* Über eine bei Diffusionserscheinungen anwendbare Schwerkraftsformel oder Diffusion, Gravitolyse und Kinetolyse. Z. E. 9. 723.

705. *G. Galeotti.* Sulla diffusione degli elettroliti nei colloidi. R. A. L. R. 12. B. 112.

Siehe auch 682; 1046.

Osmose.

706. **A. Smits.* Sur la pression osmotique. R. T. C. P. B. 22. 153.

707. *M. Planck.* Über den osmotischen Druck einer Lösung von merklich variabler Dichte. Z. P. C. 42. 584.

708. **P. Fireman.* Deduction of the magnitude of the osmotic pressure in dilute solutions according with the kinetic theory. J. P. C. 6. 636.

709. **T. Godlewski.* O ciśnieniu osmotycznem niektórych roztworów obliczonem na podstawie sil elektromotorycznych ogniw koncentracyjnych (ber den osmotischen Druck einiger Lösungen, berechnet nach den elektromotorischen Kräften der Konzentrationssäulen). C. A. C. 42. 99.

710. *F. Kaufler.* Über die Verschiebung des osmotischen Gleichgewichts durch Oberflächenkräfte. Z. P. C. 43. 686; S. A. W. 111. 935.

Siehe auch 602; 922.

Elektrokapillarität.

711. *Gouy.* Sur la fonction électrocapillaire. A. C. P. (7) 29. 145.

712. **R. Wegscheider.* Zur Theorie der kapillarelektrischen Erscheinungen. A. A. W. 1903. 219.

713. *J. J. van Laar.* Sur l'asymmetrie de la courbe électrocapillaire. A. N. (2) 7. 443.

Siehe auch 1614.

Akustik.

714. **J. Loudon.* A century of progress in acoustics. P. T. R. S. C. (2) 7. 43.

715. *Lord Rayleigh.* On the production and distribution of sound. P. M. (6) 6. 289.

716. *W. Altberg.* Über die Druckkräfte der Schallwellen und die absolute Messung der Schallintensität. A. P. L. 11. 405.

717. *A. W. Witkowski.* O prędkości glosu v powietrzu zgęszczonem (Über die Geschwindigkeit des Schalls in der komprimierten Luft). C. A. C. 39. 1.

718. *J. Müller.* Über Schallgeschwindigkeit in Röhren. A. P. L. 11. 331.

719. *H. Pflaum.* Über eine elektrische Orgelpfeife. C. R. R. 46. 37.

720. *F. Lindig.* Über die verstimmte Oktave bei Stimmgabeln und über Asymmetrietöne. A. P. L. 11. 31.

721. **L. Jacobson* und *W. Cowl.* Über die Darstellung und Messung der Schwingungsamplituden ausklingender Stimmgabeln mit Hilfe der Linearkinematographie. A. F. G. P. 1903. 1.

722. **W. S. Franklin.* Derivation of equation of decaying sound in a room and definition of open window equivalent of absorbing power. P. R. 16. 372.

723. **E. C. Woodruff.* A study of the effects of temperature upon a tuning fork. P. R. 16. 325.

724. **C. V. Boys.* The passage of sound through the athmosphere. Q. J. M. S. 29. 145.

Siehe auch 383; 496; 509; 510; 581; 638; 905; 906; 1082.

Mathematische Musik.

725. *P. Tannery.* Du rôle de la musique grecque dans le développement de la mathématique pure. B. M. (3) 3. 161.

726. *G. Zambiasi.* Le figure di Lissajous nell' estetica dei suoni. N. L. A. 56. 111.

Katoptrik.

727. *W. Voigt.* Über die absolute Verzögerung der Lichtschwingungen durch Reflexion. N. G. G. 1902. 259.

728. *W. Voigt.* Zur Theorie der totalen Reflexion. N. G. G. 1903. 121.

729. *F. Thaler.* Die diffuse Reflexion des Lichtes an matten Oberflächen. A. P. L. 11. 996.

730. *W. H. Roever.* Brilliant points and loci of brilliant points. A. of M. 3. 113.

731. *O. Gutsche.* Über den Zusammenhang einer bei der Lösung von Alhazens Aufgabe auftretenden gleichseitigen Hyperbel mit der neueren Dreiecksgeometrie. A. Gr. (3) 5. 84.

732. *C. Rivière.* Reflexion et réfraction d'un pinceau lumineux par une surface sphérique. R. M. S. 12. 473.

733. **H. C. Plummer.* On the images formed by a parabolic mirror. III. M. N. A. S. 63. 16.

Siehe auch 2056.

Dioptrik.

734. **C. Juel.* Sur les caustiques planes. B. A. Co. 1902. Nr. 5. 179.

735. *R. F. Muirhead.* The axial dioptric system. P. M. (6) 6. 326.

736. *R. Straubel.* Über einen Satz der geometrischen Optik und einige Anwendungen. P. Z. 4. 114.

737. *A. Gleichen.* Über einen allgemeinen Satz der geometrischen Optik. P. Z. 4. 226.

738. *G. W. Walker.* On the theory of refraction in gases. P. R. S. L. 72. 24.

739. **P. Frenchen.* Die Brechung des Lichts durch ein Prisma. Z. P. 15. 344.

740. *E. Gatti.* Proprietà relativa ad una speciale forma di prisma rifrangente. A. A. T. 38. 301.

741. *R. Charters.* On „minimum deviation through a prism". P. M. (6) 6. 529.

742. *A. Whitwell.* On refraction at a cylindrical surface. P. M. (6). 46.

743. *N. Jadanza.* Alcuni sistemi diottrici speziali ed una nuova forma di teleobbiettivo. R. T. C. 15. 170.

744. *C. Jorio.* Determinazione diretta di un sistema diottrico composto. R. T. C. 15. 113.

Siehe auch 732; 1603; 1604; 1621; 1622; 1624; 1625.

Linsen.

745. **S. Bloch.* Théorie des lentilles épaisses. R. M. S. 12. 521.

746. **A. Schell.* Die Bestimmung der optischen Konstanten eines zentrierten sphärischen Systems mit dem Präzisionsfokometer. A. A. W. 1903. 105.

747. **A. Gleichen.* Die Blendenstellung bei zentrierten optischen Systemen endlicher Öffnung. V. P. G. 5. 193.

748. *T. H. Blakesley.* Single-piece lenses. P. M. (6) 6. 521.

749. *—. Brennweitenbestimmung bei photographischen Systemen. D. M. 10. 277.

750. **A. Kerber.* Beitrag zur Theorie der Astigmatlinsen. D. M. 10. 241; 258; 269; 278.

Siehe auch 1606.

Physikalische Optik.

751. *R. T. Glazebrook.* Theoretical optics since 1840. A survey. P. M. (6) 5. 537.

752. **A. Fisch.* Die Druckkräfte des Lichts. M. P. G. Z. 1903. 11.

753. **H. Pellat.* Démonstration de la loi de Maxwell-Bartoli. J. P. (4) 2. 484.

754. **J. Boussinesq.* Extension du principe de Fermat sur l'économie du temps au mouvement relatif de la lumière dans un corps transparent hétérogène animé d'une translation rapide. J. P. (4) 2. 5.

755. **J. Boussinesq.* Démonstration générale de la construction des rayons lumineux par les surfaces d'onde courbes J. P. (4) 2. 10.

756. **G. Sagnac.* Propagation de la phase des vibrations au voisinage d'un foyer. S. F. P. 1902. 12.

757. *C. Puschl.* Über Fortpflanzung des Lichtes durch Körpersubstanz. S. A. W. 111. 1151.

758. *F. Lindemann.* Zur Theorie der Spektrallinien II. S. A. M. 1903. 27.

759. *J. Boussinesq.* Théorie générale de la translucidité. C. R. 136. 581.

760. *W. Wundt.* Die geometrisch-optischen Täuschungen. A. G. L. 24. 55.

Siehe auch 188; 431; 638; 727; 2057.

Lichtwellen.

761. *G. J. Stoney.* How to apply the resolution of light into uniform



undulations of flat wavelets to the investigation of optical phenomena. P.M. (6) 5. 264.

762. **A. Cotton*. Sur les ondes lumineuses stationaires. J. P. (4) 1. 689; S. F. P. 1902. 30; 116.

763. **A. Lanner*. Die Entstehung optischer Bilder vom Standpunkte der Wellenlehre. Z. P. 16. 79.

764. **F. Jenista*. Über die Fortschritte in der Bestimmung der Wellenlängen des Lichts insbesondere in den 10 letzten Jahren (tschech.). B. A. P. 6. 95.

765. *M. Planck*. Über die optischen Eigenschaften der Metalle für lange Wellen. S. M. B. 1903. 278.

Siehe auch 538.

Dispersion.

766. *E. Ferron*. Mémoire établissant par voie analytique la formule empirique de la dispersion du physicien Ketteler. A. S. B. 27. A. 65.

767. *R. W. Wood*. The anomalous dispersion, absorption and surface-colour of Nitroso-dimethyl-aniline with a Note on the dispersion of Toluine. P. M. (6) 6. 96.

768. *W. B. Cartmel*. The anomalous dispersion and selective absorption of Fuchsin. P. M. (6) 6. 213.

769. *E. Flatow*. Über die Dispersion der sichtbaren und ultravioletten Strahlen in Wasser- und Schwefelkohlenstoff bei verschiedenen Temperaturen. A. P. L. (4) 12. 85.

770. *R. S. Minor*. Dispersion einiger Metalle, besonders für ultraviolette Strahlung. A. P. L. 10. 581.

Siehe auch 1322—25; 1327.

Spektrum.

771. *Lord Rayleigh*. On the spectrum of an irregular disturbance. P. M. (6) 5. 238. — *A. Schuster* 344.

772. *W. Ritz*. Zur Theorie der Serienspektren. P. Z. 4. 406.

773. *W. M. Watts*. On the existence of a relationship between the spectra of some elements and the squares of their atomic weights. P. M. (6) 5. 203.

Siehe auch 646; 758; 826; 1608.

Ultraviolette Strahlen.

774. *F. A. Müller*. Quantitative Untersuchungen über Absorption im Ultraviolett. V. E. S. 34. 188.

775. *R. Magini*. Über den Gebrauch des Beugungsgitters beim Studium des ultravioletten Spektrums. P. Z. 4. 613.

776. *E. Ladenburg*. Untersuchungen über die entladende Wirkung des ultravioletten Lichtes auf negativ geladene Metallplatten im Vakuum. A. P. L. (4) 12. 558.

777. **R. Swyngedauw*. Influence de la vitesse de charge d'un excitateur sur l'allongement de sa distance explosive par les rayons ultra-violets. J. P. (4) 2. 108.

Siehe auch 769; 770; 789; 1106.

Absorption des Lichtes.

778. **J. A. Le Bel*. Sur le pouvoir absorbant. S. F. P. 193. 4.

779. *J. Stscheglayew*. Über die Absorption des Lichtes in den mit Metalldampf gefärbten Flammen. A. P. L. (4) 2. 579.

780. *R. Straubel*. Zusammenhang zwischen Absorption und Auflösungsvermögen. P. Z. 4. 74.

781. *F. L. O. Wadsworth*. On the effect of absorption on the resolving power of prism trains and on methods of mechanically compensating this effect. P. M. (6) 5. 355.

782. *J. Boussinesq*. Sur l'absorption de la lumière 1) par un corps naturellement hétérotrope auquel un champ magnétique assez intense imprime un fort pouvoir rotatoire 2) par un corps isotrope qu'un tel champ rend à la fois biréfringent et dissymmétrique. C. R. 136. 530.

Siehe auch 632; 633; 774; 792; 820; 1320.

Phosphoreszenz.

783. *F. Buchner*. Neue Methode zur quantitativen Bestimmung der Abklingungsintensitäten phosphoreszierender Körper. V. E. S. 34. 1.

Siehe auch 672.

Interferenz.

784. *K. Kraft*. Badania dóswidczalne nad skalą barw interferencyjnych (Experimentelle Studien über die Skala der Interferenzfarben). C. A. C. 42. 272.

785. *O. Lummer* u. *E. Gehrcke*. Über die Anwendung der Interferenzen an planparallelen Platten zur Analyse feinster Spektrallinien. A. P. L. 10. 457.

786. *J. Wallot*. Die Verwendung des Keilkompensators von Arago zur Messung der Brechungsexponenten von Flüssigkeiten. A. P. L. 11. 355.

Siehe auch 2066.

Diffraktion.

787. *H. S. Carlslaw*. The use of contour integration in the problem of diffraction by a wedge of any angle. P. M. (6) 5. 374.

788. *A. L. Kimball*. Note on the application of Cornu's spiral to the diffraction-grating. A geometrical method of obtaining the intensity formulae for a flat diffraction-grating. P.M. (6) 6. 30.

789. *R. Magini*. Sull' uso del reticolo di diffrazione nello studio dello spettro ultravioletto. R.A.L.R. 11B. 305.

Siehe auch 668; 675; 676; 775.

Polarisation des Lichts.

790. *J. Walker*. The differential equations of Fresnels polarisations-vector, with an extension to the case of active media. P.R.S.L. 70. 37.

791. *A. W. Ewell*. Rotatory polarization mechanically produced. A.J.S. (4) 15. 363.

792. *F. Ehrenhaft*. Das optische Verhalten der Metallkolloide und deren Teilchengröße. A.P.L. 11. 489.

Siehe auch 669; 1501; 1595.

Lichtbrechung.

793. *G. W. Walker*. On the dependence of the refractive index of gases on temperature. T.R.S.L. 201. 435.

794. *J. Wallot*. Über die von Beer und Landolt gewählte Form des spezifischen Brechungsvermögens. A.P.L. 11. 605.

795. *J. Wallot*. Die Abhängigkeit der Brechungsexponenten der Salzlösungen von der Konzentration. A.P.L. 11. 593.

Siehe auch 739; 740; 786; 821; 1325—27.

Doppelbrechung.

796. *L. N. G. Filon*. On the variation with the wave-length of the double refraction in strained glass. P.C.P.S. 12. 55.

797. *W. König*. Doppelbrechung in Glasplatten bei statischer Biegung. A. P.L. 11. 842.

798. **C. Viola*. Die Minimalablenkungen des Lichtes durch doppeltbrechende Prismen und die Totalreflexion der optisch zweiachsigen Kristalle. Z. K.M. 37. 358.

Siehe auch 628; 817.

Elektrooptik.

799. **H. T. Simon*. Über einige Beziehungen zwischen Licht und Elektrizität. J.P.V.F. 1900. 100.

800. *H. Rubens*. Die optischen und elektrischen Eigenschaften der Metalle. P.Z. 4. 727.

801. *R. Gans*. Über die Nobilischen Farbenringe. Z.S. 49. 298.

802. **R. W. Wood*. On the electrical resonance of metal particles for light-waves. P.P.S.L. 18. 276.

803. *E. v. Schweidler*. Untersuchungen über den photoelektrischen Strom in Kaliumzellen. P.Z. 4. 136.

804. *A. Artoni*. Sulla produzione dei raggi di forza elettrica a polarizzazione circolare od ellittica. R.A.L.R. 12A. 197.

805. **G. Moreau*. Etude des ions d'une flamme salée — Effet Hall. J.P. (4) 2. 558.

Siehe auch 1905—09.

Magnetooptik.

806. *A. V. Baecklund*. Über die magnetooptischen Erscheinungen. A.M.A. F. 1. 1.

807. *A. Korn* u. *H. Stoeckl*. Studien zur Theorie der Lichterscheinungen. A. P.L. (4) 12. 875.

808. **D. Goldhammer*. Die modernen Ansichten über die Magnetisierung des Lichtes (russ.) J.R.P.C.G. 34. 255.

809. *Q. Majorana*. New magneto-optic phenomena exhibited by magnetic solutions P.M. (6) 5. 486.

810. *H. A. Lorentz*. La théorie élémentaire du phénomène de Zeeman. A.N. (2) 7. 299.

811. *A. Righi*. Sul fenomeno di Zeeman nel caso generale d'un raggio luminoso comunque inclinato sulla direzione della forza magnetica. M.I.B. 8. 263.

812. **G. Scalfaro*. La velocità della luce nei cristalli magnetici. N.C.P. (5) 5. 31.

813. *P. Zeemann*. Observations sur la rotation magnétique du plan de polarisation dans une bande d'absorption. A. N. (2) 7. 465.

814. **L. H. Siertsema*. The calculation of e/m from the magnetic rotation of the plane of polarisation for substances without an absorption band in the visible spectrum. C.P.L. 82.

815. **J. Stark*. Über eine eigenartige Erscheinung am Quecksilberlichtbogen im Magnetfeld. V.D.P.G. 5. 87.

816. *C. Runge* and *F. Paschen*. On the separation of corresponding series lines in the magnetic field. A.J.C. 16. 123.

817. *A. Schmauss*. Über die von Herrn Majorana gefundene Doppelbrechung im magnetischen Felde. A.P.L. (4) 12. 186.

Siehe auch 633; 782.

Elektromagnetische Lichttheorie.

818. *E. Cohn.* Metalloptik und Maxwellsche Theorie. S.A.B. 1903. 538; 558.

819. *F. Hasenöhrl.* Über die Grundgleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie für bewegte Körper. S.A.W. 111. 1525.; A.A.W. 1902. 312.

820. *M. Planck.* Zur elektromagnetischen Theorie der selektiven Absorption in isotropen Nichtleitern. S.A.B. 1903. 480.

821. *Lord Kelvin.* On electro-ethereal theory of the velocity of light in gases, liquids and solids. P.M. (6) 6. 437.

822. *G. W. Walker.* On the theory of refraction in gases. P.M. (6) 6. 464.

823. *A. H. Bucherer.* Einfluß der Erdbewegung auf die Intensität des Lichtes. A.P.L. 11. 270.

824. *P. Nordmeyer.* Über den Einfluß der Erdbewegung auf die Verteilung der Intensität der Licht- und Wärmestrahlung. A.P.L. 11. 284.

825. *G. T. Walker.* Die optischen Eigenschaften dünner Metallplatten. A.P.L. 10. 189.

826. *G. W. Walker.* On unsymetrically broadening of spectral lines. P.M. (6) 6. 536.

827. *A. Korn* u. *K. Stoeckl.* Studien zur Theorie der Lichterscheinungen. A.P.L. 9. 1138.

Siehe auch 776; 1162; 1163.

Photometrie.

828. **F. Scott.* Introduction to photometry and illumination. T.A.I.E.E. 19. 1461.

829. **K. J. V. Steenstrup.* De la détermination de l'intensité et de la quantité de la lumière. M.G.K. 25.

830. **E. Oddone.* Sul coeffiziente medio di trasparenza dell' aria per grandi visuali terrestri. N.C.P. (5) 2. 264.

831. *W. de Sitter.* Über die Intensitäts-Kurve bei Beobachtungen mit dem Zöllnerschen Photometer. A.N.K. 163. 65.

832. **A. Bemporad.* Sulle teorie d'estinzione di Bouguer. M.S.S.I. 30. 217.

833. **A. Bemporad.* Sopra un nuovo sviluppo dell' integrale dell' estinzione atmosferica. M.S.S.I. 31. 131.

834. **L. P. Tuckermann.* Notes on spectro-photometric adjustements. A.J.C. 16. 145.

835. *P. Vaillant.* Étude spectrophotométrique de quelques électrolytes en solution. A.C.P (7) 28. 213.

836. *C. Camichel.* Sur la spectrophotométrie photographique. C.R. 137. 184.

Siehe auch 736; 2068.

Physiologische Optik.

837. *Stuyvaert.* La courbe horoptère. M. (3) 3. 153.

838. *G. Hillebrand.* Theorie der scheinbaren Größe beim binokularen Sehen. D.A.W. 72. 255.

839. **R. van Coillie.* Illusions optiques. R.S. 18. 76.

Siehe auch 760; 1352; 1353.

Wärmelehre.

840. *F. Richarz.* Über Brechung der Wärmestromlinien und ihre Demonstration. S.G.M. 1902. 57.

841. *C. Somigliana.* Intorno ad un problema di distribuzione tecnica. A.I.L. 26. 857.

842. *R. Ferrini.* Sulla misura calorimetrica delle temperature elevate. R.I.L. 35. 703.

843. **A. Wassmuth.* Über die bei der Biegung von Stahlstäben beobachtete Abkühlung. A.A.W. 1903. 167.

844. *A. Wassmuth.* Apparate zum Bestimmen der Temperaturänderungen bei Dehnen oder Tordieren von Drähten. A.P.L. 11. 146.

Siehe auch 539; 683; 722; 769; 793; 1411; 1611: 1612.

Thermodynamik.

845. **N. Sieler.* Die Grundgesetze der Thermodynamik. J.R.P.C.G. 34. 377.

846. **R. H. Thurston.* Graphics of thermodynamics. S. (2) 18. 247.

847. **S. A. Moss.* Generalisation of Carnot's cycle. P.R. 16. 28.

848. *K. v. Wesendonck.* Über die Ungleichung von Clausius und die sogenannten dauernden Änderungen. A.P.L. 9. 1138.

849. *A. Einstein.* Eine Theorie der Grundlagen der Thermodynamik. A.P.L. 11. 170.

850. *E. Ariès.* Lois du déplacement de l'équilibre thermodynamique. C.R. 136. 1242.

851. **A. Brandt.* Ableitung der Gleichungen der Thermodynamik aus einer Betrachtung der umkehrbaren und nichtumkehrbaren Prozesse. J.R.P.C.G. 35. 293.

852. *P. Duhem.* Die dauernden Änderungen und die Thermodynamik IX. Z.P.C. 43. 695.

853. *G. Mie.* Zur kinetischen Theorie der einatomigen Körper. A.P.L. 11. 657.

854. **C. Raveau.* Sur la théorie d'une des méthodes de mesure de l'équivalent mécanique de la chaleur. J.P. (4) 2. 253.

855. *K. Hällstén.* Eine Bemerkung zu der Clapeyron-Clausiusschen Gleichung für die latente Wärme. Z.P.C. 42. 369.

856. *Ariès.* Sur la diminution du potentiel pour tout changement spontané dans un milieu de température et de pression constantes. C.R. 137. 47.

857. *K. v. Wesendonk.* Über einige Beziehungen des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik zur Leistung mechanischer Arbeit. P.Z. 4. 329. — *H. Friedenthal* 425.

858. *Scheye.* Über die Ableitung des Intensitätsgesetzes der Energetik aus dem 2. Hauptsatze der Thermodynamik. Z.P.C. 44. 495.

859. *H. Fliegner.* Über den Clausiusschen Entropiesatz. V.N.Z. 48. 1.

860. *P. Rossi.* Del secondo prinzipio della termodinamica e del concetto dell' entropia. R.F.M. 4 B 225.

861. *A. Denizot.* Mathematische Deutung des 2. Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie (poln). W.M. 6. 56.

862. *E. F. J. Love.* On entropy meters. P.R.S.V. (2) 10. 91.

863. *P. V. Bevan.* On the Joule-Thomson effect. P.C.P.S. 12. 127.

864. *K. v. Wesendonk.* Zur Lehre von der Zerstreuung der Energie. P.Z. 4. 589.

865. *E. Grimsehl.* Ableitung des Jouleschen Gesetzes. Z.P. 15. 347.

866. *G. Lindner.* Die Abhängigkeit der spezifischen Wärme fester Körper von der Temperatur. V.E.S. 34. 217.

867. *C. Dieterici.* Die spezifischen Wärmen der Kohlensäure und des Isopentans. A.P.L. (4) 12. 154.

868. *Gray.* The variable and absolute specific heat of water. M.P.I.C.E. 1. 347.

869. *W. Makower.* On a determination of the ratio of the specific heats at constant pressure and at constant volume for air and steam. P.M. (6) 5. 226.

870. **K. v. Wesendonk.* Einige Bemerkungen über die Bestimmung der kritischen Temperatur. V.P.G. 5. 238.

871. **Traube* und *G. Teichner.* Zur Theorie des kritischen Zustandes. V.P.G. 5. 235.

872. *A. Schükarew.* Untersuchungen über den Zustand gasförmigflüssig. Z.P.C. 44. 548.

873. *M. Wilderman.* On the connexion between freezing points, boiling points and solubilities. P.M. (6) 5. 405.

874. *M. Wildermann.* Über den Zusammenhang zwischen Gefrierpunkten, Siedepunkten und Löslichkeit. Z.P.C. 42. 481.

875. **W. Korbatow.* Über die Troutonsche Regel und andere bei den Siedetemperaturen zu beobachtende Konstanten. J.R.P.C.G. 35. 319.

876. *de Forcrand.* Sur une relation simple entre la chaleur moléculaire de solidification et la température d'ébullition. A.C.P. (7) 28. 384; 531; 29. 5.

877. *G. Bakker.* Die innere Verdampfungswärme einer Flüssigkeit. A.P.L. 9. 1128.

878. *G. Preuner.* Die Isotherme der Schwefeldissoziation bei 448°. Z.P.C. 44. 733.

879. *T. W. Richards.* Die Bedeutung der Änderung des Atomvolums III. Z.P.C. 42. 129.

880. *L. Natanson.* Über einige von Herrn B. Weinstein zu meiner Theorie der inneren Reibung gemachten Bemerkungen. P.Z. 4. 541.

881. *H. L. Callendar.* On the thermodynamical correction of the gasthermometer. P.M. (6) 5. 48.

882. *H. Pellat.* De la température absolue déduite du thermomètre normal. C.R. 136. 809.

883. *J. A. Groshans.* Absoluter Nullpunkt des hundertteiligen Thermometers. Z.P.C. 42. 626.

884. **J. R. Benton.* Thermodynamic formulae for isotropic solids subject to tension in one direction. P.R. 16. 11.

885. *J. Rose-Innes.* On the practical attainement of the thermodynamic scale of temperature II. P.M. (6) 6. 353.

886. **P. Koturnicki.* Berechnung der Arbeit bei den Jouleschen Versuchen über Reibung von Flüssigkeiten. J.R.P.C.G. 34. 497.

887. *U. Ancona.* Sui vapori d'acqua surriscaldati. R.I.L. 35. 971.

888. *W. Kurbatoff.* Über die Verdampfungswärme des Quecksilbers. Z.P.C. 43. 104.

889. *J. Perry.* Expansion curve. N. 68. 348. — *A. Lodge.* 599.

890. **S. A. Moss.* General law for vapor pressures. P.R. 16. 356.

891. *L. Graetz.* Über die Spannungskurve gesättigter Dämpfe. Z.S. 49. 289.

892. **G. A. Zanon.* Di una nuova formola per determinare la superficie raffreddante nella condensazione del vapore a secco. A.I.V. (8) 2. 183.

893. **A. Machado.* L'expansion et la compression adiabatique des vapeurs saturées. J.M.P.N. (2) 6. No. 4.

894. *J. Perry.* Flow of steam from nozzles. N. 68. 624.

895. *A. J. Batschinski.* Über die Beziehung zwischen der Verdampfungswärme und den kritischen Größen. Z. P.C. 42. 369.

896. *P. Ritter.* Über die Gleichung der Sättigungskurve und die durch dieselbe bestimmte maximale Arbeit. S.A. W. 111. 1046.

897. *F. Richarz.* Temperaturdifferenzen in künstlich erzeugten auf- und absteigenden Luftströmen nach Messungen von Herrn S. Löwenherz. A.P.L. 10. 863.

898. *V. G. Opredelenie* točki plavlenija veščestva po obrazcu, soderžaščemu primesi (Bestimmung des Schmelzpunkts eines in einer Lösung enthaltenen Stoffes). M.P.O. 23. 228.

899. *W. A. Roth.* Gefrierpunktserniedrigungen durch Nichtelektrolyte in konzentrierten wässrigen Lösungen. Z. P.C. 43. 538.

900. *A. A. Noyes* und *G. V. Sammet.* Experimentelle Prüfung der thermodynamischen Beziehung zwischen der Lösungswärme und der Änderung der Löslichkeit mit der Temperatur im Falle dissoziierter Substanzen. Z.P.C. 43. 513.

901. *J. J. van Laar.* L'allure des courbes de fusion d'alliages solides et d'amalgames. A.N. (2) 8. 264.

902. *J. H. van't Hoff, E. F. Armstrong, W. Hinrichsen, F. Weigert* und *G. Just.* Gips und Anhydrit. Z.P.C. 45. 251.

903. *G. Owen.* On the condensation nuclei produced in Air and Hydrogen by heating a platinum wire. P.M. (6) 6. 306.

904. *O. Hahn.* Beiträge zur Thermodynamik des Wassergases. Das Gleichgewicht $CO_2 + H_2 = CO + H_2O$. Z.P. C. 42. 513.

905. *A. Kalähne.* Schallgeschwindigkeit und Verhältnis der spezifischen Wärme der Luft bei hoher Temperatur. A.P.L. 11. 225.

906. *A. Petot.* Sur la théorie du champ acoustique. C.R. 137. 178.

907. *H. Mache.* Zur Physik der Flamme. A.P.L. 10. 408.

908. **S. A. Reeve.* Thermodynamics of heat-engines. S. (2) 17. 470.

909. *E. Buckingham.* On a modification of the Plug experiment. P.M. (6) 6. 518.

Siehe auch 462; 511; 602; 654; 692; 965; 1451; 1508; 1510; 1511; 1577; 1609; 2124; 2126—38; 2151—63.

Lösungen.

910. *M. Cantor.* Über die Grundlage der Lösungstheorie. A.P.L. 10. 205.

911. *J. D. von der Waals.* Eenige opmerkingen over den gang der moleculaire transformatie. C.A.A. 11. 391.

912. **A. S.* Die Löslichkeitskurve in der kritischen Gegend. Z.E. 9. 663.

913. *W. Meyerhoffer.* Über den Entdecker der „Knicke" in den Löslichkeitskurven. Z.P.C. 42. 501.

914. *J. J. von Laar.* Quelques remarques sur la théorie des solutions non diluées. A.M.T. (2) 8. 299.

915. *A. Thiel.* Die Löslichkeit homogener Mischungen und die gemischten Depolarisatoren. Z.P.C. 43. 641.

916. *J. D. von der Waals.* Kritische verschijnselen bij gedeeltelijk mengbare vloeistoffen. C.A.A. 11. 396.

917. *E. Wickersheimer.* Nouvelles lois de tonométrie qu'on peut déduire des expériences de Raoult. C.R. 137. 319.

918. * *W. F. Magie.* The specific heat of solutions IV. P.R. 17. 105.

919. *F. Richarz.* Neue theoretische Begründung für die Anwendung der Gasgesetze auf den Zustand eines Salzes in verdünnter Lösung. S.G.M. 1902. 68.

920. *H. Rudorf.* Zur Kenntnis der Leitfähigkeiten und innern Reibungen von Lösungen. Z.P.C. 42. 257.

921. **D. Mac Intosh.* Potential differences with saturated solutions. J.P. C. 7. 348.

922. **J. I. Michailenko.* Über die Änderung der Konzentration der Lösungen durch den Einfluß der Schwere. Genaue Formel zur Berechnung des osmotischen Drucks, wenn die Dampfspannung der Lösung gegeben ist (russ). B.U.K. 1902. No. 8b.

923. *S. Arrhenius* und *T. Madsen.* Anwendung der physikalischen Chemie auf das Studium der Toxine und Antotoxine. Z.P.C. 44. 7.

924. *P. v. Schröder.* Über Erstarrungs- und Quellerscheinungen von Gelatine. Z.P.C. 45. 75.

Siehe auch 707—09; 795; 900; 938.

Zustandsgleichungen.

925. *C. Dieterici.* Zur Theorie der Zustandsgleichung. A.P.L. (4) 12. 144.

926. **J. E. Verschaffelt.* Contributions to the knowledge of von der Waals' ψ-surface. C.P.L. 81.

927. *J. E. Verschaffelt.* Bijdrage tot de kennis van het ψ-vlak van van der Waals. C.A.A. 11. 255; 328.

928. *J. Korteweg.* Sur les points de plissement et les plis correspondants dans le voisinage des bords de la surface ψ de van der Waals. A.N. (2) 8. 235.

929. **J. Traube.* Die physikalischen Eigenschaften der Elemente vom Standpunkt der Zustandsgleichung von van der Waals. Z.A.C. 34. 413.

930. **P. Ehrenfest.* Zur Berechnung der Volumenkorrektion in der Zustandsgleichung von van der Waals. A.A.W. 1903. 225.

931. **H. H. F. Hyndman.* Some observations on equations of state. R. B.A. 72. 535.

932. **P. Koturnicki.* Ableitung der charakteristischen Gleichung aus den Koeffizienten der kritischen Ausdehnung und Kompression der Körper. J.R.P.C. G. 34. 41.

933. *H. Moulin.* Sur une forme de la relation φ (p, v, t) = O relative aux fluides. C.R. 136. 881.

934. **S. Lussana.* Proprietà termiche dei solidi e dei liquidi. N.C.P. (5) 4. 271; 5. 153.

935. *J. D. van der Waals.* Phénomènes critiques de liquides partiellement miscibles. A.N. (2) 8. 109.

936. *J. D. van der Waals jr.* Sur la manière dont la grandeur *b* de l'équation d'état dépend de la densité. A.N. (2) 8. 285.

937. **D. Berthelot.* Sur la notion des états correspondants et sur divers points correspondants remarquables. J. P. (4) 2. 186; S.F.P. 1903. 36.

938. *D. Korowalow.* Das kritische Gebiet der Lösungen und die Erscheinungen der Opaleszenz. A.P.L. 10. 360.

939. *P. Saurel.* On the critical state of a binary system. J.P.C. 6. 629.

940. *J. D. van der Waals.* Systèmes ternaires. A.N. (2) 7. 343.

941. *F. A. H. Schreinemakers.* Einige Bemerkungen über Dampfdrucke ternärer Gemische. Z P.C. 43. 671.

942. *J. D. van der Waals.* Quelques remarques sur l'allure de la transformation moléculaire. A.N. (2) 8. 104.

Siehe auch 691; 692; 2146.

Gastheorie.

943. *J. H. Jeans.* The kinetic theory of gases developed from a new standpoint. P.M. (6) 5. 597.

944. *S. H. Burbury.* Mr. J. H. Jeans theory of gases. P.M. (6) 6. 529.

945. **A. Liénard.* Note sur la théorie cinétique des gaz. J.P. (4) 2. 677.

946. **G. Jaeger.* Zwei Wege zum Maxwellschen Verteilungsgesetze der Geschwindigkeiten der Gasmolekeln. A.A.W. 1903. 76; S.A.W. 112. 309.

947. **T. Schwedoff.* Eine einfache Ableitung für die Grundgleichung der kinetischen Gastheorie. Z.P. 16. 204.

948. *P. Fireman.* The expansion of a gas into a vacuum and the kinetic theory of gases. S. (2) 16. 705.

949. *G. Jäger.* Das Maxwellsche Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Moleküle in Gasen und Flüssigkeiten. A.P.L. 11. 1071.

950. **P. Fireman.* Motion of translation of a gas in a vacuum. S. (2) 17. 390.

951. **R. W. Wood.* The kinetic theory and the expansion of a compressed gas into a vacuum. S. (2) 16. 908.

952. *Lord Rayleigh.* On the law of the pressure of gases between 75 and 150 millimetres of mercury. T.R.S.L. 198. 417.

953. *F. M. Exner.* Über den Gleichgewichtszustand eines schweren Gases. A.P.L. 9. 967.

954. *A. Schmidt.* Der Energieinhalt einer unendlich hohen Luftsäule bei konstantem Werte von *g* und *T.* A.P.L. 10. 449.

955. **S. Nakamura.* On the temperature of inversion in Joule-Thomson experiment. R.S.T. 12. 79.

956. **S. R. Cook.* The permanency of planetary athmospheres according to the kinetic theory of gases. M.W.R. 30. 401.

Siehe auch 708; 853; 919; 2125.

Wärmeleitung.

957. *H. S. Carlslaw.* The use of Greens functions in the mathematical theory of the conduction of heat. P.E.M.S. 21. 40.

958. *E. Picard.* Sur certaines singularités des équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique. C.R. 136. 1293.

959. **L. Austin.* Über den Wärmedurchgang durch Heizflächen. M.F.I. 7. 75.

960. *J. W. Peck.* The Fourier problem of the steady temperatures in a thin rod. R.B.A. 71. 555.

961. **W. Steckloff.* Problème de refroidissement d'une barre hétérogène. A.T. (2) 3. 281.

962. *R. Weber.* Wärmeleitung in Flüssigkeiten. A.P.L. 11. 1047.

963. **L. Natanson.* Sur la conductibilité calorifique d'un gaz en mouvement. B.I.C. 1902. 137.

964. *W. Natanson.* O przewodnictwie cieplnem poruszającego się gazu (Über die Wärmeleitungsfähigkeit eines bewegten Gases). C. A. C. 42. 70.

Siehe auch 840; 971.

Strahlung.

965. *W. Michelson.* Übersicht der neuesten Untersuchungen über die Thermodynamik der strahlenden Energie. J.R.P.C.G. 34. 155.

966. *P. Gruner.* Beitrag zum Strahlungsgesetz. P.Z. 4. 305.

967. **E. Pringsheim.* Über die Strahlungsgesetze. Z.E. 9. 716.

968. *A. Schmidt.* Konsequenzen des Lambertschen Strahlungsgesetzes. P.Z. 4. 453.

969. *T. H. Havelock.* On the pressure of radiation. P. M. (6) 6. 157.

970. *E. F. Nichols* and *G. F. Hull.* The pressure due to radiation. P.A.Bo. 38. 559.

971. *A. Schuster.* The influence of radiation on the transmission of heat. P.M. (6) 5. 243.

972. *E. F. Nichols* und *G. F. Hull.* Über Strahlungsdruck. A.P.L. (4) 12. 225.

973. **E. Buckingham.* Note on the radiation formulas and on the principles of thermometry. M. W. R. 31. 179.

974. *J. Koenigsberger.* Über die Emission von Körpern mit endlichem Absorptionsvermögen. A.P.L. (4) 12. 342.

975. *C. Féry.* Rayonnement calorifique et lumineux de quelques oxydes. A. C.P. (7) 27. 433.

976. *P. Compan.* Essai sur le pouvoir refroidissant de l'air et sur les lois du rayonnement. J. P. (4) 1. 708.

977. *R. J. Strutt.* Radium and the Suns heat. N. 68. 572.

Siehe auch 534; 824; 1332; 2067; 2069.

Elektrizität.

978. *W. Lebedinski.* Die Fortschritte der modernen Elektrizitätslehre (russ.). E. P. 1902. 113.

Siehe auch 535.

Elektrostatik.

979. *E. Špačinskij.* K voprosu ob osnovnych principach elektrostatiki (Zur Frage der Grundprinzipien der Elektrostatik). M. P. O. 29. 176; 205; 217.

980. *G. A. Maggi.* Sopra un punto della teoria del campo elettrostatico. R. I. L. 36. 366.

981. *E. Almansi.* Sopra un problema di elettrostatica. N. C. P. (5) 4. 280.

982. *J. B. Goebel.* Die Verteilung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln. Cr. 125. 267.

983. *A. Lampa.* Elektrostatik einer Kugel, welche von einer konzentrischen, aus einem isotropen Dielektrikum bestehenden Kugelschale umgeben ist. S. A.W. 111. 593.

984. *R. Gans.* Über Volumänderung van Gasen durch dielektrische Polarisation. A. P. L. 11. 797.

985. **F. Maccarone.* Conducibilità e ritardo di polarizzazione elettrica. N. C. P. (5) 4. 313.

986. *L. T. Moore.* On electrostriction. P. M. (6) 6. 1.

987. *A Wüllner* und *M. Wien.* Über die Elektrostriktion des Glases. A.P.L. 9. 1217.

988. **E. Bouty.* La cohésion diélectrique des gaz. J. P. (4) 2. 401.

989. *M. Toepler.* Über Funkenlängen und Anfangsspannungen in Luft von Atmosphärendruck. A. P. L. 10. 730.

990. **J. Januschkewitsch.* Über einige Erscheinungen, welche zwischen den Konduktoren einer Elektrisiermaschine auftreten. E. P. 1902. 201.

991. **Batelli* e *Magri.* Scariche oscillatorie. L. E. 12. No. 4; 5.

992. **N. R. Campbell.* Some experiments on the electrical discharge from a point to a plane. P. M. (6) 6. 618.

993. *E. Rutherford.* Discharge of electricity from glowing platinum P. T. R. S. C. (2) 7. C. 27.

994. *F. Harms.* Elektrometerkapazitäten und die Verwendung von Elektrometern zur Messung von Elektrizitätsmengen. A. P. L. 10. 816.

995. **E. Almansi.* Sopra un problema di elettrostatica III. N. C. P. (5) 5. 242.

996. **E. Dorn.* Beseitigung elektrostatischer Einflüsse bei Wägungen durch Radium. V. P. G. 5. 189.

997. *E. R. v. Schweidler.* Einige Versuche über Leitung und Rückstandsbildung in Dielektricis. S. A. W. 111. 579.

998. *de Heen* und *F. V. Dwelshauvers-Dery.* Eine neue Theorie der Wimshurstschen Maschine. D. V. N. 74. 26.

999. *N. Bulgakov.* Zur Theorie des ebenen Kondensators (russ.). J. R. P. C. G. 34. 315.

1000. **T. J. I'A. Bromwich.* Note on a condensor problem. M. M. 31. 184.

1001. *E. R. v. Schweidler.* Einige Fälle der Energieumwandlung bei der Ladung von Kondensatoren. S. A. W. 111. 573.

1002. *A. Maresca.* Über die Energie, welche von der oszillierenden Entladung eines Kondensators in leeren Röhren entwickelt wird. P.Z. 4. 9. — *W. Kaufmann* 161.

1003. *E. Marx.* Über die Kondensatorentladung in verzweigten Systemen bei Periodenzahlen 10^{-7}—10^{-8} und das dielektrische Verhalten einiger Flüssigkeiten in diesem Frequenzbereich. A.P.L. (4) 12. 491.

1004. *J. Haerdén.* Über die Analyse der Entladungen eines Kondensators in Verbindung mit einer Hochfrequenzspule. P.Z. 4. 461.

1005. *A. Ekström.* Einige Theoreme über elektrische Ladungen und Entladungen von Kondensatoren durch verzweigte Kreise mit Selbstinduktion und Widerstand. A.V.A.S. 28. No. 7.

1006. *H. Tallquist.* Über die oszillatorische Entladung eines Kondensators bei größerem Werte des Widerstandes des Stromkreises. A.P.L. 9. 1083.

Siehe auch 398; 419—21; 479; 674; 1101; 1588; 1613; 1614.

Dielektrizitätskonstante.

1007. *A. Wüllner* u. *M. Wien.* Über die Änderung der Dielektrizitätskonstante des Glases mit dem Druck. A.P.L. 11. 619.

Siehe auch 545; 624.

Elektrodynamik.

1008. *W. Wien.* Über die Differentialgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. D.V.M. 12. 497.

1009. *E. Cohn.* Über die Bewegung von Isolatoren und elektrisch durchströmten Leitern. P.Z. 4. 549.

1010. *Billitzer.* Über die Elektrizitätserregung durch die Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten. A.P.L. 11. 937.

1011. *T. Boggio.* Sulle legge elementare di Weber relativa alle azioni elettrodinamiche di 2 cariche elettriche in movimento. R.A.L.R. 12. B. 14; 57.

1012. *K. Schwarzschild.* Bemerkung zur Elektrodynamik. P.Z. 4. 431.

1013. *E. Kohl.* Über die Herleitbarkeit einiger Hauptsätze der Potentialtheorie aus der Stefanschen Entwicklung der Maxwellschen Gleichungen. M.H. 14. 58.

1014. **Carvallo.* Sur l'application de la loi des travaux virtuels aux phénomènes naturels. S.F.P. 1902. 8; 55

1015. *K. Zakrzewski.* O sile elektromotorycznej, powstającej wokutek ruchu cieczy w wysrebrzonej rurce sklanej (Über die elektromotorische Kraft, welche durch die Bewegung einer Flüssigkeit in einer Glasröhre erzeugt wird). C.A.C. 39. 258.

1016. *W. Mitkiewicz.* Über die elektromotorische Gegenkraft des Voltabogens (russ.). J.R.P.C.G. 34. 223.

1017. *K. Holmberg.* Generalisation af Plancks teori för beräkning af elektromotoriska kraften mellan tvänne elektrolyter. A.M.A.F. 1. 65.

1018. *K. Schwarzschild.* Die elementare elektrodynamische Kraft. N.G.G. 1903. 132.

1019. *B. Davis.* The electrical conductivity and absorption of energy in the electrodeless discharge. A.J.S. (4) 15. 202.

1020. *W. v. Nicolajew.* Über das elektrostationäre Feld in Leitern und Elektrolyten. P.Z. 4. 546; 709.

1021. *R. Weber.* Des mesures de précision de la résistance électrique par le pont de Wheatstone. B.S.N. 27. 66.

1022. *E. Robinson.* Der elektrische Widerstand loser Kontakte und Resonanzversuche mit dem Kohärer. A.P.L. 11. 754.

1023. *A. Campbell.* Measurements of small resistances. P.M. (6) 6. 33.

1024. **T. E. Aurén.* Bidrag till kännedom om elektriska ledningsmotståndet vid kontakter mellan fasta ledande kropper. A.M.A.F. 1. 25.

1025. **Bouty.* La cohésion diélectrique des gaz. S.F.P. 1903. 96.

1026. *T. Boggio.* Risoluzione del problema generale dell' induzione elettrodinamica nel caso di un piano conduttore indefinito. A.A.T. 38. 448.

1027. *Vasilesco-Karpen.* Sur la convection électrique. C.R. 136. 609.

1028. **G. F. Walker.* Some problems in electric convection. T.C.P.S. 19. 173.

1029. *E. R. Wolcott.* Über die Anwendung von Gleichstrompolarisation bei Kohlrauschs Methode zur Messung elektrolytischer Leitungswiderstände. A.P.L. (4) 12. 653.

1030. **S. L. Bigelow.* On the passage of a direct current through on electrolytic cell. J.P.C. 6. 603.

1031. **Sartori.* Correnti alternate. L.E. 12. No. 4.

1032. **Salvadori.* Correnti ondulate. A.A.E.I. 7. No. 1.

1033. **Giorgi.* Correnti non sinusoidali. A.A.E.I. 7. No. 1.

1034. *H. T. Simon* u. *M. Reich.* Über die Erzeugung hochfrequenter Wechsel-

ströme und ihre Verwendung zur drahtlosen Telegraphie. P.Z. 4. 364.

1035. *H. T. Simon.* Über die Erzeugung hochfrequenter Wechselströme und ihre Verwendung in der drahtlosen Telegraphie. P.Z. 4. 737.

1036. *Corbino.* Correnti variabili. Circuiti correnti trifasiche. Generatrici asincrone. G.S.P. 23.

1037. **Giorgi.* Correnti alternanti sinusoidali. L.E. 12. No. 6.

1038. *H. Nagaoka.* Note on the potential and the lines of force of a circular current. J.U.T. 16. No. 15.

1039. *H. Nagaoka.* On the potential and lines of force of a circular current. P.M. (6) 6. 19.

1040. *J. Stark.* Zur Charakteristik des Glimmstroms bei atmosphärischem Druck. P.Z. 4. 585.

1041. *K. R. Johnson.* La capacité d'un conducteur pour l'unité de longueur. B.V.A.S. 59. 58.

1042. **Morris.* On the growth of electric currents in an inductive circuit. P.P.S.L. 18. 239.

1043. *F. Klingelfuß.* Untersuchungen an Induktorien an Hand der Funkenentladungen bis zu 100 cm Funkenlänge in Luft von Atmosphärendruck. V.N.B. 15. 135.

1044. *E. Riecke.* Über nahezu gesättigten Strom in einem von 2 konzentrischen Kugeln begrenzten Luftraume. A.P.L. (4) 12. 814.

1045. *E. Riecke.* Über näherungsweise gesättigte Ströme zwichen planparallelen Platten. A.P.L. (4) 12. 820.

1046. *F. G. Cottrell.* Der Reststrom bei galvanischer Polarisation betrachtet als ein Diffusionsproblem. Z.P.C. 42. 385.

1047. *P. Drude.* Elektrische Eigenschaften und Eigenschwingungen von Drahtspulen mit angehängten geraden Drähten oder Metallplatten. A.P.L. 11. 957.

1048. **S. L. Bigelow.* The influence of a dissolved gas on conductivity for a direct current. J.P.C. 7. 327.

1049. *P. L. Mercanton.* Mesure de la fréquence des variations périodiques d'un courant électrique. J.P. (4). 1. 719.

1050. *A. Ketterer.* Action de la tension et du rayonnement électriques sur le cohéreur. B.S.V. (4) 38. 267.

1051. **L. dall' Oppio.* Intorno l'interruptore di Wehnelt. N.C.P. (5) 5. 27.

1052. *D. A. Goldhammer.* Über die Theorie des Flüssigkeitsunterbrechers. A.P.L. 9. 1070.

1053. *W. Feußner.* Stromverzweigung in netzförmigen Leitern. A.P.L. 9. 1304.

1054. *E. Kobald.* Zur mathematischen Theorie der Verzweigung von Wechselstromkreisen mit Induktanz. M.H. 14. 133.

1055. *L. R. Wilberforce.* Note on an elementary treatment of conducting networks. P.M. (6) 5. 489.

1056. *W. Feußner.* Über die Verzweigung von Strömen. S.G.M. 1902. 107.

1057. *D. A. Goldhammer.* Über die Transformation eines pulsierenden Stromes in einen Wechselstrom. P.Z. 4. 108.

1058. **Grassi.* Transformatore con reattanza variabile nel secondrio. A.A.E.I. 7. No. 1.

1059. *F. Wittmann.* Untersuchung und objektive Darstellung von Flaschenbatterie- und Induktionsströmen. A.P.L. (4) 12. 373.

1060. *E. Voigt.* Über Messungen hoher Spannungen. A.P.L. (4) 12. 385.

1061. **R. Blondlot.* Action d'un faisceau polarisé de radiations très réfrangibles sur de très petites étin celles électriques. J.P. (4) 2. 337.

1062. *R. Swyngedauw.* Sur une généralisation d'un théorème de M. Boucherot. C.R. 136. 1433.

1063. *R. Weber.* Intégrale d'un système de 2 équations différentielles se rapportant à un circuit téléphonique et son interprétation. B.S.N. 27. 39.

1064. *G. A. Campbell.* On loaded lines in telephonic transmission. P.M. (6) 5. 313.

1065. *F. Dolezalek* und *A. Ebeling.* Untersuchungen über telephonische Fernleitungen Pupinschen Systems. A.Gr. (3) 6. 26.

1066. *E. Rogovsky.* Sur la conductibilité extérieure des fils d'argent plongés dans l'eau. C.R. 136. 1391.

1067. *H. A. Wilson.* The electric intensity in the uniform positive column in air. P.M. (6) 6. 180.

Siehe auch 52; 422; 671; 709; 719; 920; 1006; 1428; 1615; 1616; 1781—92; 1811—17; 1977.

Elektrische Schwingungen.

1068. *H. Veillon.* Einige Grundversuche über elektrische Schwingungen. V.N.B. 16. 329.

1069. *E. Lüdin.* Über elektrische Schwingungen. M.G.W. 4. 143.

1070. *A. Batelli* e *L. Magri.* On oscillatory discharges. P.M. (6) 5. 1. 620.

1071. **A. Artom.* Sulla produzione dei raggi di forza elettrica e polarizza-

zione circolare od ellittica. N.C.P. (5) 5. 273.

1072. *N. Bulgakov.* Berechnung der Kapazität des A. S. Popovschen Vibrators (russ.). J.R.P.C.G. 34. 209.

1073. **R. Swyngedauw.* Sur l'excitateur de Hertz. J.P. (4) 2. 14.

1074. *M. Brillouin.* Influence réciproque de 2 oscillateurs voisins. Caractère particulier des discontinuités. C.R. 136. 301.

1075. *E. W. Marchant.* A graphical method of determining the nature of the oscillatory discharge from a condenser through a coil of variable inductance. P.M. (6) 5. 155.

1076. **P. Minchin.* Récepteur pour les oscillations électriques. E.R. 51. 770.

Siehe auch 1002; 1006; 1179; 1180; 1526; 1619; 1793—97; 1823; 1858; 1861.

Elektrische Wellen.

1077. *W. B. Morton.* On the connexion between speed of propagation and attenuation of electric waves along parallel wires. P.M. (6) 5. 643.

1078. *B. Navrátil.* O jednoduchém zařizeni k demonstraci elektrických vln (Über ein einfaches Verfahren zur Demonstration elektrischer Wellen). C. 32. 66.

1079. *H. A. Bumstead.* On the reflection of electrical waves at the free end of a parallel wire system. A. J. S. (4) 14. 359.

1080. *H. M. Macdonald.* The bending of electric waves round a conducting obstacle. P.R.S.L. 71. 251.

1081. *F. Hasenöhrl.* Über die Absorption elektrischer Wellen in einem Gas. S.A.W. 111. 1229; 112. 30.

1082. *R. Pitoni.* La risonanza elettrica. P.M.R. Suppl. 6. 129.

1083. *C. Tissot.* Sur le détecteur d'ondes à effet magnétique. J.P. (4) 2. 342.

1084. *J. Zenneck.* Über die Bedeutung der Ansatzdrähte und -platten in der drahtlosen Telegraphie. P. Z. 4. 656.

1085. *G. Seibt.* Wellentelegraphie. P.Z. 4. 485.

Siehe auch 538; 625; 1150; 1312a; 1617; 1860; 1863.

Elektrische Polarisation.

1086. *F. Krüger.* Theorie der Polarisationskapazität. N.G.G. 1903. 59.

1087. *F. Krüger.* Über Polarisationskapazität. Z.P.C. 45. 1.

1088. *J. A. Fleming.* On the measurement of small capacities and inductances. P.M. (6) 5. 493.

1089. **Artom.* Raggi di forza elettrica a polarizzazzione rotatoria. L. E. 12. No. 6.

Siehe auch 804; 984; 985; 1041; 1071; 1072.

Elektronentheorie.

1090. **O. Lodge.* On electrons. J.I.E.E. 32. 45; E.R. 42. 224.

1091. *K. Schwarzschild.* Zwei Formen des Prinzips der kleinsten Aktion in der Elektronentheorie. N.G.G. 1903. 126.

1092. *M. Abraham.* Prinzipien der Dynamik des Elektrons. P.Z. 4. 57.

1093. *P. Langevin.* L'ionisation des gaz. A.C.P. (7) 28. 289.

1094. **E. Riecke.* Sur le champ des électrons en mouvement. A.S.G. (4) 14. 609.

1095. *P. Langevin.* Recombinaison et mobilités des ions dans lez gaz. A.C.P. (7) 28. 433.

1096. *P. Langevin.* Sur la loi de recombinaison des ions. C.R. 137. 177.

1097. *H. Mache.* Eine einfache Methode die Geschwindigkeit der Gasionen zu bestimmen, welche weder hohes Molisierungs- noch Regenerierungsvermögen besitzen. P.Z. 4. 717.

1099. *C. Barus.* The ionization of water nuclei. A.J.S. (4) 15. 105.

1100. *C. Barus.* The ionization of water and of phosphorus nuclei. A.J.S. (4) 15. 217.

1101. *J. S. Townsend.* The genesis of ions by the motion of positive ions in a gas and a theory of the sparking potential. P.M. (6) 6. 558.

1102. *J. S. Townsend.* Über einige durch positive Ionen hervorgebrachte Wirkungen. P.Z. 4. 557.

1103. *H. A. Wilson.* A determination of the ions produced in air by Roentgen rays. P.M. (6) 5. 429.

1104. *J. J. E. Durack.* On the specific ionization produced by the corpuscles given out by radium. P.M. (6) 5. 550.

1105. **W. v. Bolton.* Über das Leuchten der Ionen. Z.E. 9. 767.

1106. *J. S. Townsend.* The conductivity produced in gases by the aid of of ultra-violet light. P.M. (6) 5. 389.

1107. *J. Stark.* Zur Kenntnis des Lichtbogens. A.P.L. (4) 12. 673.

1108. *W. Kaufmann.* Über die „elektromagnetische Masse" der Elektronen. N.G.G. 1903. 90; 148.

1109. *W. Kaufmann.* Die elektromagnetische Masse des Elektrons. P.Z. 4. 54.

1110. *H. A. Lorentz.* Considérations sur la pesanteur. A.N. (2) 7. 325.

1111. *E. Riecke.* Neuere Anschauungen der Elektrizitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftelektrizität. S.A.M. 1903. 257.

1112. *H. Gerdien.* Die absolute Messung der elektrischen Leitfähigkeit und der spezifischen Ionengeschwindigkeit in der Atmosphäre. P.Z. 4. 632.

1113. *E. Riecke.* Beiträge zu der Lehre von der Luftelektrizität. N.G.G. 1903. 39; 83.

1114. **L. A. Parsons.* Ions and electrons. T.A.E.S. 3. 265.

1115. *R. Luther* und *F. J. Brislee.* Über Kenntnis des Verhaltens „unangreifbarer" Anoden, insbesondere bei der Elektrolyse von Salzsäure. Z.P.C. 45. 216.

Siehe auch 536; 537; 544; 805; 1125; 1165; 1474—77.

Thermoelektrizität.

1116. *O. Heaviside.* Extension of Kelvins thermoelectric theory. N. 68. 78.

1117. *N. Hesehus.* Über die Beziehung zwischen der Elektrizitätsmenge und Entropie (russ.). J.R.P.C.G. 34. 325.

1118. **E. Carvallo.* Roue de Barlow actionnée par un élément thermoélectrique. J.P. (4) 2. 122.

1119. *Berthelot.* Recherches sur les piles fondées sur l'action réciproque de 2 liquides salins. A.C.P. (7) 27. 145; 158; 192; 208; 219; 260; 289; 328.

1120. *Ponsot.* Force électromotrice d'un élément de pile thermoélectrique. C.R. 135. 686.

1121. *A. Campetti.* Sul calore di dissociazione elettrolitica. A.A.T. 38. 64.

1122. *Ponsot.* Resitivité et température. C.R. 136. 87.

1123. *G. Moreau.* Recherches sur la conductibilité électrique des flammes. A.C.P. (7) 30. 5.

1124. *J. Stark.* Der Kathodenfall des Glimmstromes als Funktion von Temperatur, Stromstärke und Gasdruck. A.P.L. (4) 12. 1.

1125. *O. W. Richardson.* On the positive ionization produced by hot platinum in air at low pressures. P.M. (6) 6. 80.

1126. *O. W. Richardson.* The electrical conductivity imparted to a vacuum by hot conductors. T.R.S.L. 201. 497.

1127. *C. L. Speyers.* The heat of a charge in connection with changes in dielectric constants and in volumes. A.J.S. (4) 16. 61.

1128. **F. A. Schulze.* Über das Verhalten einiger Legierungen zum Gesetz von Wiedemann und Franz. N.R. 17. 621.

1129. **E. Road.* A relation between the changes of length and the changes in thermoelectric power caused by magnetization. P.R. 15. 321.

1130. *W. Ignatowski.* Über Erwärmung von Stäben durch Foucaultsche Ströme im veränderlichen Magnetfelde (russ.). E.P. 1902. 161.

Siehe auch 1189; 1910—12.

Magnetismus.

1131. **Zacharias.* Die Ursachen des Magnetismus. V.V.E. 1903. 25.

1132. *J. H. Maclagan-Wedderburn.* On the isoclinal lines of a differential equation of the 1. order. P.R.S.E. 24. 400.

1133. **W. P. Beck.* Some experiments in magnetic moment. P.R. 16. 224.

1134. **S. Sano.* On magnetostriction of crystals. R.S.T. 9. 52.

1135. *N. Nagaoka* and *K. Honda.* Experiments on the magnetostriction of steel, nickel, cobalt and nickel steels. J.U.T. 16. No. 8.

1136. **H. Nagaoka* et *K. Honda.* Magnétostriction des aciers-nickels. S.F.P. 1902. 41. — *C. E. Guillaume* 47.

1137. **H. Nagaoka* et *K. Honda.* La magnétostriction des aciers au nickel. S.F.P. 1902. 16.

1138. *C. E. Guye* et *B. Herzfeld.* Sur l'hystérésis magnétique aux fréquences élevées. C.R. 136. 957.

1139. **Sella.* Sensibilità del ferro nell' isteresi magnetoelastica. R.S.I. 35. No. 8—9.

1140. *S. F. C. Searle* and *T. H. Bedford.* The measurement of magnetic hysteresis. T.R.S.L. 198. 33.

1141. **J. P. de Culong.* Die Theorie der magnetischen Induktion und ihre Anwendung auf die massive Kugel, Ellipsoide und unendliche Kreiszylinder. B.H. 24. 115.

1142. *W. Voigt.* Zur magnetischen Influenz regulärer Kristalle. N.G.G. 1903. 17.

1143. **J. P. de Culong.* Die Theorie der Anziehung der Körper, welche einen homogenen magnetischen Zustand besitzen. B.H. 24. 94.

1144. **S. Sano.* Note on the magnetization of cubic crystals. R.S.T. 11. 73.

1145. *S. Sano.* Notiz über Magnetisierung kubischer Kristalle. P.Z. 4. 8.

1146. **P. T. Passalsky.* Magnetisierung einer homogenen isotropen Kugel in veränderlichem Felde. M.S.O. 20. XLV.

1147. **N. Bulgakow.* Magnétisation d'un ellipsoide à 3 axes dans un champ extérieur donné. J.R.P.C.G. 34. 16.

1148. **F. Townsend, S. Diamant* and *L. S. Thurston.* Magnetic permeability of liquids. E.M.W. 40. 811.

1149. *C. Carpini.* Variazione dell' attrito interno dei liquidi magnetici in campo magnetico. R.A.L.R. 12. A. 341.

1150. **J. Zenneck.* Fortpflanzung magnetischer Wellen in Eisenzylindern. A.P.L. 10. 845; 11. 867.

1151. *H. Armagnat.* Sur les essais magnétiques du fer. B.S.I.E. (2) 2. 525.

1152. *Trowbridge.* The magnetic properties of iron and steel at liquid air temperatures. E.M.W. 40.

1153. *K. Honda* and *S. Shimizu.* The Wiedemann effect in ferromagnetic substances. J.U.T. 16. No. 14.

1154. *K. Honda* and *S. Shimizu.* Note on the vibration of ferromagnetic wires placed in a varying magnetizing field. J.U.T. 16. No. 10.

1155. *K. Honda* and *S. Shimizu.* Change in length of ferromagnetic wires under constant tension by magnetization. J.U.T. 16. No. 9.

1156. *K. Honda, S. Shimizu* and *S. Kusakabe.* Change of the modulus of elasticity in ferromagnetic substances by magnetization. J.U.T. 16. No. 12.

1157. *K. Honda, S. Shimizu* and *S. Kusakabe.* Change of the modulus of rigidity in ferromagnetic substances by magnetization. J.U.T. 16. Nr. 13.

1158. *J. Zenneck.* Über die magnetische Permeabilität von Eisenpulver bei schnellen Schwingungen. A.P.L. (4) 12. 869.

1159. *F. Kohlrausch* und *L. Holborn.* Über ein störungsfreies Torsionsmagnetometer. A.P.L. 10. 287.

1160. *H. du Bois.* Störungsfreie Differentialmagnetometer. A.P.L. 9. 938.

1161. *P. L. Mercanton.* Étude des propriétés magnétiques des poteries lacustres. B.S.V. (4) 38. 335.

Siehe auch 626; 671; 1083; 1414; 1618—20; 2035—44.

Elektromagnetismus.

1162. *C. Neumann.* Über die Maxwell-Hertzsche Theorie. A.G.L. 27. 211; 753.

1163. *E. Cohn.* Über die Maxwellsche Theorie. P.Z. 4. 619.

1164. *G. Picciati.* La teoria di Hertz applicata alla determinazione del campo elettromagnetico generato dalla traslazione uniforme d'una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito. R.A.L.R. (5) 11. B. 221.

1165. *H. A. Lorentz.* De grondvergelijkingen voor electromagnetische verschijnselen in ponderabele lichamen afgeleid uit de electronentheorie. C.A.A. 11. 305.

1166. *P. Duhem.* Notes sur quelques points des théories électriques et magnétiques. M.S.B. (6) 2. 45.

1167. **L. Puccianti.* Corrispondente elettrico del diamagnetismo. N.S.P. (5) 4. 408.

1168. *A. Eichenwald.* Über die magnetischen Wirkungen bewegter Körper im elektrostatischen Felde. A.P.L. 11. 1; 421.

1169. *G. Picciati.* Campo elettromagnetico generato da una carica elettrica in moto circolare uniforme. R.A.L.R. 12 A. 41.

1170. *T. Lévi-Cività.* Sur le champ électromagnétique engendré par la translation uniforme d'une charge électrique parallèlement à un plan conducteur indéfini. A.T. (2) 4. 5.

1171. *E. Kohl.* Über die Gültigkeit des Massensatzes von Gauß für bewegte elektrische Massen. A.P.L. (4) 12. 842.

1172. *E. Hoppe.* Rotierende Kraftfelder. S.M.H. 4. 117.

1173. **N. Orlov.* Quelques cas de rotation magnétique dans le champ électromagnétique d'un courant alternatif. J.R.P.C.G. 34. 232.

1174. *E. Wilson.* The dissipation of energy by electric currents induced in an iron cylinder when rotated in a magnetic field. P.R.S.L. 70. 359.

1175. **P. Drude.* Rotation von Flüssigkeiten im magnetischen Felde. Z.E. 9. 666.

1176. **Pellat.* Phénomènes de magnétofriction. S.F.P. 1903. No. 190.

1177. **H. Pellat.* De la magnétofriction dans les tubes à gaz rarifiés. S.F.P. 1903. 21; J.P. (4) 2. 241.

1178. **C. H. Bedell.* Magnet and alternate current arc. E.M.W. 40. 408.

1179. *J. Zenneck.* Die Energieverhältnisse in oszillatorischen magnetischen Kreisen. A.P.L. 11. 1121.

1180. **A. Lampa.* Über die elektromagnetischen Schwingungen einer Kugel, sowie über diejenigen einer Kugel, welche von einer konzentrischen dielektrischen

Kugelschale umgeben ist. A.A.W. 1903. 4; S.A.W. 112. 37.

1181. *J. Zenneck.* Elektrischer und magnetischer Widerstand bei Schwingungen. A.P.L. 11. 1135.

1182. *J. Stark.* Bemerkung zur Ablenkung der positiven Strahlen im elektromagnetischen Felde. P.Z. 4. 583.

1183. *H. Becquard.* Sur une propriété des rayons α du radium. C.R. 136. 1517.

1184. **N. Vasilesco-Karpen.* Sur la convection électrique. J.P. (4) 2. 667.

1185. *V. Crémieu* and *H. Pender.* On the magnetic effect of electric convection. P.M. (6) 6. 442.

1186. **H. Pender* et *V. Crémieu.* Recherches contradictoires sur l'effet magnétique de la convection électrique. J.P. (4) 2. 641.

1187. **H. Pender.* On the magnetical effect of electrical convection II. P.R. 15. 291.

1188. *H. Pender.* On the magnetic effect of electrical convection. P.M. (6) 5. 34.

1189. *J. Larmor.* On the electrodynamic and thermal relations of energy of magnetisation. P.R.S.L. 71. 229.

1190. *A. Eichenwald.* Über die magnetische Wirkung bewegter Dielektrika. P.Z. 4. 308.

1191. *A. Szarvassi.* Über die magnetischen Wirkungen einer rotierenden elektrisierten Kugel. S.A.W. 111. 1058.

1192. *G. Picciati.* Campo elettromagnetico generato dal moto circolare uniforme di una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito. R.A.L.R. 12 A. 159. 185.

1193. **B. Mitkiewiicz.* Beitrag zum Studium der Symmetriestörungen von Wechselströmen. J.R.P.C.G. 34. 17.

1194. *J. Koenigsberger.* Induktionswirkung im Dielektrikum und Bewegung des Äthers. B.G.F. 13. 95.

1195. *J. Stark.* Der Kathodenfall des Glimmstroms im Magnetfeld. A.P.L. (4) 12. 31.

1196. *N. Orlov.* Einige Fälle von magnetischer Drehung im veränderlichen elektromagnetischen Felde. J.R.P.C.G. 34. 233.

1197. *L. Kann.* Ein Hysteresis- (und Wirbelstrom-)motor. P.Z. 4. 561.

1198. *M. Brillouin.* Propagation dans les milieux conducteurs. C.R. 136. 667. 746.

1199. *K. R. Johnson.* Zur Theorie des Grammeschen Ringes. P.Z. 4. 190; 372.

Siehe auch 296; 537; 1108; 1109; 1427; 1772; 1773; 1887; 2039.

Induktion.

1200. *R. Dongier.* Sur la mesure des coefficients de self-induction au moyen du téléphone. C.R. 137. 115.

Siehe auch 1005; 1026; 1042; 1046; 1059; 1141; 1198; 1778-80; 1833; 1894.

Thermomagnetismus.

1201. *H. B. Loomis.* The effect of changes of temperature on permanent magnets. A.J.S. (4) 15. 179.

1202. **G. Piaggesi.* Magnetizzazione dei liquidi col cambiare della temperatura. N.C.P. (5) 4. 247.

1203. *R. L. Wills.* Effect of temperature on the hysteresis loss in iron. P.M. (6) 5. 117.

1204. *L. Lownds.* The thermomagnetic and related properties of crystalline bismuth. P.M. (6) 5. 141.

Siehe auch 1129; 1130; 1152; 1189.

Theoretische Astronomie.

1205. *K. Schwarzschild.* Referat über den gegenwärtigen Stand der Himmelsmechanik. P.Z. 4. 765.

1206. *O. Backlund.* Über eine horistische Differentialgleichung. A.P.B. (5) 16. 109.

1207. **K. Laves.* A kinematic study of Hansens ideal coordinates. S. (2) 15. 296.

1208. **E. T. Whittaker.* On periodic orbits. M.N.A.S. 62. 186.

1209. **K. Laves.* The computation of Laplace's coefficients by means of Gyldéns γ-coefficients. S. (2) 15. 297.

1210. *W. Lewicki.* Zur Laplaceschen Theorie der Saturnringe. M.H. 14. 288.

Siehe auch 85.

Störungen.

1211. *T. J. Bromwich.* The equation of secular inequalities. R.B.A. 71. 553.

1212. **G. W. Hill.* On the application of Delaunay transformations to the elaboration of the secular perturbations of the solar system. A.J.B. 22. 183.

1213. **C. B. S. Cavallin.* Contributions to the theory of the secular perturbations of the planets. M.L.A.O. 19.

1214. *J. Mascart.* Perturbations séculaires. C.R. 136. 1045.

1215. *J. Mascart.* Perturbations séculaires du 1. degré par rapport à l'excentricité. C.R. 136. 1181.

1216. *J. Mascart.* Perturbations séculaires d'importance secondaire. C.R. 137. 38.

1217. *J. Mascart.* Perturbations qui ne dépendent que de l'élongation. C.R. 136. 543.

1218. *J. Mascart.* Perturbations indépendantes de l'excentricité. C.R. 135. 1097; 136. 443.

1219. *J. Mascart.* Calcul des perturbations indépendentes de l'excentricité dans les orbites des planètes. B.A. 20. 136.

1220. *J. Mascart.* Résidu des perturbations séculaires. C.R. 137. 303.

1221. **A. Leboeuf.* Sur une nouvelle démonstration des polynomes Hansen-Tisserand. Applications. A.O.P. 23. C.

1222. *C. V. L. Charlier.* Sur la convergence des développements suivant les puissances des masses des planètes. B.A. 19. 380.

1223. **W. Zimmermann.* Berechnung spezieller Störungen durch Variation der kanonischen Elemente. M.S.Br. 2. 89.

1224. *W. de Sitter.* Über eine kleine Modifikation der Formeln zur Berechnung der speziellen Störungen der Elemente für kleine Exzentrizitäten. A.N.K. 163. 105.

1225. **P. V. Neugebauer.* Über die Berechnung spezieller Störungen nach der von v. Oppolzer in der Abhandlung „Ermittelung der Störungswerte in den Koordinaten durch die Variation entsprechender Konstanten" vorgeschlagenen Methode. V.R.I. 20. 155.

1226. **E. Doolittle.* The secular perturbations of the Earth by the action of Mars. A.J.B. 22. 115.

1227. *J. Boccardi.* Remarques sur le calcul des perturbations spéciales des petites planètes. C.I.M. 2. 365.

Vielkörperproblem.

1228. *P. Pizzetti.* Sopra alcune equazioni fondamentali nel problema degli *n* corpi. A.A.T. 38. 954.

1229. **W. Ebert.* Über die Eigenschaften gewisser Probleme, auf welche das Dreikörperproblem zurückgeführt werden kann. V.A.G. 37. 1238.

1230. *E. O. Lovett.* On the periodic solutions of the problem of 3 bodies. A.N.K. 159. 281.

1231. **G. W. Hill.* Illustrations of periodic solutions in the problem of 3 bodies. A.J.B. 22. 93; 117.

1232. *H. Andoyer.* Sur un point particulier de l'étude des cas de commensurabilité approchée dans le problème des 3 corps. B.A. 19. 440.

1233. *E. T. Whittaker.* On periodic orbits in the restricted problem of 3 bodies. M.N.A.S. 62. 346.

1234. *O. Callandreau.* Sur la mise en nombres de la solution du problème restreint quand on se borne à l'effet des grandes inégalités. B.A. 20. 369.

1235. *T. Levi-Cività.* Sur les trajectaires singulières du problème restreint des 3 corps. C.R. 136. 82.

1236. *T. Levi-Cività.* Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei 3 corpi. A.D.M. (3) 9. 1.

1237. *O. Backlund.* Bemerkungen zu Dr. Buchholz' Abhandlung „Die Gyldénsche horistische Integrationsmethode des Problems der 3 Körper und ihre Konvergenz". A.N.K. 163. 353.

1238. *H. Buchholz.* Untersuchung der Bewegung vom Typus $^{2}/_{3}$ im Problem der 3 Körper und der „Hildalücke" im System der kleinen Planeten auf Grund der Gyldénschen Störungstheorie. D.A.W. 72. 309.

1239. *E. Strömgren.* Über eine einfache Lösung eines Spezialfalles des Dreikörperproblems, angewandt auf die Merkurnähe des Kometen 1902 b. A.N.K. 160. 191.

Siehe auch 398; 1206.

Erdbewegung.

1240. **F. Folie.* Über die wirkliche Bewegung der Erde um ihre Rotationsachse und des wirklichen Rotationspols um den geographischen Pol. V.A.G. 37. 252.

1241. *F. Folie.* Sur la période du mouvement absolu d'un point de la terre autour de l'axe instantané. B.A.B. 1903. 327.

1242. *F. Folie.* Replique à la note de M. Ch. Lagrange. B.A.B. 1903. 506.

1243. *S. C. Chandler.* On the possible existence of still another term of the polar motion. A.J.B. 22. 154.

1244. *H. Kimura.* Ein Jahresglied der Breitenvariation, unabhängig von der Bewegung des Poles (japan.). R.S.T. 7. 35.

1245. **H. Kimura.* A new annual term in the variation of latitude independent of the components of the poles motion. A.J.B. 22. 107. — *S. C. Chandler* 164.

1246. **G. Celoria.* Studi e ricerche specialmente italiane sulle variazioni delle latitudini terrestri. R.T.C. 15. 97.

1247. **G. Johnstone Stoney.* The effect of meteoric deposits on the length of the terrestrial day. A.J.B. 22. 85.

Siehe auch 356; 358; 359; 393; 547; 823; 824; 1226; 1336; 1412; 1413.

Präzession.

1248. **J. J. Fastner*. Über die Ursache der Präzession der Nachtgleichen. A.R.L. 4. 175.

1249. **I. Sterner*. The terms of precession and nutation. A.J.B. 22. 133; 189.

1250. *L. Struve*. Zur Bestimmung der Präzessionskonstante und der eigenen Bewegung des Sonnensystems. A.N.K. 159. 377.

1251. *L. Weineck*. Graphische Darstellung der Sternkoordinatenänderung zufolge Präzession nebst Ableitung der bezüglichen Grundgleichungen. S.A.W. 112. 571.

Siehe auch 170.

Nutation.

1252. *F. Folie*. Sur des termes nouveaux du 2. ordre de la nutation. B.A.B. 1903. 684.

1253. *G. H. Darwin*. The Eulerian nutation of the earth's axis. B.A.B. 1903. 147. — *C. Lagrange* 341.

1254. *F. Folie*. Simple recherche trigonométrique sur la nutation eulérienne de l'axe instantané. A.S.B. 27. 175.

1255. *F. Folie*. Sur la nutation chandlérienne. B.A.B. 1903. 320.

1256. **P. Lehmann*. Ausführliche Tafeln zur Berechnung der Besselschen Reduktionsgrößen *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. V.R.I. 20. 13.

Siehe auch 1249.

Aberration.

1257. *R. J. Sowter*. On astigmatic aberration. P.M. (6) 6. 524.

1258. *F. L. O. Wadsworth*. On the aberration of the concave grating when used as an objective spectroscope. P.M. (6) 6. 119.

1259. **L. Weinek*. Über die Erscheinung der Fixsternaberration. D.W.B. 3. 123.

Mondbewegung.

1260. **E. Nevill*. Note on the present condition of the lunar theory. M.N.A.S. 63. 428.

1261. *H. Andoyer*. Sur la théorie de la lune. B.A. 19. 401.

1262. *W. Scheibner*. Über die Differentialgleichungen der Mondbewegung. A.G.L. 25. 133.

1263. **E. W. Brown*. Theory of the motion of the Moon; containing a new calculation of the expressions for the coordinates of the moon in terms of the time. M.A.S. 54.

1264. *E. W. Brown*. On the small divisors in the lunar theory. T.S.M.Am. 3. 159.

1265. **S. Newcomb*. On the desirableness of a re-investigation of the problem growing out of the mean motion of the moon. M.N.A.S. 63. 316.

1266. *F. Hayn*. Selenographische Koordinaten. A.G.L. 27. 361.

1267. **F. R. Moulton*. A representation of the coordinates of the moon in power series which are proved to converge for a finite interval of time. S. (2) 16. 132.

Finsternisse.

1268. *S. Gutesmann*. Sur les occultations. B.A. 20. 81.

1269. **W. Auhagen*. Note on Chamvenets theory of solar eclipses. A.J.B. 22. 105.

1270. **C. T. Whitmel*. Brightness after totality. E.M.W. 76. 335.

1271. **S. B. Gaythorpe*. The longitude of the moons terminator. E.M.W. 76. 36.

Siehe auch 1287; 1354.

Planetenbewegung.

1272. *T. Muir*. The theory of orthogonants in the historical order of its development up to 1832. P.R.S.E. 24. 244.

1273. **G. K. Suslov*. Tretij zakon Njutona (Das dritte Newtonsche Gesetz). T.P.M.K. 1901. 15.

1274. **Cantelli*. Le parentesi di Lagrange e il moto dei pianeti. G.S.P. 23.

1275. **R. v. Kövesligethy*. A bolygómozgás magyarázate (Zur Erklärung der Planetenbewegungen). U.B. 3. 203.

1276. *S. Gundelfinger*. Über eine fundamentale kubische Gleichung der Theoria motus corp. coel. von Gauß. A.Gr. (3) 5. 146. — *E. Lampe* 148.

1277. **H. Bourget*. Sur une formule de Lagrange et le théorème de Lambert. A.T. (2) 3. 69.

1278. *H. Liebmann*. Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum. B.G.L. 54. 393.

1279. **H. Andoyer*. Sur l'extension que l'on peut donner au théorème de Poisson relatif à l'invariabilité des grands axes. A.O.P. 23 A.

1280. *J. H. Jeans*. On the vibrations and stability of a gravitating planet. P.R.S.L. 71. 136; T.R.S.L. 201. 157.

1281. **A. Berberich*. Abgekürzte Berechnung einer elliptischen Planetenbahn aus 4 Beobachtungen. V.R.I. 20. 81.

1282. **O. Calleandreau.* Aperçu des méthodes pour la détermination des orbites des comètes et des planètes. A.O.P. 23. G.

1283. **A. O. Leuschner.* A short method of determining orbits from 3 observations. P.L.O. 7 I.

1284. *K. Bohlin.* Differentialformeln zur Bahnverbesserung bei kleinen Exzentrizitäten und Neigungen. A.N.K. 159. 160.

1285. *M. Brońska.* Ausdrücke der Koeffizienten in den Entwicklungen der wahren und der exzentrischen Anomalie und des Radiumvektors der Bahn eines Himmelskörpers (poln.). W.M. 6. 266.

1286. **S. Hirayama.* On the mean distance of a planet as a function of 3 heliocentric distances and the observed times. M.N.A.S. 62. 620.

1287. **C. T. Whitmel.* Velocities paths and eclipses in the solar system. E.M.W. 75. 346; 367; 390; 408.

1288. *V. A. E.* O vidimom dviženii planet (Über die scheinbare Bewegung der Planeten). M.P.O. 28. 121; 150.

1289. *O. Backlund.* Remarques sur le mémoire de Gyldén pour déterminer les termes élémentaires à longues périodes. B.A. 19. 433.

1290. * *A. Cadenat.* Essai d'explication des mouvements de rotation des planètes Uranus et Neptune. A.F. 1902. 102.

1291. * *T. F. Grigall.* Nouvelle contribution à la recherche d'une planète transneptunienne. B.S.A.F. 16. 81; 447.

1292. **C. Flammarion.* Le système d'Uranus. B.S.A.F. 16. 72.

Siehe auch 169; 1213; 1219; 1222.

Satellitenbewegung.

1293. * *H. C. Plummer.* On oscillating satellites. M.N.A.S. 63. 437.

Siehe auch 1210.

Planetoidenbewegung.

1294. *J. Kramer.* Theorie der kleinen Planeten. A.G.G. (2) 2. No. 2.

1295. *L. Fabry.* Procédé abrégé pour rectifier les ephémérides des petites planètes: Application aux planètes 110 et 394. B.A. 20. 243.

1296. *O. Callandreau.* Statistique des petites planètes. Distribution des éléments en prenant la longitude de l'aphélie comme argument. Comparaison des petites planètes et des comètes à courte période. C.R. 136. 1165.

1297. *O. Backlund.* Über die Bestimmung der Glieder langer Perioden mit besonderer Rücksicht auf die kleinen Planeten der Hecubagruppe. A.P.B. (5) 16. 37.

1298. *K. Schwarzschild.* Über die periodischen Bahnen vom Hecubatypus. A.N.K. 160. 385.

1299. *H. Andoyer.* Contribution à la théorie des petites planètes dont le moyen mouvement est sensiblement double de celui de Jupiter. B.A. 20. 321.

1300. *J. Malmqvist.* Bana för planet (429). B.V.A.S. 59. 309.

Siehe auch 1227; 1238.

Kometenbewegung.

1301. * *O. Callandreau.* Étude sur la théorie des comètes périodiques. A.O.P. 23 D.

1302. *J. Holetschek.* Über die scheinbaren Beziehungen zwischen den heliozentrischen Perihelbreiten und der Periheldistanzen der Kometen. S.A.W. 111. 1496.

1303. * *J. Bauschinger.* Über die Lambertsche Methode zur Bestimmung der Kometenbahnen. V.A.R.I. 20. 1.

Siehe auch 1239; 1282; 1296.

Sternbewegung.

1304. **G. J. Burns.* The proper motions of the stars. A.J.C. 17. 63.

Doppelsternbewegung.

1305. **S. B. Gaythorpe.* The ephemeris of a binary star. E.M.W. 75. 182.

1306. * *H. N. Russell.* An improved method of calculating the orbit of a spectroscopic binary. A.J.C. 15. 252.

1307. * *A. W. Roberts.* On the relation existing between the light changes and the orbital elements of a close binary system with special reference to the figure and density of the variable star R. R. Centauri. M.N.A.S. 63. 257.

1308. *A. Prey.* Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse des Systems 70 Ophiuchi. D.A.W. 72. 177.

1309. **G. C. Comstock.* The determination of double star orbits. S. (2) 15. 286.

Sonnenapex.

1310. *J. C. Kapteyn.* Über die Airysche Methode zur Bestimmung des Apex der Sonnenbewegung. A.N.K. 159. 121.

1311. *J. C. Kapteyn.* Über die Deklination des Apex der Sonnenbewegung. A.N.K. 161. 325.

Siehe auch 1250; 1304.

Astrophysik.

1812 a. **C. Nordmann*. Recherches sur le rôle des ondes hertziennes en astronomie physique. R.G.O. 13. 379.

1812 b. *G. Herglotz*. Über die scheinbaren Helligkeitsverhältnisse eines planetarischen Körpers mit 3 ungleichen Hauptaxen. S.A.W. 111. 1331.

1813. **C. T. Whitmel*. Venus at maximum brilliancy. J.B.A.A. 12. 278.

1814. **S. B. Gaythorpe*. The maximum brilliancy of planet Venus. E.M.W. 75. 31; 58; 76; 315; 374. *C. T. Whitmel* 334.

1815. **K. Bohlin*. Neue Untersuchungen über Gasnebel. D.W.B. 3. 210.

Siehe auch 956.

Sonnentheorie.

1816. **J. Halm*. Contributions to the theory of the Sun. A.R.O.E. 1. 71.

1817. **J. Fényi*. Ein neuer Gesichtspunkt und neue Erklärungen der Erscheinungen auf der Sonne. A.R.L. 4. 109.

1818. *G. B. Rizzo*. Sopra il calcolo della costante solare. A.A.T. 38. 612.

1819. **A. Schuster*. The solar athmosphere. A.J.C. 16. 320.

1820. **F. W. Very*. The absorptive power of the solar athmosphere. A.J.C. 16. 73; M.S.P.A.O. (2) 9. 1.

1821. *H. Seeliger*. Über die Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe. P.Z. 4. 343.

1822. **W. G. Julius*. Sonnenphänomene als Folgen anomaler Dispersion des Lichtes. D.W.B. 3. 292; S.L. 35. 28.

1823. *W. H. Julius*. Erwiderung auf Bedenken, welche gegen die Anwendung der anomalen Dispersion zur Erklärung der Chromosphäre geäußert worden sind. P.Z. 4. 132.

1824. *W. H. Julius*. Réponse à quelques objections contre l'application de la dispersion anomale à l'explication de la chromosphère. A.N. 8. 218.

1825. *A. Schmidt*. Lichtbrechung und Farbenzerstreuung in der Chromosphäre. P.Z. 4. 228.

1826. *A. Schmidt*. Die Lichtbrechung der Chromosphäre. P.Z. 4. 341.

1827. *E. Pringsheim*. Über Brechung und Dispersion des Lichts auf der Sonne. A.Gr. (3) 4. 316.

1828. *F. Biske*. Versuch einer Anwendung der Hydrodynamik auf die Theorie der Sonnenprotuberanzen (poln). W.M. 6. 147.

1829. **W. J. S. Lockyer*. On a probable relationship between the solar prominences and corona. M.N.A.S. 63. 481.

Siehe auch 977; 1445; 1477; 1478.

Planeten.

1830. **J. Riniker*. Über die Gesetzmäßigkeit der Planetenabstände. A.R.L. 4. 207.

Siehe auch 465; 470; 585; 956; 1346.

Zodiakallicht.

1831. *H. Geelmuyden*. La lumière zodiacale. B.A. 19. 546.

Kometen.

1832. **C. F. Nichols* and *G. F. Hull*. The application of radiation pressure to cometary theory. A.J.C. 17. 352.

Fixsterne.

1833. *F. Faccin*. Il periodo di Algol. R.F.M. 4B. 34.

Nebelflecke.

1834. *J. H. Jeans*. The stability of a spherical nebula. T.R.S.L. 199. 1.

Siehe auch 1315.

Kosmologie.

1835. *Lord Kelvin*. On ether and gravitational matter through infinite space. S.I. 1901. 215.

1836. *F. T. Trouton*. The results of an electrical experiment, involving the relative motion of the earth and ether, suggested by the late professor Fitzgerald. T.S.D. 7. 379.

1837. **S. Wellisch*. Der dynamische Mittelpunkt der Welt. D.W.B. 3. 273.

1838. *F. W. Very* Stellar revolutions within the galaxy. A.J.S. (4) 16. 127.

1839. *W. Kapteyn*. Sur un problème d'astronomie. A.M.T. (2) 8. 335.

1840. *O. J. Lodge*. Note on the probable occasional instability of all matter. N. 68. 128.

Siehe auch 864.

Kosmogonie.

1841. **E. Tornow*. Die Entstehung des Sonnensystems. D.W.B. 3. 69.

1842. **W. Foerster*. Der Zweifel an der Kosmogonie von Kant u. Laplace. M.V.A.P. 12. 7.

1843. **J. J. Landerer*. Le problème cosmogonique. B.S.A.F. 16. 270.

1844. **C. Braun*. Zur Rolle des Energiebegriffs in kosmogonischen Prozessen. S.L. 35. 91.

1845. *L. N. Vollei*. Application des lois générales de la formation des mondes à la génération spéciale du nôtre. J.S.M. 15. 83.

1846. **J. Mascart.* Contribution à l'origine des petites planètes. B. S. A. F. 16. 123.

Sphärische Astronomie.

1847. * *W. Foerster.* Elementare Darlegungen betreffend die astronomischen Orts- und Bewegungsbestimmungen. M. V. A. P. 12. 71; 89; 104.

1848. *F. Ristenpart.* Über Differentialreduktion von scheinbaren auf den mittlern Ort mit besonderer Berücksichtigung der Kometen- und Planetenbeobachtungen. A. N. K. 160. 273.

1849. **L. Courvoisier.* Über eine graphische Methode zur Bestimmung der Reduktion auf den scheinbaren Ort. V. A. G. 37. 207.

1850. *A. Beck.* Resultate von Höhen-Durchgangsbeobachtungen. A. N. K. 159. 133.

1851. *A. Wedemeyer.* Zur Höhenberechnung. A. H. 31. 211; 248; 363. — *O. Fulst* 244. — *H. Teege* 301.

1852. *S. Kublin.* Die Vergrößerung der Gestirne am Horizont. D. W. B. 3. 125.

1853. **A. Arendt.* Über die scheinbare Abflachung des Himmelsgewölbes und die Vergrößerung der Gestirne am Horizont. D. W. B. 2. 125; 143. — *L. Günther* 285.

1854. *Lagrula.* Sur les mesures d'appulse pendant les observations d'occultation. B. A. 20. 372.

Siehe auch 122; 216; 229; 1632; 1968.

Nautik.

1855. *E. Guyou.* Mesure des vitesses des navires à la mer. C. R. 136. 1170.

1856. **Preuss.* Die Merkatorssche Funktion in der terrestrischen Nautik. H. H. 39. 508; 521.

1857. **E. Cooke.* On a new and accurate method of determining time, latitude and azimuth with a theodolite. M. N. A. S. 63. 156.

1858. **A. Vital.* Über Höhentafeln. M. A. G. S. 30. 283.

Siehe auch 122; 1437.

Zeitbestimmung.

1859. **C. T. Whitmel.* Time by altitude. E. M. W. 74. 470.

1860. **E. Millosevich.* De la détermination du temps par des couples d'étoiles d'égale hauteur. R. M. M. P. 154. 1226.

1861. *F. Faccin.* Metodo grafico per la determinazione de tempo coll' Eliocronometro „Faccin". R. F. M. 4 B. 455.

Siehe auch 1367.

Gnomonik.

1862. **O. Weidefeld.* Sonnenuhren und ihre Mängel. M. V. A. P. 12. 13; 24.

1863. **Kobosev.* Solnečnye časy (Die polare Sonnenuhr). B. R. A. G. 9. 113.

1864. **C. V. Boys.* The horizontal sundial. E. M. W. 76. 231.

Ortsbestimmung.

1865. **A. Markuse.* Entwicklung der geographischen Ortsbestimmung. M. R. B. 12. 1307.

1866. **A. Marcuse.* Die neuere Entwicklung der geographischen Ortsbestimmungen. Z. G. E. 36. 255.

1867. **D. Mars.* Eenige beschouwingen over plaats- en tijdsbepaling. D. Z. R. 24. 12; 69.

1868. *H. Teege.* Über ein direktes Verfahren zur Berechnung des Höhenunterschiedes in Marcq St. Hilaires Standlinienmethode. A. H. 31. 153.

1869. **R. de Aquino.* Typos de calculo para o methodo de Marcq Saint Hilaire pela modifiacaçao de Dr. Otto Fulst de Hamburgo. R. M. B. 39. 721.

1870. *P. Heidke.* Graphische Darstellung der Koppeltafeln. A. H. 31. 144.

Siehe auch 1347—49.

Breitebestimmung.

1871. **J. Bone.* Latitude by double altitudes. E. M. W. 74. 556; 75. 33.

1872. **D. Mars.* Gebrauch der circummeridiaans-breedte bij de Sumner methode. Gewijzig de Sumner. D. Z. R. 24. 209; 528.

1873. *A. E. Arkenbout-Schokker.* De zeevartkundige beschouwingen van den heer D. Mars. D. Z. R. 24. 262.

1874. **M. Gračev.* Über das Verfahren des Herrn G. Bigourdan zur Breitebestimmung (russ.). S. M. Ka. (2) 9. 47.

Siehe auch 1357.

Längenbestimmung.

1875. * *W. Hall.* Longitude by equal altitudes near noon at sea. N. M. L. 71. 11 — *H. B. Goodwin* 116.

Chronologie.

1876. *M. Jacobi.* Aus der Sturm- und Drangperiode unseres Kalenders. Z. F. N. 75. 89.

1877. *A. J. von Breen.* Eenvoudige handleiding om te vinden op welken dag der week een datum der 20. ceuw valt. V. W. A. 18. 200..

1878. *C. R. Ornelas.* Explicacion del calandario cronológico para el siglo XX

y breves reglas de cronologia practica. M.y.R.M. 19. 5.

1879. *L. F. J. Gardès.* La date de Pâques. A.F. 1902. 94.

Niedere Geodäsie.

1880. * *O. Jacoangeli.* Teoria nuova e generale della divisione dei terreni e correzione dei confini per terre di eguale e diversa valenza. R.T.C. 15. 39; 49; 65; 89; 101; 119; 129; 145; 161; 180.

1881. * *Zimmermann.* Grundstücksteilung. A.V.N. 1902. 237; 255; 285; 301.

1882. * *Zimmermann.* Teilung des Vierecks aus einem gegebenen Punkte. A. V.N. 1902. 333; 343; 356; 373.

1883. * *Delitala.* Per la misura indiretta delle distanze con una stazione unica. Pol.M. 1902. 260.

1884. * *Delitala.* Determinazione di un punto al vertice di piramide e relativa compensazione. Pol.M. 1902. 449.

1885. * *G. Abate-Daga.* Sulla ricerca di un punto trigonometrico diverso. R. T.C. 15. 33.

1886. * *J. W. ten Braak.* Vastlegging van een trigonometrisch punt aan punten van een net van hoogere orde of aan reed bepaalde punten van het net von lagere orde. T.K.L. 18. 132.

1887. * *L. Krüger.* Über die Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen bei der trigonometrischen Punktbestimmung durch Einschneiden. Z.R.W.L. 22. 9; 153; 187; 241.

1888. * *E. Dolezal.* Über trigonometrische Punktbestimmung durch Einschneiden und Hansens Problem. B.H. J. 1902. 183.

1889. *A. Klingatsch.* Die Bestimmung des günstigsten Punktes für das Rückwärtseinschneiden. Z.S. 48. 473.

1890. *O. Eggert.* Über die günstigsten Punktlagen beim Einschneiden. Z.S. 49. 145.

1891. * *Heer.* Rückwärtseinschneiden mit graphischer Ausgleichung. M.W.G. 1902. 131.

1892. * *E. Hammer.* Zur Kreisbogenabsteckung. Z.R.W.L. 21. 219.

1893. * *H. H. Turner.* On a simple method of accurate surveying with an ordinary camera. M.N.A.S. 62. 126.

1894. * *W. Wojtan.* O pewnem zagadnieniu mierniczem (Über eine Aufgabe der Geodäsie). C.T.L.

1895. * *Harksen.* Über Verknotungen. A.V.N. 1902. 388.

Siehe auch 37; 38; 43; 1629; 1630; 1632—35; 1961—66; 2046—51; 2074; 2075; 2123.

Höhenmessung.

1896. *A. Sykora.* O barometrikém měřeni výšek (Über die barometrische Höhenmessung). C. 32. 83.

1897. *L. Maillard.* Sur la formule barométrique de Laplace. C.R. 136. 1427.

1898. * *J. Hann.* Bemerkungen über die Schwerekorrektion bei den barometrischen Höhenmessungen. P.G.M. 49. 163.

Siehe auch 1466; 1631; 1647; 1967.

Kartographie.

1899. * *K. Peucker.* Drei Thesen zum Ausbau der theoretischen Kartographie. G.Z. 1902. 65; 145; 204.

1400. * *B. Gustawicz.* Z teoryi rzutów kartograficznych (Beitrag zur Theorie der Kartenprojektionen). C.T.L. 20. 83.

1401. *A. Weiler.* Geometrisches über einige Abbildungen der Kugel in der Kartenentwurfslehre. Z.S. 49. 169.

1402. *J. D. Everett.* On a map that will solve problems in the use of the globes. N. 68. 294.

1403. * *Soler.* Linee isoperimetre; projezione geografica compensativa. A.A. P. (3) 6.

Siehe auch 1650; 1652.

Metrologie.

1404. * *W. Reichardt.* Die deutschen Maße und Gewichte einst und jetzt. N W. 17. 529.

Siehe auch 1597.

Höhere Geodäsie.

1405. * *M. C. Engell.* On bestemmelsen of Yordens form og störrelse. S.T.K. 16. 18.

1406. * *C. W. Wirtz.* Die Kimmtiefe auf der ellipsoidischen Erdfigur. M.R. B. 12. 837.

1407. * *Gori.* Latitudine di Palermo, ellissoide di Bessel. G.S.P. 23.

1408. * *A. Hansky.* Les travaux de l'expédition russo-suédoise pour la mesure d'un arc de méridien au Spitzberg. R. G.O. 13. 1117; 1165.

Geophysik.

1409. *O. Zanotti Bianco.* Contribuzione alla storia della densità media della terra. R.F.M. 4B 53.

1410. *M. P. Rudzki.* Über die Form der elastischen Welle in den Erdschichten (poln.) IV. C.A.C. 39. 143.

1411. *N. Ekholm.* Über Emission und Absorption der Wärme und deren Bedeutung für die Temperatur der Erdoberfläche. M.Z. 19. 489.

1412. *C. V. L. Charlier.* Contributions to the astronomical theory of on ice age. A.U.L. 37. No. 3.

1413. *L. Pilgrim.* Der Einfluß der Schwankungen der Schiefe der Ekliptik und der Exzentrizität der Erdbahn auf das Klima mit besonderer Berücksichtigung des Eiszeitproblems. M.B. (2) 5. 33.

1414. *C. Nordmann.* Sur la période diurne des aurores boréales. C.R. 136. 1431.

Schweremessungen.

1415. *F. R. Helmert.* Über die Reduktion der auf der physischen Erdoberfläche beobachteten Schweremessungen auf ein gemeinsames Niveau. S.A.B. 1903. 650.

1416. *E. Anding.* Über die Berechnung der topographischen Korrektion. A.N.K. 159. 65.

1417. *J. Collet.* La pesanteur le long du parallèle moyen. C.R. 135. 774; 956; A.U.G. 15. 27.

1418. *—. The variation of terrestrial gravity over the ocean. M.W.R. 30. 370.

1419. *K. R. Koch.* Relative Schweremessungen in Württemberg. J.V.N.S. 59. 1.

1420. *C. Aimonetti.* Determinazione di gravità relativa in Piemonte eseguite coll' apparato pendolare di Sternek. A.A.T. 38. 381.

1421. *H. Nagaoka, S. Shinjo* und *R. Otani.* Absolute Messung der Schwerkraft in Kyoto, Kanazawa, Tokyo und Mizusawa mit Reversionspendeln ausgeführt. J.U.T. 16. No. 11.

Siehe auch 1398; 1664.

Erdbeben.

1422. *M. Hamy.* Sur l'amortissement des trépidations du sol. Application au bain de mercure à couche épaisse. C.R. 136. 990.

1423. *E. Oddone.* Lo sparo di una grande mina occasione di esperimento sismico. R.I.L. 35. 492.

1424. *C. C. Farr.* On the interpretation of Milne seismograms. P.M. (6) 6. 401.

1425. **F. Omori.* On the deflection and vibration of railway bridges. P.E.I.C. No. 9.

Siehe auch 361; 1410; 1641; 1642.

Erdmagnetismus.

1426. *A. Schuster.* On some definite integrals and a new method of reducing a function of spherical coordinates to a series of spherical harmonics. P.R.S.L. 71. 97.

1427. **B. Weinstein.* Die Erde als Elektromagnet. H.E.B. 14. 145.

1428. **B. Weinstein.* Über die elektromotorischen Kräfte der Erde und über Kräfte überhaupt. H.E.B. 14. 256.

1429. **P. T. Passalsky.* Über die Variationen der Elemente des Erdmagnetismus in den anormalen Gegenden (russ.). M.S.O. 20. XL.

1430. **P. T. Passalski.* Über den Verteilungszustand des Magnetismus auf der Oberfläche der Erde (russ.). M.S.O. 85. 1.

1431. *W Watson.* A determination of the value of the earth's magnetic field in international units and a comparison of the results with the values given by the Kew observatory standard instruments. T.RS.L. 198. 431.

1432. *C. Nordmann.* Sur les propriétés magnétiques de l'athmosphère terrestre. C.R. 136. 960.

1433. **C. Nordmann.* Über die magnetischen Eigenschaften der Erdatmosphäre. N.R. 18. 370.

1434. **T. Arendt.* Erdmagnetische Pulsationen. N.R. 18. 105; 117.

1435. **P. T. Passalsky.* Über die Änderung der erdmagnetischen Kraft mit der Höhe. M.S.O. 20. LVII.

1436. **H. Meldau.* Abriß einer Geschichte der Kompaßdeviation. M.R.B. 12. 68.

1437. **E. Rottok.* Einfluß der Fahrt des Schiffes auf die Deviation des Kompasses. M.R.B. 12. 949.

Siehe auch 2043; 2044.

Ebbe und Flut.

1438. *Baum.* Über Ebbe und Flut. N.O. 48. 110.

1439. *H. Poincaré.* Sur un théorème général relatif aux marées. B.A. 20. 215.

1440. *C. Börgen.* Ableitung der harmonischen Konstanten der Gezeiten. A.H. 31. 441.

1441. *Lord Rayleigh.* Note on the theory of the fortnightly time. P.M. (6) 5. 136.

1442. *Rollet de l'Isle.* Calcul de l'heure et de la hauteur d'une pleine mer au moyen des constantes harmoniques. C.R. 136. 992.

Siehe auch 1983.

Mathematische Meteorologie.

1443. *L. de Marchi.* Note di meteorologia matematica. R.I.L. (2) 35. 354.

1444. *F. H. Bigelow.* Application of mathematics in meteorology. B.S.W. 14. 215.



1445. *C. Masch.* Intensität und atmosphärische Absorption aktinischer Sonnenstrahlen. S.V.K. 12. 267.

1446. **Bemporad.* Integrale della estinzione atmosferica. M.S.S.I. 31—32.

1447. **Bemporad.* Estinzione atmosferica. M.S.S.I. 32. No. 4.

1448. ** V. E. Boccara.* La Fata Morgana, étude historique et scientifique. B.S.B.A. 8. 143.

1449. **L. Steiner.* Das Prinzip der Flächengeschwindigkeit in der Meteorologie (ung.). M.P.L. 10. 282.

1450. *L.• Steiner.* Zum Flächensatz. M.Z. 19. 562.

1451. *M. Margules.* Über den Arbeitswert einer Luftdruckverteilung und über die Erhaltung der Druckunterschiede. D.A.W. 73. 329.

1452. *J. Sandström.* Über die Beziehung von Luftbewegung und Druck in der Atmosphäre unter stationären Verhältnissen. B.V.A.S. 59. 87.

1453. *F. Exner.* Versuch einer Berechnung der Luftdruckänderungen von einem Tag zum nächsten. D.V.N. 74. 109; S.A.W. 111. 707.

1454. **M. Hildebrandson.* La circulation générale de l'atmosphère A.S.M.F. 51. 119.

1455. **R. D. C. Ward.* General circulation of the atmosphere. S. 17. 436; 752.

1456. *L. G. Danilov.* Aktionszentra der Atmosphäre und Regelmäßigkeit der klimatischen Anomalien (russ). M.S.O. 86. 1; 87. 289.

1457. *M. Exner.* Zur Theorie der vertikalen Luftströmungen. S.A.W. 112. 345.

1458. **Thévenet.* Recherches de thermodynamique sur la distribution des éléments météorologiques à l'intérieur des masses d'air en mouvement. A.S.U.F. 31. 59.

1459. *W. Köppen.* Mechanische Erzeugung vertikaler und radialer Bewegungen in einem Wirbel mit vertikaler Axe. A.H. 31. 10.

1460. *F. H. Bigelow.* The mechanism of counter-currents of different temperatures in cyclones and anticyclones. M.W.R. 31. 72.

1461. *M. Toepler.* Über Beobachtungen von kurz dauernden Luftdruckschwankungen (Windwogen). A.P.L. (4) 12. 787.

Siehe auch 58—60; 476; 487; 736; 830; 833; 897; 950; 954; 1609; 1628; 1636; 1640.

Refraktion.

1462. **Boccara.* Rifrazione atmosferica. M.S.S.I. 31.

1463. **Bemporad.* Teoria di rifrazione di Bessel. M.S.S.I. 31 No. 12.

1464. *H. Kobold.* Allgemeine Hilfsgrößen zur Berechnung der Refraktion bei Mikrometerbeobachtungen. A.N.K. 163. 201.

1465. *A. Lorenzen.* Neue Beispiele theoretischer Refraktion. P. 14. 137.

1466. **W. Harkness.* Terrestrial refraction and the trigonometrical measurement of the heights. A.J.B. 22. 175.

1467. *H. Seeliger.* Über den Einfluß der Dispersion der Luft auf die Bestimmung kleiner Fixsternparallachsen. A.N.K. 159. 33.

1468. *A. Neander.* Om Korrektionerna för refraktion vid uppmätning af stellarfotografiska plåtar. A.V.A.S. 28. No. 3.

Lufttemperatur.

1469. **S. P. Langley.* The solar constant and related problems. A.J.C. 17. 89.

Siehe auch 1637; 1638.

Wind.

Siehe 1639.

Wolken.

1470. *—. Horizontal curvilinear mouvement of clouds. M.W.T. 30. 31.

1471. **L. Besson.* The vertical component of the mouvement of clouds measured by the nephoscope. M.W.R. 31. 22.

Siehe auch 60; 230.

Luftelektrizität.

1472. **A. B. Chauveau.* Historique des théories, relatives à l'origine de l'électricité athmosphérique. C.T.B. 24. 1; 59.

1473. *E. Riecke.* Beiträge zu der Lehre von der Luftelektrizität. A.P.L. (4) 12. 52; N.G.G. 1903. 32.

1474. *Y. Homma.* The distribution of electricity in the atmosphere. R.S.T. 8. 45.

1475. **S. Lemström.* Über die elektrischen Ströme der Luft (russ.) J.R.P.C.G. 34. 307.

1476. *G. B. Rizzo.* Contributo allo studio della dispersione elettrica nell' atmosfera A.A.T. 38. 859.

Siehe auch 1111—13.

Kosmische Meteorologie.

1477. *A. Angot.* Sur les variations simultanées des taches solaires et des températures terrestres. C.R. 136. 1245.

1478. *R. Merecki.* Wplyw zmiennej dzia laności słońca na nicokresowe ruchy

atmosfery ziemskiej (Der Einfluß der veränderlichen Sonnentätigkeit auf die unperiodischen Bewegungen der Erdatmosphäre). T.W. 14. 219.

Mathematische Chemie.

1479. *P. v. Schröder.* Moderne chemische Anschauungen. III. Das Gesetz der chemischen Massenwirkung. A.H.S. 16. 98; 146.

1480. *E. J. Mills.* On the numerics of the elements. P.M. (6) 5. 543.

1481. *A. Bouzat.* Courbes de sublimation. C.R. 137. 175.

1482. *H. Euler.* Zur Theorie der chemischen Reaktionsgeschwindigkeiten. B.V.A.S. 59. 57.

1483. *N. Schilow.* Studien über Koppelung chemischer Vorgänge. Z.P.C. 42. 641.

1484. *Ariès.* Sur les lois et les équations de l'équilibre chimique. C.R. 137. 253.

1485. *V. H. Veley.* Initial acceleration in chemical change. P.M. (6) 6. 271.

1486. *Jouguet.* Sur la rupture et le déplacement de l'équilibre. C.R. 135. 778.

1487. *E. Warburg.* Spontane Desozonisierung. A.P.L. 9. 1286.

1488. *C. Kullgren.* Studien über die Inversion II. B.V.A.S. 59. 317.

1489. *V. Grazioli.* Composizione dei gas della combustione di un forno e loro rapporti nei differenti casi. R.F.M. 4. A. 454.

1490. *O. Hahn.* Das Gleichgewicht $CO_2 + H_2 = CO + HO$. Z.P.C. 42. 705.

1491. *G. Senter.* Das Wasserstoffsuperoxydzersetzende Enzym des Blutes I. Z.P.C. 44. 257.

1492. *H. Kühl.* Beiträge zur Kinetik des Kohlenoxydknallgases. Z.P.C. 44. 385.

1493. *A. Smits* u. *L. K. Wolff.* Über die Zersetzungsgeschwindigkeit des Kohlenoxyds. Z.P.C. 45. 199.

1494. *R. Hollmann.* Physikalisches und natürliches Gleichgewicht zwischen den Modifikationen des Acetaldehyds. Z.P.C. 43. 129.

1495. *S. Bugarszky.* Über die Geschwindigkeit der Einwirkung von Brom auf Äthylalkohol. Z.P.C. 42. 545.

1496. *G. Scobai.* Über die Zersetzung des Kaliumchlorats nebst einigen Beobachtungen über die Zersetzung des Natriumchlorats und des Natriumperchlorats. Z.P.C. 44. 319.

1497. *M. S. Sherill.* Über die Komplexbildung und einige physikochemische Konstanten der Quecksilberhaloide. Z.P.C. 43. 705.

1498. *W. Müller.* Über die Zersetzungsgeschwindigkeit der Brombernsteinsäure in wässriger Lösung. B.G.F. 13. 1.

1499. *H. Euler.* Über die Reaktion zwischen Aminen und salpetriger Säure. B.V.A.S. 59. 111.

1500. *A. Wogrinz.* Über die Hydrolyse der Trisaccharide durch verdünnte Säuren. Z.P.C. 44. 571.

1501. *C. S. Hudson.* Über die Multirotation des Milchzuckers. Z.P.C. 44. 487.

1502. *V. Henri.* Théorie générale de l'action de quelques diastases. C.R. 135. 916.

Siehe auch 174; 439; 539; 647; 773; 923; 1666; 1667.

Phasenlehre.

1503. **J. H. van't Hoff.* Die Phasenlehre. C.B. 35. 4252.

1504. *J. H. van't Hoff.* Über die Phasenlehre. Z.E. 8. 943.

1505. *R. Wegscheider.* Zur Kenntnis der Phasenregel. Z.P.C. 43. 93. — W. Nernst. 113.

1506. **A. Bolis.* Della regola delle fasi e sua importanza pratica nella chimica. I.C. 5. 37.

1507. *H. W. Bakhuis Roozeboom.* Une répresentation dans l'espace des domaines des phases et de leurs complexes dans les systèmes binaires où seules les deux composantes pures existent à l'état de phase solide. A.N. (2) 8. 92.

1508. *F. A. H. Schreinemakers.* Tensions des vapeurs de mélanges ternaires. A.N. (2) 8. 1.

1509. *J. D. van der Waals.* Ternaire stelsels. C.A.A. 11. 224; 270.

1510. *J. D. van der Waals.* Over de voorwaarden voor het bestaan eener minimum kritische temperatuur bij eene ternaire stelsel. C.A.A. 11. 285.

1511. *J. D. van der Waals.* Sur les conditions d'existence d'un minimum de température critique chez un système ternaire. A.N. (2) 8. 69.

1512. *A. Bourat.* Courbes de pressions des systèmes univariants qui comprennent une phase gazeuse. C.R. 137. 322.

Siehe auch 939—41; 1533.

Photochemie.

1513. **G. Ciamician* e *P. Silber.* Azioni chimiche della luce R.I.B. (2) 4. 107; 145; G.C.I. 32. 535.

1514. *M. Wildermann.* Über chemische Dynamik und Statik unter dem Einfluß des Lichts. Z.P.C. 42. 257.

Thermochemie.

1515. *J. Thomsen*, F. W. Clarke's „neues thermochemisches Gesetz". Z.P.C. 43. 487.

1516. **T. W. Richards*. Note concerning the calculation of thermochemical resultats. J.A.C.S. 25. 209.

1517. **F. W. Clarke*. A thermochemical constant. J.A.C.S. 24. 882.

1518. *T. W. Richards*. The relation of changing heat capacity to change of free energy, heat of reaction change of volume and chemical affinity. P.A. Bo. 38. 291.

1519. *C. Kullgren*. Die Änderung der Inversionsgeschwindigkeit mit der Temperatur. Z.P.C. 42. 701.

1520. *W. G. Mixter*. On the heat of combustion of hydrogen. A.J.S. (4) 16. 214.

1521. *A. Bouzat*. Courbes de dissociation. C.R. 136. 1395.

Elektrochemie.

1522. *L. Kahlenberg*. Current electrochemical theories. T.A.E.S. 1. 119.

1523. **W. Nernst*. Über elektrochemische Maßeinheiten. Z.E. 9. 685.

1524. **F. Garelli*. Le applicazioni dell' elettrochimica. A.U.F. 1901—1902.

1525. **W. D. Bancroft*. Chemical potential and electromotive forces. J.P.C. 7. 416.

1526. **W. M. A. Johnson*. Elektrochemical oscillation. E.M.W. 40. 946.

1527. *Berthelot*. Une loi relative aux forces électromotrices des piles fondées sur l'action réciproque des dissolutions salines et électrolytes solubles. C.R. 136. 413.

1528. **P. Silov*. Über den Mechanismus der Voltaschen Säule. J.R.P.C.G. 35. 163.

1529. *U. Grassi*. Zur Theorie des Reststroms. Z.P.C. 44. 460.

1530. **T. Gross*. Über molekulare Induktion. V.P.G. 5. 39.

1531. **C. Hering*. Electrolytic conduction without electrodes. T.A.I.E.E. 19. 819; 827.

1532. *J. J. von Laar*. Sur la différence de potentiel qui se produit à la surface de séparation de 2 dissolvantes non-mixibles entre lesquels se partage un même électrolyte dissous A.N. 8. 226.

1533. *W. Reinders*. Die Phasenlehre und der Potentialsprung zwischen einer Elektrode, welche aus 2 Metallen besteht und einem Elektrolyt, welcher die Salze dieser Metalle enthält. Z.P.C. 42. 225.

1534. **J. Icart*. L'accumulateur et l'électrochimie. L.E.P. 25. 154.

1535. *K. Schaum*. Über die Formeln für Oxydationselektroden und Oxydationsketten. S.G.M. 1902. 2.

1536. *R. Russ*. Über Reaktionsbeschleunigungen und -hemmungen bei elektrischen Reduktionen und Oxydationen. Z.P.C. 44. 641.

1537. *J. J. van Laar*. Sur les propriétés électromotrices d'amalgames et d'alliages. A.N. (2) 8. 296.

Elektrolyse.

1538. **R. Mewes*. Die Rolle des Kohäsionsdruckes des Dopplerschen und des Weberschen Grundgesetzes in der Theorie der Elektrolyse. E.C.Z. 10. 137.

1539. *N. Vasilesco-Karpen*. Sur l'entraînement de la charge dans les expériences de convection électrique. C.R. 136. 998.

Siehe auch 1115; 1121.

Mathematische Physiologie.

1540. *J. L. Hoorweg*. Note sur l'excitation électrique des nerfs. A.M.T. 8. 289.

Mathematische Biologie.

1541. *A. Gallardo*. Les mathématiques et la biologie. C.I.M. 2. 395.

Siehe auch 50.

Mathematische Zoologie.

1542. *J. D. Everett*. On the mathematics of bees' cell. P.M. (6) 6. 228.

Mathematische Botanik.

1543. *P. Vogler*. Variationskurven von Pflanzen mit tetrameren Blüten. V.N.Z. 47. 429.

1544. *J. Wiessner*. Über die Beziehungen der Stellung der Laubblätter zur Beleuchtung. D.V.N. 74. 145.

Technik.

Siehe 1.

Technische Mechanik.

1545. **L. Lecornu*. Revue annuelle de mécanique appliquée. R.G.O. 14. 387.

Siehe auch 372; 381; 382; 1671; 1672.

Stäbe.

Siehe 1746; 1747; 1932.



Träger.

1546. **J. Ramisch.* Ableitung einer neuen Beziehung zur Bestimmung des Maximalmomentes für einen Querschnitt eines von beweglichen und zusammenhängenden Einzellasten beanspruchten Trägers. Z.A.W. 48. 179.

1547. *A. Francke.* Kontinuierliche Parabelträger. Z.S. 48. 377.

1548. *E. Ovazza.* Metodo grafico di calcolo degli alberi a gomito con più de 2 appoggi. A.A.T. 38. 751.

1549. *F. Stark.* Über die Stützlinie des Zweigelenkbogens. D.V.N. 74. 43.

1550. **E. Patton.* Beitrag zur Berechnung der Nebenspannungen infolge starrer Knotenverbindungen bei Brückenträgern. Z.A.W. 48. 417.

Siehe auch 1673; 1750; 1751; 1937—40; 2088—94.

Balken.

1551. *F. Villareal.* Flexión de las vigas. R.C.L. 6. 190.

1552. **G. Ramisch.* Zeichnung der Einflußlinien für die Gegendrücke der äußersten Stützen eines geraden kontinuierlichen Balkens mit veränderlichem Querschnitt und mit 3 gleichhohen Stützpunkten. Z A.W. 48. 537.

Siehe auch 565; 566; 1748; 1749; 1933; 1934; 1936; 2086; 2087.

Bogen.

Siehe 1752—54; 1941; 2095—97.

Fachwerk.

1553. *A. Hasch.* Zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Z.S. 49. 1.

Siehe auch 2098—2103.

Gewölbe.

1554. *A. F. Jorini.* Calcolo della stabilità delle voltine. R.I.L. 36. 357.

1555. *H. Hacker.* Über Drucklinien in scheitelrechtem Gewölbe ohne Zugspannung. B.I.Z. 2. 83.

1556. *B. A. Smith.* Circular arches. R.A.A. 8. 351.

1557. **F. Kretschmar.* Festigkeit von Wellentunneln. S.B. 4. 49; 116; 161.

Siehe auch 1935; 1943; 1944; 2104—06.

Erddruck.

1558. *F. Kötter.* Die Bestimmung des Drucks an gekrümmten Gleitflächen, eine Aufgabe aus der Lehre vom Erddruck. S.M.B. 1903. 229.

1559. *I. Vandone.* Sulle fondazioni tubulari trivellate. R.F.M. 4B. 393.

Siehe auch 307; 1913.

Maschinenlehre.

1560. *K. Schreber.* Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. D.V.N. 74. 45.

1561. *W. Schmidt.* Zur Geschichte des Dampfkessels im Altertume. B.M. (3) 3. 337.

1562. *A. Achenbach.* Die Theorie des Massenausgleichs in ihrer Anwendung auf Radschiffsmaschinen. S.B. 4. 619.

1563. *A. Krebs.* Sur un carburateur automatique pour moteurs à explosions. C.R. 135. 894.

Siehe auch 287; 383; 613—16; 908; 1197; 1676—87; 1714—16; 1731—35; 1763; 1764; 1827; 1829—48; 1882; 1958; 1976; 2139—48.

Brückenbau.

1564. **E. Buchholtz.* Über die Untersuchung der Quersteifigkeit oben offener eisener Tragbrücken. Z.A.W. 48. 299.

1565. *H. Müller-Breslau.* Zur Theorie der Windverbände eiserner Brücken. S.A.B. 1903. 948.

Siehe auch 1425; 1767; 1768; 1952—54; 2005; 2116—20.

Straßenbau.

Siehe 2024.

Eisenbahnwesen.

1566. **Quimby.* A railway curve projector. E.N. 47. 500.

1567. **Howe.* A problem in railway curves. R.G. 1902. 477.

1568. **F. Schulze.* Über das Stationieren von Kreiskrümmungen in einer Eisenbahn- oder Wegtrace. A.V.N. 1902. 277.

1569. **Ovazza.* Scorrimento longitudinale delle rotaje. Pol. M. 1901. Dez.; 1902. Jan. Febr.

1570. *H. Ladame.* Funiculaires à contrepoids d'eau et régulateur de la vitesse centrifuge. B.S.N. 27. 69.

Siehe auch 1849—55; 1951; 1975; 2127; 2149; 2150.

Telegraphie.

1571. *J. B. Baker.* Some problems in space telegraphy. E.R. 42. 680.

Siehe auch 1034; 1035; 1084; 1085; 1861—73.

Hydraulik.

1572. *C. H. Tutton.* A proposed solution of some hydraulic problems. P.A.S.C.E. 27. 288.

1573. **E. Fontaneau.* Préliminaires d'hydraulique. A.F. 1902. 45.

1574. **J. Hermanek.* Theorie des freien Ausflusses von Flüssigkeiten aus Mündungen und an Überfällen. A.A.W. 1903. 109.

1575. *E. Fournier* et *A. Magrin.* Sur la vitesse d'écoulement des eaux souterraines. C.R. 136. 919.

1576. **A. Jöhrens.* Über Bewegung des Wassers in Kanälen. Z.A.W. 48. 257.

1577. **F. H. Haase.* Berechnung von Dampfrohrleitungen. Z.L.H. 8. 157 etc.

1578. *H. Hess.* Die Fortschritte im Turbinenbau. M.L. 39. 480; 503; 519.

1579. *W. L. R. Emmett.* The Curtis steam turbines. P.P.S. 42. 68.

1580. *M. Schmidt.* Untersuchungen über die Umlaufbewegung hydrometrischer Flügel. S.A.M. 1903. 237.

1581. *J. Boussinesq.* Sur le débit, en temps de sécheresse, d'une source alimcutée par une nappe d'eaux d'infiltration. C.R. 136. 1511.

Siehe auch 208; 451; 1646, 1719: 1720; 1978—2008.

Schiffsbau.

1582. **H. Chaigneau.* Architecture navale. R.S. 18. 257.

1583. *G. Wilson* and *A. T. Weston.* A factor in the safety of high speed torpedoboat destroyers. S.P.M. 47. No. 13.

1584. *M. H. Baur.* Graphische Ermittelung der Stabilität des Schiffes. S.B. 2. 658. 705. 740.

Siehe auch 101; 129; 314; 617; 1947.

Schiffsbewegung.

Siehe 1717; 2008.

Luftschiffahrt.

1585. *F. Poske.* Ein Lehrgang der Aërostatik. Z.P. 15. 321.

1586. **G. H. Bryan.* The longitudinal stability of aërial gliders. R.B.A. 72. 524.

Siehe auch 1653—57.

Photographie.

1587. *G. Jaeger.* Zur Theorie des photographischen Prozesses. S.A.W. 111. 1132.

Siehe auch 221; 487; 749; 836.

Elektrotechnik.

1588. *G. W. Walker.* On the theory of the quadrant electrometer. P.M. (6)6. 238.

1589. *Iliovici.* Essais sur la commutation dans les dynamos à courant continu. C.R. 137. 179.

1590. *Berthelot.* Relations entre les piles à plusieurs liquides. C.R. 137. 285.

1591. *F. Emde.* Der Charakter der Betriebskurven eines Gleichstrommotors mit Nebenschlußerregung. A.G. (3) 5. 123.

1592. *L. Finzi.* Untersuchung über das Selbsterregen der dynamoelektrischen Maschinen. P.Z. 4. 241.

1593. *B. Hopkinson.* The "hunting" of alternating current machines. P.R.S.L. 72. 235.

1594. *A. Dina.* Sul fattore di potenza dei motori trifasi nel caso di curve deformate. R.I.L. 35. 951.

Siehe auch 1036; 1197; 1199; 1689—91; 1709—11; 1730; 1798—1810; 1818—1912; 1976.

Technologie.

1595. *G. Cesaro* et *P. Bussy.* Exposé élémentaire des principes de saccharimétrie optique. M.S.L. 3 No. 4.

Agrikulturchemie.

1596. *Louise* et *Riquier.* Sur le calcul de l'écrémage et du mouillage dans les analyses du lait. C.R. 136. 122.

Instrumentenkunde.

1597. *G. Guglielmo.* Intorno a due modi per determinare il raggio di curvatura della superficie dello spigolo nei coltelli delle bilancie e dei pendoli. R.A.L.R. 11. B. 263.

1598. *V. Legros.* Focimètre photogrammétrique par l'optique microscopique. C.R. 137. 314.

1599. *G. Guglielmo.* Intorno alla determinazione della densità e della massa di quantità minime di un solido. R.A.L.R. 12. A. 310.

1600. *Gaiffe* et *Gunther.* Dynamomètre de transmission donnant directement la puissance en kilogrammètres. C.R. 136. 1058.

1601. *U. Landi.* Nuovo apparato per dimostrare che i corpi tanto gravi quanto leggieri hanno la stessa rapidità di caduta astrazione fatta della resistenza dell' aria. R.F.M. 3. 1017.

1602. *A. E. H. Tutton.* The Elasmometer, a new interferential forme of elasticity apparatus. P.R.S.L. 72. 193.

1603. *S. D. Chalmers.* The theory of symmetrical optical objectives. P.R.S.L. 72. 267.

1604. **J. D. Everett.* Contributions to the theory of the resolving power of objectives. P.P.S.L. 18. 225.

1605. *L. Courvoisier.* Über ein neues Beobachtungsverfahren mit dem Registriermikroskop. A.N.K. 159. 17.

1606. *B. Bourdon.* Un pseudoscope à lentilles. T.S.U.R. 1. 157.

1607. *M. Tauber.* O novejších proekcionnych apparatach i mikrofotografii (Über neuere Projektionsapparate und Mikrophotographie). M.P.O. 30. 73.

1608. *E. Gehrcke.* Über neuere Fortschritte in der Konstruktion stark auflösender Spektralapparate. A.Gr. (3) 5. 216.

1609. *G. Guglielmo.* Intorno ad un nuovo apparecchio per la determinazione dell' equivalente meccanico della caloria ed ad alcune modificazioni del calorimetro solare, del dilatometro, del termometro e del psicrometro. R.A.L.R. 12. A. 204.

1610. *P. Boley.* Sur un manomètre très précis. Sur un microscope micrométrique très puissant. T.S.U.R. 1. 339.

1611. *C. Marie* et *R. Marquis.* Sur un thermostat à chauffage et régulation électriques. C.R. 136. 614.

1612. **H. L. Callendar.* On the thermodynamical correction of the gas thermometer. P.P.S.L. 18. 282.

1613. *C. T. R. Wilson.* On a sensitive gold-leaf electrometer. P C.P.S. 12. 135.

1614. *P. Boley.* Sur de nouveaux électromètres capillaires. T.S.U.R. 1. 277.

1615. *J. Carpentier.* Sur un galvanomètre enregistreur et un contact tournant et sur leur emploi au tracé des courbes de courant alternatif. C.R. 136. 965.

1616. *V. Buscemi.* Perfezionamente dell' accumulatore Gandini. B.G.C. 76. 37.

1617. **Hurmuzescu.* Sur les cohéreurs. A.S.U.J. 2. 141.

1618. *P. Schulze.* Die Skalenwertbestimmung am Unifilarmagnetometer. A. P.L. (4) 12. 893.

1619. *G. F. C. Searle.* Notes on a vibration magnetometer and on the ball-ended magnets of Robison. P.C.P.S. 12. 27.

1620. *H. v. Hasenkamp.* Kompaßregulierung durch Schwingungszeiten. A.H. 31. 402.

1621. **Lippmann.* Méthode pour la mise au point des lunettes et des collimateurs. S.F.P. 1902. 3.

1622. *G. Lippmann.* Sur la mise au foyer d'un collimateur ou d'une lunette au moyen de la mesure d'une parallaxe, S.B.P. 1902. 16.

1623. **G. Bonaccorsi.* Espressione matematica della distanza orizzontale nei diastimometri quando la visuale è inclinata et la mira non verticale. R.T.C. 15. 177.

1624. *R. Berget.* Sur un nouveau appareil permettant de rendre horizontal l'axe optique d'une lunette. C.R. 136. 883.

1625. *L. Weinek.* Zur Theorie der Spiegelkonstanten. S.A.W. 111. 1319.

1626. *G. Lippmann.* Méthode pour vérifier si une glissière ou une règle sont rectilignes. S.F.P. 1902. 18.

1627. *P. J. Heawood.* General theory of verniers. M.G.S. 2. 221; 237.

1628. *H. T. Bovey.* A new extensometer. P.T.R.S.C. 7. C. 3.

1629. *E. Palacio.* Nuevos aparatos para medir distancias. A.S.A. 55. 221.

1630. *A. Wendler.* Bemerkung zum Gebrauch des Ohmannschen Feldwinkelmessers. U.M.N. 8. 138.

1631. *A. Schell.* Das Präzisionsnivellierinstrument. S.A.W. 112. 261.

1632. *J. S. Corti.* Distancias cenitales. Su medición por el teodolito. A.S.A. 55. 10.

1633. *H. Grubb.* Some new forms of geodetical instruments. T.S.D. 7. 385.

1634. *W. Schmidt.* Über die Gestalt der Groma der römischen Feldmesser. B.M. (3) 4. 234.

1635. *M. d'Ocagne.* Théorie géométrique du niveau à bulle appliqué à la rectification des axes verticaux. B.A. 20. 51.

1636. *U. Behn* u. *F. Kiebitz.* Über ein kurzes Glyzerinbarometer. P.Z. 4. 543.

1637. *B. Sresnewsky.* Geschützte Rotationsthermometer. S.N.J. 13. 1.

1638. *G. v. Niessl.* Frostwehrthermometer und Gewitterthermometer. V.G. B. 41.

1639. *W. Kuznecov.* Samopišuščij pribor dlja opredelenija davlenija vetra, prisposoblennyj dlja podnjatija na zmejach (Ein Apparat zur Registrierung der Windgeschwindigkeit, bei Drachen gebräuchlich). A.P.B. 16. 81.

1640. *J. Pircher.* Über die Haarhygrometer. D.A.W. 73. 267.

1641. *T. Tamaru.* Ein neues Prinzip des Vertikalseismometers. P.Z. 4. 637.

1642. *E. Wiechert.* Theorie der automatischen Seismographen. A.G.G. (2) 2. No. 1.

1643. —. Novye apparaty Olševskago dlja oživenija gasov (Neue Apparate Olševskys für die Verbrennung der Gase). M.P.O. 29. 229.

1644. *F. Faccin.* Il eliocronometro „Faccin". R.F.M. 4 B. 376.

1645. *Andrade.* Sur les conditions de la synchronisation. C.R. 137. 243.

1646. *L. Ribourt.* Hydrotachymètre pour regulateur de turbines hydrauliques. C.R. 136. 495.

1647. *W. Schmidt.* Nivellierinstrument und Tunnelbau im Altertum. B.M.(3) 4. 7.

1648. **J. Andrade.* L'effet d'inertie du spiral cylindrique Phillips. A.S.G. (4) 14. 342.

Siehe auch 5; 33; 34; 149; 157; 237; 243; 398; 553; 589; 665; 743; 746; 780; 786; 831; 844; 862; 881—83; 973; 994; 998; 999; 1051; 1052; 1072; 1073; 1076; 1078; 1159: 1160; 1258; 1361; 1422; 1436; 1471; 1527; 1528; 1534; 1588; 1590; 1796; 1797; 1825—27; 1887; 1891—93; 1895; 1896; 1898; 1899; 1901; 1902; 1904; 2018; 2033; 2046—51; 2058—63.

Verzeichnis von Abhandlungen aus der angewandten Mathematik, die im Jahre 1902 in technischen Zeitschriften erschienen sind.

Von Ernst Wölffing in Stuttgart.

Abkürzungen:

A.D.M.P. Annales des Mines, Paris (10) 1.
A.E.R.J. American Engineer and Railroad Journal, New York 76.
A.G.B. Annalen für Gewerbe und Bauwesen, Berlin 50.
Am.M. American Machinist, New York 1902.
A.P.Ch. Annales des Ponts et Chaussées, Paris 72.
B.M.K. Baumaterialienkunde, Stuttgart 7.
B.S.E. Bulletin de la Société d' l'Encouragement pour l'Industrie Nationale, Paris 102—103.
C.B.B. Zentralblatt der Bauverwaltung, Berlin 22.
C.Z.O.M. Zentralzeitung für Optik und Mechanik, 23.
D.B.Z. Deutsche Bauzeitung, Berlin 36.
D.M.Z. Deutsche Mechanikerzeitung, Berlin 1902.
E. Engineer, London 93—94.
E.E. L'éclairage électrique, Paris 29—32.
Eg. Engineering, London 73—74.
E.W. The Electrical World, New York 39—40.
E.Z. Elektrotechnische Ztschr., Berlin 23.
G.C. Le Génie Civil, Paris 40; 42.
G.I. Gesundheitsingenieur, München 25.
J.G. Journal des Géomètres, Paris 55.
J.G.W. Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung, Leipzig 45.
L.C.M. La Construction moderne, Paris 17.
M.I.C. Mémoires et Comptes Rendus des Travaux de la Société des Ingénieurs Civils, Paris 55.
M.P.I.C.E. Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers, London 149—150.
N.A.C. Nouvelles Annales de la Construction, Paris (3) 8—9.
O.F.E. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Wiesbaden (2) 38 bis 39.
P.E.M. Portefeuille Économique des Machines, Paris (5) 1.
P.J. Polytechnisches Journal, 317.
P.M.C. Der praktische Maschinenkonstrukteur, Leipzig 35.
S.B.Z. Schweizerische Bauzeitung, Zürich 39—40.
T.E. The Electrician, London 48—49.
V.V.G. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, Berlin 81.
W.A.B.Z. Wiener allgemeine Bauzeitung, Wien 67.
Z.A.I. Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, Hannover (2) 7.
Z.B.W. Zeitschr. für Bauwesen, Berlin 52.
Z.E.W. Zeitschrift für Elektrotechnik, Wien 20.
Z.G. Ztschr. für Gewässerkunde, Leipzig 4.
Z.G.K. Zeitschrift für die gesamte Kälteindustrie, München 9.
Z.I. Zeitschrift für Instrumentenkunde, Berlin 22.
Z.Ö.I.A.V. Ztschr. des österreich. Ingenieur- und Architekten-Vereins, Wien 54.
Z.V. Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 31.
Z.V.D.I. Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure, Berlin 46.

Abbildung.

1649. *Kube.* Drawing the isometric circle. Am. M. 1902. 444.

1650. *J. Hervieu.* Note sur la disposition pratique et rationelle des onglets et soufflets dans l'établissement ou le report des plans. N. A. C. (3) 9. 54.

1651. *C. Pulfrich.* Über neuere Anwendungen der Stereoskopie und über einen hierfür bestimmten Stereokomparator. Z. I. 22. 65; 133; 178; 229.

1652. *A. Galle.* Die Entfernungsreduktion bei der konformen Abbildung der Kugel auf die Ebene in rechtwinkligen Koordinaten. Z. V. 31. 108.

Aerodynamik.

1653. *G. Wellner.* Über die Frage der Luftschiffahrt. Z. Ö. I. A. 54. 337.

1654. *R. Soreau.* Sur le navigation aérienne. M. I. C. 55 I. 687 II. 507.

1655. *R. Bliss.* Travel in air. E. 93. 171.

1656. *M. Deprez.* Calculs et théorèmes relatifs à l'hélice propulsive des aérostats. M. I. C. 55 I. 40. — *Brebet* 208.

1656a. *S. Espitallier.* Les progrès de l'aéronautique. G. C. 40. 289 309; 329.

1657. *Richter.* Über ein neues bei Rohrbruch selbsttätig absperrendes Dampfventil. Z. V. D. I. 46. 99.

1658. *W. Cox.* The flow of natural gas in pipes. Am. M. 1902. 401.

1659. *J. Isaachsen.* Das Verhalten der Schornsteingase nach dem Verlassen des Schornsteins. V. V. G. 81. 171; 275.

1660. *P. Forchhammer.* Berechnung von Behältern auf Winddruck. Z. Ö. I. A. V. 54. 343.

1661. *Rateau.* Expériences et théorie sur le tube de Pitot et sur le moulinet de Woltmann. A. D. M. P. (10) 2. 74.

1662. *W. Eisele.* Über Gasversorgung von Vorortgemeinden. J. G. W. 45. 293.

1663. P. P. Ventilation. L. C. M. 17. 466.

Anziehung.

1664. *F. R. Helmert.* Über die Reduktion von Lotabweichungen auf ein höher gelegenes Niveau. Z. V. 31. 69.

Ausgleichungsrechnung.

1665. *H. Rosenberg.* Zusammenstellung und Vervollständigung der Rechnungsformeln für die Bestimmung der periodischen Fehler von Mikrometerschrauben. Z. I. 22. 246; 269.

Chemie.

1666. *K. Arndt.* Über physikalische Chemie. V. V. G. 81. 54.

1667. *A. Dosch.* Wert und Bestimmung des Kohlensäuregehalts der Heizgase. P. J. 317. 773; 794; 811.

Dynamik.

1668. *L. Gümbel.* Torsional vibrations of shafts. Eg. 73. 472.

1669. *R. Iszkowski.* Der Geschwindigkeitsrelator. Z. Ö. I. A. V. 54. 555.

1670. —. Bestimmung der günstigsten Drehpunktlage von kippbaren Gefäßen. P. M. C. 35. 49.

1671. *A. Muzet.* Note sur le calcul des transmissions par poulies étagères. M. I. C. 55 I 69.

1672. *G. F. Sommers.* Tractive power formulae. A. E. R. J. 76. 284.

1673. *Ramisch.* Bestimmung des größten wagerechten Schubs eines Bogenträgers für einen beweglichen Lastenzug. C. B. B. 244. — *H. Zimmermann* 492.

1674. *E. C. Thulin.* A self-centering steady-rest. Am. M. 1902. 520.

1675. *W. K. Beard.* Reuleaux valve-diagram. E. 94. 403.

1676. *F. Meitner.* Idee zu einem Indikator. P. J. 317. 610.

1677. *O. Schäfer.* Die Abhängigkeit des Dampfmaschinengewichts von der Kolbengeschwindigkeit. P. J. 317. 565.

1678. *B. Rülf.* Der Reguliervorgang bei Dampfmaschinen. Z. V. D. I. 46. 1307; 1341.

1679. *W. Schenker.* Fonctionement des soupapes dans les distributions des moteurs à vapeur. B. S. E. 103. 132.

1680. *A. Baumann.* Ein neues Verfahren zur Bestimmung der Schwungradgewichte von Dampfmaschinen. P. J. 317. 293; 341.

1681. *F. Niethammer.* Über den Entwurf sehr rasch- und sehr langsamlaufender Maschinen. G. Z. 23. 437, 681.

1682. *A. Föppl.* Das Pendeln parallel geschalteter Maschinen. E. Z. 23. 59. — *G. Seibt* 121.

1683. *J. Payet.* Note sur l'unification des pas de vis pour les appareils d'utilisation des gaz. B. S. E. 103. 112.

1684. *J. Deschamps.* Sur le rendement des moteurs à gaz en général. M. I. C. 55 II. 16.

1685. *R. Barkow.* Beiträge zur Berechnung der Gasmaschine. Z. V. D. I. 46. 81; 404. — *S. S. Ekmann, W. Trinks* 404.

1686. *K. Bräuer.* Die Berechnung und Konstruktion der Viertaktmotoren. P. M. C. 35. 22; 30; 39.

1687. *F. Klonne.* Ungleichförmigkeitsgrad von Winkelabweichung bei Kurbelkraftmaschinen. E. Z. 23. 232.

1688. *R. Mansel.* Note on H.M.S. Minerva's trials and second report of boiler committee. E. 93. 568.

1689. *F. Eichberg.* Die Asynchronmotoren als Synchronmotoren. E.Z. 23. 57.

1690. *R. Goldschmidt.* Ankerreaktion und Pendelerscheinungen bei Drehstromgeneratoren. E.Z. 23. 980.

1691. *E. Knowlton.* Engine speeds for direct-connected alternators. E.W. 40. 125.

1692. *E. Dalby.* Balancing locomotives. Eg. 73. 767. — *L. Green* 74. 319.

1693. *J. Parry.* Crescent shaped belances of locomotive-wheels. E. 94. 619.

1694. *E. L. Coster.* The tractive force of locomotives. A.E.R.J. 76. 322.

1695. *M. Kuhn.* Neue Steuerung für Verbundlokomotiven. Z.V.D.I. 46. 1108.

1696. *M. Kuhn.* Steuerung für Verbundlokomotiven in unveränderlicher Füllung im Niederdruckzylinder bei veränderlicher Füllung im Hochdruckzylinder. O.F.E. (2) 39. 178.

1697. *J. Kempf.* Das Diagramm der Achsbelastungen und seine Anwendung bei 3- und mehrachsigen Lokomotiven. A.G.B. 51. 55.

1698. *Leitzmann.* Versuche mit einer $^3/_5$ gekuppelten vierzylindrigen Lokomotive. V.V.G. 81. 339.

1699. *v. Borries.* Bildliche Bestimmung der Gegengewichte in den Triebrädern der Lokomotiven. O.F.E. (2) 38. 129.

1700. — Nouvelles formules de la résistance des trains. G.C. 40. 179.

1701. *L. K.* Vergleichung älterer und neuerer Formeln für die Arbeitswiderstände der Eisenbahnzüge. P.J. 317. 194.

1702. *k.* Vergleichung älterer und neuerer Formeln für die Bewegungswiderstände bei den Eisenbahnzügen. O.F.E. (2) 39. 188.

1703. *A. Rühle v. Lilienstern.* Die günstigste Geschwindigkeit der Güterzüge. O.F.E. (2) 38. 127. — *R. Gostkowski* 39. 50. — *J. Jahn* 216.

1704. *F. Barbier.* Les changes et les vitesses les plus favorables des trains de marchandises. G.C. 42. 247.

1705. *A. Rühle v. Lilienstern.* Über den Einfluß der Steigungen über die Beförderung der Eisenbahnzüge. Z.A.I. (2) 7. 287.

1706. *J. Jedlicka.* Ein Beitrag zur Umwandlungsfrage der bisherigen Zweibufferwagen in Wagen mit selbsttätiger Mittelkuppelung. O.F.E. (2) 38. 79.

1707. *Sauer.* Selbsttätige Kuppelungen für Eisenbahnfahrzeuge. A.G.B. 51. 242.

1708. *T. H. Curtis.* Sideplay required in car couplers. A.E.R.J. 76. 351.

1709. *G. W. Meyer.* Der elektrische Betrieb von Fernschnellbahnen und diesbezügliche Projekte in den Vereinigten Staaten. Z.E.W. 20. 169.

1710. *Lochner.* Die Versuchsfahrten der Studiengesellschaft für elektrische Schnellbahnen auf der Militäreisenbahn zwischen Marienfelde und Zossen in den Monaten September bis November 1901. A.G.B. 50. 191; 201.

1711. *M Mulder.* Die elektrische Bremsung der Straßenbahnwagen. E.Z. 23. 515.

1712. *F. Drouin.* Les trépidations dans les voitures automobiles. G.C. 40. 92; 106.

1713. *Ringelmann.* Note sur les moteurs, les automobiles et les bateaux à alcool du concours international de 1902. B.S.E. 103. 201.

1714. *W. E. Daley.* Balancing marine engines. Eg. 74. 59.

1715. *H. Wilda.* Die Grundlagen des modernen Schiffsmaschinenbaus. P.M.C. 35. 92; 101; 111.

1716. *H. Frahm.* Neue Untersuchungen über die dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen von Schiffsmaschinen mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzschwingungen. Z.V.D.I. 46. 797. 880.

1717. *R. Mansel.* On the theory of steamship propulsion. E. 93. 294.

1718. *G. Russo.* The navipendulum. Eg. 73. 520. 590.

1719. *E. Grohmann.* Betonierungen unter Wasser bei der Schleusenanlage in Nußdorf. Z.Ö.I.A.V. 54. 513; 537; 561.

1720. *Mazoyer.* Touage mécanique établi au bief de partage du canal de Nivernais. N.A.C. (3) 9. 74; 86.

1721. *A. M. Downie.* The construction of fly-wheels. Eg. 73. 98; 134.

1722. — Handaufzüge. P.M.C. 35. 37; 45.

1723. *F. Wintermeyer.* Die verschiedenen Systeme elektrisch betriebener Aufzüge. V.V.G. 81. 377.

1724. *Jon.* Estimating length in driving belts. Am.M. 1902. 1828.

1725. *E. C. de Wolfe.* Paper and iron friction gearing. Am.M. 1902. 754.

1726. *A. O.* Über konstruktive Ausführung von Riemenscheiben. P.M.C. 35. 185; 192.

1727. — Dettmars Ölprüfungsapparat. P.J. 317. 661.

1728. *G. R.* Ein neuer Schlämmapparat. P.J. 317. 170.

1729. *G. v. Hanffstengel.* Moderne Lade- und Transporteinrichtungen für

Kohle, Erze und Koks. P.J. 317. 245; 597; 711; 731; 742.

1730. *E. Block.* Über einen neuen elektrischen Antrieb an Drehscheiben. A.G.B. 50. 184.

1731. *F. Buschmann.* Dampfförder-maschine oder elektrische Fördermaschine. P.J. 317. 85.

1732. *M. Herrmann.* Die dynamischen Verhältnisse der Schachtfördermaschine. P.J. 317. 469; 484.

1733. *A. Deeg.* Zwillings-Tandem-Fördermaschine mit 2 auf getrennten parallelen Achsen sitzenden Spiraltrommeln. Z.V.D.I. 46. 1057.

1734. — Fräsmaschine mit Vorrichtung zum Schneiden krummer Nuten. P.M.C. 35. 208.

1735. *Codron.* Expériences sur le travail des machines-outils. B.S.E. 102. 27; 648.

1736. *W. Schenker.* Zur Bestimmung und Beurteilung des Ventilerhebungsverlaufes und der Kraftwirkungen in Ventilsteuerungen. P.J. 317. 357; 373; 626. — *C. Leist* 624.

1737. *E. O. W.* Laying out vibrating levers. Am.M. 1902. 995.

Elastizität.

1738. *C. Bach.* Zur Gesetzmäßigkeit der elastischen Dehnungen. Z.V.D.I. 46. 25.

1739. *W. Schüle.* Zur Gesetzmäßigkeit der elastischen Dehnungen. Z.V.D.I. 46. 1512.

1740. *F. Engesser.* Über das Elastizitätsgesetz bei Körpern von gleichbleibender Elastizität. C.B.B. 22. 134.

1741. *H. Saller.* Stoßelastizität und Festigkeit. O.F.E. (2) 39. 202.

1742. *E. R. Douglas.* A diagram for the combination of direct and sharing stresses. Am.M. 1902. 9; 78.

1743. *J. H. Lonie.* Graphical method of determining stresses in car framing. A.E.R.J. 76. 141.

1744. *C. Bach.* Die Elastizitäts- und Festigkeitseigenschaften der Eisensorten. Z.V.D.I. 46. 1536.

1745. *E. Lebert.* Étude de la déformation élastique dans les pièces comprimées horizontales. A.P.Ch. 72. I. 89.

1746. *Kriemler.* Die zeichnerische Ermittelung der elastischen Linie eines freitragenden, am freien Ende mit einer Einzelkraft belasteten Stabes. C.B.B. 22. 585.

1747. *W. Schüle.* Die Biegungslehre gerader Stäbe mit veränderlichen Dehnungskoeffizienten. P.J. 317. 149.

1748. *A. E. Guy.* Experiments on the flexure of beams. Am.M. 1902. 54; 85; 116; 147.

1749. *E. V. Clark.* The theory of cast-iron beams. M.P.I.C.E. 149. 313.

1750. *P. Weiske.* Beitrag zur Berechnung der Beton- und Betoneisen-Träger. P.J. 317. 725.

1751. *E. Patton.* Beitrag zur Berechnung der Nebenspannungen infolge starrer Knotenverbindungen bei Brückenträgern. Z.A.I. (2) 7. 417.

1752. *G. Ramisch.* Untersuchung eines einerseits eingespannten und andererseits mit festem Auflagergelenk versehenen halbkreisförmigen elastischen Bogens. P.J. 317. 581.

1753. *G. Ramisch.* Allgemeine Untersuchung des elastischen Bogens zwischen zwei festen Kämpfergelenken und ohne Zwischengelenke. P.J. 317. 633; 645.

1754. *G. Ramisch.* Kinematische Ermittlung der Einflußflächen eines Fachwerkbogens mit eingespannten Kämpfern. P.J. 317. 229.

1755. *O. Schmiedel.* Berechnung eines in sich geschlossenen Rahmens. P.J. 317. 584.

1756. *G. Ramisch.* Bestimmung der Senkung des Angriffspunktes der Last bei einem Auslegerkran. P.J. 317. 15.

1757. *A. Francke.* Kreisförmige Unterlagen. Z.A.I. (2) 7. 65.

1758. *M. R. v. Thullie.* Beitrag zur Berechnung der Monierplatten. Z.Ö.I.A.V. 54. 242.

1759. *P. Vandeuren.* Étude complète de la variation du fil téléphonique. E.E. 33. 14.

1760. *C. Bach.* Die Elastizität der an verschiedenen Stellen einer Haut entnommenen Treibriemen. Z.V.D.I. 46. 985.

1761. *S. H. Barraclough.* An optical method of determining the deformations of a rotating fly-wheel. M.P.I.C.E. 150. 398.

1762. *Hacker.* Einiges über Spannungen in Fabrikschornsteinen. Z.A.I. (2) 7. 161.

1763. *H. Linsemann.* Die elastische Linie von Drehstrommaschinen mit großem Durchmesser. E.Z. 23. 81; 103.

1764. *G. Schwarz.* Die Ermittlung der Spannungen in den Ständern stehender Dampfmaschinen. Z.V.D. 346. 724.

1765. *M. Kuhn.* Rückstellvorrichtung für Drehgestelle bei Lokomotiven. A.G.B. 50. 231.

1766. *F. Beyer.* Beyers neuer Federregulator. P.M.C. 35. 54.

1767. *H. Lossier.* Calcul des ponts en maçonnerie. G.C. 42. 152.

1768. *J. Hervieu.* Le pont J. F. Lépine. N.A.C. (3) 8. 145; 161; 177; 9. 9; 30; 41.

1769. *C. F. Blake.* Hoisting drums. Am.M. 1902. 1791.

1770. *Galliot.* Expériences sur des bordages en tole. A.P.Ch. 72. II. 191.

1771. — Steel, ball-bearings. Eg. 74. 833.

Elektrizität.

1772. — Rational elektromagnetic units. E.W. 40. 368.

1773. *O. Heaviside.* Electromagnetic theory. T.E. 48. 209; 657; 49. 267.

1774. —. On electrons. Eg. 74. 752.

1775. *O. Heaviside.* Note on the size and inertia of electrons. T.E. 48. 945.

1776. *K. Arndt.* Neuere Untersuchungen auf dem Gebiet der Jonentheorie. N.N.G. 81. 415.

1777. *S. N. Taylor.* The measurement of bodies smaller than atoms. E.W. 40. 775

1778. *H. Cahen.* Über unipolare Induktion. E.Z. 23. 921.

1779. *H. Armagnat.* Sur la théorie des bobines d'induction. E.E. 33. 217.

1780. *T. Mizuno.* On an inductive circuit with a harmonically varying resistance. T.E. 49. 222.

1781. *J. B. Pomey.* Mesure des résistances d'isolament des fils de trolet. E.E. 31. 1.

1782. *G. J. Erlacher.* Über die Stromdichte in Widerständen. E.Z. 23. 404.

1783. *W. Wien.* Investigations of the electric discharge in rarefied gases. T.E. 49. 523; 560.

1784. *O. Steinmetz.* Auffindung von Erdschlüssen in einem unterirdischen Verteilungsnetz. E.Z. 23. 207.

1785. *E. Müllendorff.* Die Messung von Isolationsfehlern bei Mehrleiteranlagen. E.Z. 23. 1080.

1786. *F. Lubberger.* Die vagabundierenden Ströme im Jahre 1902. J.G.W. 45. 957.

1787. *J. Teichmüller.* Die Berechnung der Leitungen auf Wirtschaftlichkeit der Anlage. E.Z. 23. 190; 462. — *H. Cahen* 306; 511.

1788. *S. H.* Isolationsprüfung von Leitungsnetzen in der Praxis. P.J. 317. 114.

1789. *L. Monath.* Die Methode der Umformungen zur Bestimmung der Stromverteilung in Leitungsnetzen. Z.E.W. 20. 537; 549; 561.

1790. *E. Arnold.* Das polyzyklische Stromleitungssystem Arnold-Bragstad-la Cour. E.Z. 23. 569; 584.

1791. *F. Breisig.* Über die Definition der elektrischen Eigenschaften von Mehrfach-Leitungssystemen. E.Z. 23. 1137.

1792. *G. Benischke.* Spannungssicherungen. J.G.W. 45. 978.

1793. *L. Weber* et *H. Roberjot.* Oscillations propres des réseaux. E.E. 31. 197.

1794. *G. Benischke.* Über Resonanzerscheinungen. E.Z. 23. 97.

1795. *H. Armagnat.* Application des oscillations à la méthode de résonance. E.E. 30. 373.

1796. *A. Blondel.* Théorie des oscillographes. E.E. 33. 115.

1797. *A. Blondel.* Nouveaux oscillographes par l'inscription des courbes périodiques des courants alternatifs. E.E. 31. 41; 161.

1798. *W. A. del Mar.* Ratio of transformation in three-phase circuits. E.W. 39. 680.

1799. *M. Breslauer.* Bestimmung des Spannungsabfalles von Transformatoren. Z.E.W. 20. 523; 573.

1800. *F. Eichberg.* Bemerkungen zum allgemeinen Transformatorendiagramm. Z.E.W. 20. 484.

1801. *F. Eichberg.* Über Gleichstromwicklungen, insbesondere Reihenparallelwicklungen. Z.E.W. 20. 209.

1802. *A. P.* Eine neue Brückenmethode zur Isolationsmessung von Gleichstromnetzen während des Betriebes. P.J. 317. 121.

1803. *J. Teichmüller.* Elektrische Drehstromleitungen. E.Z. 23. 1; 30.

1804. *M. Fabre.* Anwendung des Drehstroms auf Stadtbahnen. E.Z. 23. 120.

1805. *Ptz.* Messung der Phasenverschiebung in Drehstromkreisen vermittelst Wattmeter. E.Z. 23. 36.

1806. *J. Teichmüller.* Canalisations élastiques à courants triphasés. E.E. 30. 203. 238.

1807. *A. Kussell.* P.D. Wave-forms in in three phase systems. T.E. 48. 487.

1808. *A. C. Eborall.* Polyphase electrical working. T.E. 48. 11; 48; 143; 184. 273; 315; 354; 391; 452; 532; 950; 1020.

1809. *K. Hohage.* Anwendung des Elektrometers bei Wechselstrom zur direkten Messung des Effektes, des Stromes und des Phasenwinkels. E.Z. 23. 365.

1810. *E. F. Northrup.* The use and advantages of the alternating current for Land telegraphy. E.W. 40. 740; 779; 820. 857.

1811. *F. Punga.* Zur Theorie der Stromwendung. Z.E.W. 20. 366; 377; 390.

1812. *K. Pichelmeyer.* Zur Theorie der Stromwendung. E.Z. 23. 623.

1813. *A. Rothert.* Beitrag zur Theorie der Stromwendung. E.Z. 23. 865; 884. — *J. Freund* 931. — *E. Arnold* 972.

1814. *L. Finzi.* Messung der Phasenverschiebung. E.Z. 23. 333.

1815. *M. Breslauer.* Eine Methode der exakten Messung sehr großer Phasenverschiebungen. E.Z. 23. 221.

1816. *E. Orlich.* Über die Definition der Phasenverschiebung. E.Z. 23. 543.

1817. *M. Breslauer.* Eine Methode zur exakten Messung sehr großer Phasenverschiebungen. Z.E.W. 20. 53.

1818. *E. Dick.* Funkenlose Kommutierung. E.Z. 23. 396. — *Fischer-Hinnen* 464. — *W. Kehse* 598.

1819. *P. Letheule.* Single-phase permutator with revolving brushes. E.W. 39. 471.

1820. *W. Duddell.* Experiments in periodic variations occurring in the exciting current of an inductor alternator. T.E. 48. 224; 302.

1821. *A. della Riccia.* Sur l'action des courants d'échange entre alternateurs en parallèle. E.E. 30. 413.

1822. *C. Westphal.* Sur la détermination de la chute de tension dans les alternateurs. E.E. 32. 161.

1823. *C. F. Guilbert.* Sur l'élimination des harmoniques dans les alternateurs. E.E. 31. 377.

1824. *C. F. Guilbert.* The armature reaction of alternators. E.W, 40. 658. 738; 816; 867; 899; 1003; 1041.

1825. *M. Leblanc.* Nouveau convertisseur universel. E.E. 30. 29; 55.

1826. *M. Seidner.* The synchronous convertor a voltage controller. E.W. 39. 761; 814.

1827. *A. S. Mac Allister.* Complete commercial test of polyphase induction motors using one wattmeter and one voltmeter. E.W. 39. 78.

1828. *A. S. Mac Allister.* Three-phase measurements. E.W. 40. 947.

1829. *K. Pichelmayer.* Elektrische Stromerzeuger und Motoren. Z.Ö.I.A.V. 54. Suppl. 33.

1830. —. Predetermination of the conditions of operation of dynamos; Picou method. E.W. 40. 659.

1831. *E. Dick.* Die Bestimmuug der Stufenzahl und der Stufung des Reglers eines Nebenschlußgenerators mit Selbsterregung. Z.E.W. 20. 401.

1832. *R. Krause.* Bestimmung der Stufenzahl und der einzelnen Stufen für Nebenschlußregler von Generatoren. E.Z. 23. 66.

1832ᵃ. *R. Krause.* Bestimmung der Stufen unnd der Stufung des Regulärwiderstands von Nebenschlußgeneratoren mit Selbstbewegung. E.Z. 23. 383; 556; 599.

1833. *A. Lindström.* Berechnung der charakteristischen Kurven des Induktionsmotors. E.Z. 23. 521.

1834. *S. Hahn.* Die Belastung der Laufkranmotoren. P.J. 317. 256; 271.

1835. *M. Osnos.* Die Tourenregulierung von Induktionsmotoren. E.Z. 23. 1075.

1836. *F. Loppé.* Systèmes de compoundage des dynamos à courant continu pour vitesse variable. E.E. 33. 181.

1837. *F. Eichberg.* Über kompensierte Gleichstrommaschinen Systeme Déri. E.Z. 23. 817.

1838. *A. Wettler.* Messung des Ankerwiderstands von Gleichstrommaschinen. E.Z. 23. 8.

1839. *T. Bruger.* Isolationsmessungen im Betrieb befindlicher Gleichstromanlagen. E.Z. 23. 901.

1840. *E. Arnold.* Theorie der Äquipotentialverbindungen der Anker von Gleichstrommaschinen. E.Z. 23. 215; 233. — *F. Eichberg* 355.

1841. *P. Prenilin.* Über funkenfreies Kommutieren des Stromes von Gleichstrommaschinen mit Kohlenbürsten bei Vor- und Rücklauf der Maschine und konstanter Brückenstellung in der zentralen Linie. E.Z. 23. 933; 958.

1842. *J. Fischer-Hinnen.* Die Berechnung von Wechselstromgeneratoren. Z.E.W. 20. 29; 41.

1843. *F. G. Baum.* Synchronous motor calculations. E.W. 39. 861.

1844. *A. Heyland.* Asynchrone Generatoren für Ein- und Mehrphasenstrom. E.Z. 23. 560.

1845. *E. Rosenberg.* Über den Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen insbesondere bei Antrieb durch Gasmotoren. Z.E.W. 20. 579; 593; 643.

1846. *E. Rosenberg.* Über den Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen insbesondere bei Antrieb durch Gasmotoren. E.Z. 23. 425; 450.

1847. *H. Görges.* Über den Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen. E.Z. 23. 1053.

1848. *E. Arnold.* Die Armaturreaktion eines Wechselstromgenerators. E. Z. 23. 250.

1849. *Denizet.* Description du réseau des tramways électriques de Marseille. *A.P.Ch.* 72. I 2.

1850. *A. Sengel.* Beitrag zur Berechnung der Speiseleitungen elektrischer Bahnanlagen. E.Z. 23. 335; 487. — Sieber 419.
1851. *Michalke.* Über den Verlauf der Rückströme in Straßenbahnen. E.Z. 23. 208.
1852. *E. Ziehl.* Verminderung der Erdströme bei mit Wechselstrom betriebenen Überlandbahnen mit Schienenrückleitung. E.Z. 23. 145.
1853. *G. Kapp.* Über ein neues Verfahren zur Verminderung des Schienenpotentialgefälles bei elektrischen Bahnen mit Schienenrückleitung. E.Z. 23. 19.
1854. *R. Ulbricht.* Gefährdung der Metallrohrleitungen durch elektrische Bahnen. E.Z. 23. 720.
1855. *R. Ulbricht.* Zur Frage der Gefährdung von Metallrohrleitungen durch elektrische Bahnen. E.Z. 23. 212.
1856. *A. Hruschka.* Fernspannungsmessung System Mershon. Z.E.W. 20. 125.
1857. *S. H. Baillie.* The effects of self-induction and capacity in electric transmission. T.E. 49. 517; 635.
1858. *J. Wg.* Spannungserhöhung durch oszillatorische Entladung in Fernleitungen. E.Z. 23. 871.
1859. *K. T. Fischer.* Neuerungen auf dem Gebiete der Schwachstromtechnik P.J. 317. 69; 133; 165.
1860. *M. I. Pupin.* The general problem of wave propagation over nonuniform conductors. E.W. 39. 384.
1861. *A. Slaby.* Die wissenschaftliche Grundlage der Funkentelegraphie. E.Z. 23. 165; 254.
1862. — The scientific basis of spark telegraphy. T.E. 49. 6; 47.
1863. *G. Seibt.* Elektrische Drahtwellen mit Berücksichtigung der Marconischen Wellentelegraphie. E.Z. 23. 315. 341; 386.
1864. *G. Reyval.* Notes sur la télégraphie sans fil en Allemagne. E.E. 30. 121. 167.
1865. *F. K. Vreeland.* Wireless telegraphy and Maxwell's theory. E.W. 40. 406.
1866. *J. K.* Drahtlose Telegraphie, System Professor Braun, Siemens u. Halske. Z.E.W. 20. 652.
1867. *A. F. Collins.* The Braun and Siemens and Halske wireless telegraph system. E.W. 35. 1041.
1868. *A. V. Abbott.* The economic design and management of telephone exchanges. E.W. 39. 20; 157; 266; 390. 511; 681; 815; 1086; 40. 212.
1869. *F. Dolezalek* und *A. Ebeling.* Untersuchung über telegraphische Fernleitungen Pupinschen Systems. E.Z. 23. 1059.
1870. *J. Rochas.* Théorie mathématique du revêtement des cables sousmarins. E.E. 31. 352.
1871. *P. Bayol.* Revêtement des cables soumarins. E.E. 30. 265; 342.
1872. *Pf.* Eingrenzung der Fehler in Seekabeln. E.Z. 23. 10.
1873. *Davaux-Charbonnel.* Essai de détermination des éléments d'un projet de cable sousmarin. E.E. 31. 124; 170.
1874. *P. Charpentier.* Note sur les essais d'isolement. E.E. 30. 229.
1875. *H. Armagnat.* Modification de l'essai de Blavier. E.E. 32. 199.
1876. *W. Bg.* Ein neuer Quecksilberunterbrecher. E.Z. 23. 107.
1877. *G. Benischke.* Facteur de forme et facteur de maximum. E.E. 31. 283.
1878. *G. Benischke.* Formfaktor u. Scheitelfaktor. Z.E.W. 20. 157.
1879. *A. Wright.* Grundsätze für eine nutzbringende Stromabgabe bei Elektrizitätswerken. E.Z. 23. 90.
1880. *K. R. Johnson.* Quelques remarques sur les conditions de formation des décharges disruptives. E.E. 30. 385.
1881. *A. Francke.* Einiges über die Genauigkeit der Anwendung der Biegungsgleichung $EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \pm M$. — Z.B.W. 52. 309.
1882. *W. E. Sumpner.* The testings of motor losses. T.E. 48. 621.
1883. *H. Stephens.* A modified mance test. T.E. 48. 905.
1884. *H. Poincaré.* Sur les expériences de M. Crémieu et une objection de M. Wilson. E.E. 31. 83.
1885. *H. Poincaré.* Sur les propriétés des anneaux à collecteurs. E.E. 30. 77; 301.
1886. *J. D. Nies.* Grounding of high potential systems. E. W. 39. 639.
1887. *T. Bruger.* Über Motorzähler und elektromagnetische Bewegungsapparate. E.Z. 23. 581.
1888. *F. Griswold.* Cross sections of electrical conductors. E.W. 40. 164.
1889. *F. G. Baum.* Synchronous reactance. E. W. 39. 724.
1890. — The calculation of armatures. E.W. 40. 614.
1891. *H. Armagnat.* Wattmètres et compteurs pour courants alternatifs. E.E. 31. 237.
1892. *G. Léon.* Essai sur un grisoumètre électrique. A.D.M.P. (10) 2. 49.

1893. *G. Stern.* Ein neuer Wechselstromzähler der „Union elektrischer Gesellschaften". E.Z. 23. 774.

1894. —. On a new method of measuring small self-inductions. T.E. 49. 337.

1895. *W. Marek.* Bemerkungen betreffend die Benutzung der neueren elektrischen Präzisionsmeßinstrumente mit Zeigerablesung. E.Z. 23. 447.

1896. *H. Armagnat.* Nouveaux permamètres. E.E. 32. 114.

1897. *B. Frankenfield.* Direct measurement of wattless power. E.W. 40. 245.

1898. *C. Brandeis.* Rating of wattmeters for three-phase systems. E.W. 39. 474.

1899. *A. Raps.* Über elektrische Messungen und Meßinstrumente. Z.Ö.I.A.V. 54. Suppl. 33.

1900. *J. Görner.* Über Messung elektrischer Effekte. E.Z. 23. 338.

1901. *C. W. Schaeffer.* The capabilities of the milammeter and the galvanometer in general and submarine cable testing. T.E. 49. 677. 707. 755. 793.

1902. *R. Beattie.* Test coils for alternating current wattmeters. T.E. 48. 818,

1903. *F. Klönne.* Über ein neues Verfahren zur Messung des Ungleichförmigkeitsgrades und der Winkelabweichung. E.Z. 23. 715.

1904. *R. Hellmund.* Dimensionierung der Kontaktflächen und Schrauben elektrischer Apparate. Z.E.W. 20. 497; 511.

1905. *J. H. Coblyn.* La vision à distance par l'électricité. E.E. 33. 433.

1906. *B. Böhm-Raffay.* Über den wahren Widerstand und die elektromotorische Gegenkraft im elektrischen Lichtbogen. Z.E.W. 20. 250.

1907. *P. Letheule.* A French system of train lighting. E.W. 40. 999.

1908. *W. Bermbach.* Das elektrische Bogenlicht. J.G.W. 45. 402; 429; 492; 506. 524.

1909. *P. Gesing.* Praktische u. schnelle Berechnung der Widerstandsregulatoren für Lichtbildungen. E.Z. 23. 293.

1910. *Kollert.* Über Hitzdrahtstrommesser. E.Z. 23. 384.

1911. *E. R.* Über Hitzdrahtstrommesser. C.Z.O.M. 23. 207.

1912. —The temperature and efficiency of the electric fornace. T.E. 49. 387.

Erddruck.

1913. *G. Wilson.* Some experiments on conjugate pressures in fine sand and their variation with the presence of water. M.P.I.C.E. 149. 208.

Festigkeit.

1914. *G. Ramisch.* Beitrag zur Festigkeitslehre. P.J. 317. 277.

1915. *S. Rappaport.* Neuere Methoden der Festigkeitslehre. S.B.Z. 39. 208; 220; 262.

1916. *Sommerfeld.* Beiträge zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre. Z.V.D.I. 46. 391.

1917. *A. Schneider.* Zur Theorie der Knickfestigkeit. B.M.K. 7. 222; 334; 417.

1918. *C. Bach.* Die Widerstandsfähigkeit kugelförmiger Wandungen gegenüber äußerem Überdruck. Z.V.D.I. 46. 333; 375.

1919. *P. Holitscher.* Prüfung von Materialien. E.Z. 23. 147.

1920. *G. Salemi-Pace.* Über die Druckfestigkeit der Gesteine unter dem Einfluß elastischer Substanzen zwischen den Druckflächen. B.M.K. 7. 265.

1921. *Melan.* Belastungsversuch an einer armierten Betonplatte. Z.Ö.I.A.V. 54. 879.

1922. *E. Rümler.* Hourdis de béton armé. Flèche d'épreuve. L.C.M. 17. 166.

1923. *F. Schüle.* Résistance et déformation du béton armé sollicité à la flexion. S.B.Z. 40. 248.

1924. *Cõnsidère.* Résistance à la compression du béton armé. G.C. 42. 5; 21; 38; 58.

1925. *G. Barkhausen.* Die Verbundkörper aus Mörtel u. Eisen im Bauwesen. Z.A.I. (2) 7. 245.

1926. *P. P.* Calcul pratique de la résistance des fers. L.C.M. 17. 525.

1927. *L. Appert.* Le verre armé. M.I.C. 55. II. 470.

1928. *B. Zschokke.* Untersuchungen über die Plastizität der Thone (deutsch u. franz.) B.M.K. 7. 377; 393.

1929. *R. Féret.* Ergänzung zum Versuchsprogramm für die Prüfungsmethoden der Puzzolane. B.M.K. 7. 207.

1930. *R. Féret.* Complément au programme d'expériences relatives aux méthodes d'essai des pouzzolanes. B.M.K. 7. 105.

1931. *A. F. Guy.* The strength of an egg shell. Am.M. 1902. 1222.

1932. *F. Wittenbauer.* Die Knicklast mehrfach befestigter Stäbe. Z.V.D.I. 46. 501.

1933. *Ramisch.* Zeichnung der Einflußlinien für die Gegendrücke der äußersten Stützen eines geraden kontinuierlichen Balkens mit veränderlichem Querschnitt und mit 3 gleichhohen Stützpunkten. Z.A.I. (2) 7. 537.

1934. *P. P.* Réemploi d'une poutre métallique. L.C.M. 17. 57.

1935. *E. Förster.* Bestimmung der günstigsten I-Profile für gleichmäßig belastete Decken. P.M.C. 35. 183.

1936. *M. R. v. Thullie.* Neue Versuche mit Betoneisenbalken. Z.Ö.I A.V. 54. 697.

1937. *F. C. Lea.* Stresses in braced girders. Eg. 73. 25.

1938. *A. Fyson.* Formulae for the weights and economic depths of plate girders. Eg. 73. 338; 463.

1939. *T. G. Gribble.* Plate-girder webs. Eg. 73. 236; 253; 282.

1940. *M. R. v. Thullie.* Neue Versuche mit Hennebiqueträgern in Lemberg. Z. Ö.I.A.V. 54. 857.

1941. *L. de Boulongne.* Note sur le calcul des arcs métalliques surbaissées de section peu variable, reposant sur des clavettes aux retombées. A.P.Ch. 72 I. 135.

1942. *C. Birault.* Calcul des parois et armatures des tuyaux, et section circulaire, posés sur le sol. G.C. 42. 102; 116.

1943. *L. Cosyn.* Étude théorique sur la résistance des voûtes. N.A.C. (3) 8. 139; 153; 169; 187.

1944. *C. v. Szily.* Zugversuche mit auf innern Druck beanspruchten Rohren. B.M K. 7. 332.

1945. *F. P. Kleinhans.* Strength and proportion of keys. Am.M. 1902. 1450.

1946. *J. M. Moncrieff.* Practical strength of columns or struts of wrought iron and mild steel. Eg. 73. 731. — *C.W.E.* 777.

1947. *I. G. Boobnoff.* Stresses on ships' plates. Eg. 73. 390.

1948. *P. P.* Mur d'atelier avec transmissions. L.C.M. 17. 45.

1949. *A. Ostenfeld.* Einige Bemerkungen über die Bestimmung der Abmessungen exzentrisch und zentrisch beanspruchter Säulen. Z.V.D.I. 46. 1858.

1950. *P. P.* Pilier en fonte. L.C.M. 17. 59.

1951. *A. Francke.* Einiges über Eisenbahnoberbau. O.F.E. (2) 39. 12; 34; 47; 66.

1952. *A. Morizot.* Les ponts métalliques à arcades. N.A.C. (3) 8. 33; 59.

1953. *J. Graham.* Impact and fatigue in railway bridges. E. 94. 465.

1954. *E. Ruchholtz.* Über die Untersuchung der Quersteifigkeit oben offener Trogbrücken. Z.A.I. (2) 7. 299.

1955. *E. Häseler.* Beanspruchung und Streckung der Winddiagonalen infolge des Durchhängens. Z V.D.I. 46. 686.

1956. *S. Dunkerley.* Strains on crankshafts. Eg. 73. 426; 454; 491.

1957. *W. L.* Über die Berechnung hölzerner Riemenscheiben. P.M.C. 35. 8.

1958. *C. Heinel; C. Bach.* Eine Stelle an manchen Maschinenteilen, deren Beanspruchung auf Grund der üblichen Berechnung stark unterschätzt wird. Z.V.D.I. 46. 141.

1959. —. Prime movers and their aliments. Eg. 74. 511.

1960. *P. P.* Écartement des contreforts. L.C.M. 17. 583; 596; 609; 619.

Geodäsie.

1961. *Wildt.* Über die Proportionalteilung an polygonal begrenzten Grundstücken. Z.V. 31. 477.

1962. *P. L.* Trigonométrie appliquée. J.G. 55. 44.

1963. *Puller.* Über die Aufgaben der trigonometrischen Punktbestimmung und eine Erweiterung des Rückwärtseinschneidens. Z.V 31. 453.

1964. *I. Bischoff.* Das Einschneiden nach Trigonometer Wild 1883. Z.V. 31. 573.

1965. *P. L.* Sommet inaccessible. J.G. 55. 109.

1966. *Kobbe.* Anlage und Berechnung trigonometrischer Hauptnetze in den Kolonien. Z.V. 31. 277.

1967. *E. Hammer.* Über das Höhendiagramm bei der halbtrigonometrischen Höhenaufnahme und bei der Meßtisch-Tachymetrie. Z.I. 22. 81.

1968. *A. Klingatsch.* Zur Meridianbestimmung. Z.V. 31. 133.

1969. *Doležal.* Über das Gesichts- und Aufnahmefeld bei photogrammetrischen Aufnahmen. Z.V. 31. 101.

Geometrie.

1970. *K. Weigelin.* Die Kreisberührungsaufgabe des Appollonius und ihre Anwendung auf die Berechnung der Gleisanlagen. O.F.E. (2) 39. 255.

Graphischer Kalkul.

1971. *J. Mandl.* Graphische Darstellung von mathematischen Formeln. W. A.B.Z. 67. 96.

1972. *W. S. Fanning.* A few graphical methods of figuring. Am.M. 1902. 62. — *E. H. Berry.* 302.

1973. *E. H. Berry.* Graphic integration for volumes. Am.M. 1902. 1679.

1974. *K. G. Holst.* Graphic integration. Area, center of gravity, moment of inertia etc. Am.M. 1902. 517.

1975. *R. B. Kendig.* Graphical method of finding limit diameters for car and tender axles. A.E.R.J. 76. 288.

1976. *F. Berckenbrinck.* Graphische Bestimmung des Anzugsmoments und der Schlüpfung von Induktionsmotoren in Abhängigkeit vom Motorwiderstand mit Hilfe des Heylandschen Diagrammes. Z.E.W. 25. 245.

1977. *B. Soschinski.* Einige Konstruktionen zur graphischen Berechnung von Leitungswiderständen. E.Z. 23. 359.

Hydraulik.

1978. *H. Gravelius.* Siedeks neue Geschwindigkeitsformel. Z.G. 4. 165.

1979. *Heyne.* Studie über hydraulische Koeffizienten. Z.Ö.I.A.V. 54. 837.

1980. *M. Grellert.* Wasserröhrenroste. G.I. 25. 1.

1981. *H.* Die ökonomische Geschwindigkeit in Wasser-Druckrohren. J.G.W. 45. 319.

1982. *A. Rateau.* Note sur l'écoulement de l'eau chaude par les tuyères. A.D.M.P. (10) 1. 59.

1983. *G. Willems.* Le maréosiphon, appareil automatique de préservation contre les inondations de marée. A.P. Ch. 72 II. 182.

1984. *P. P.* Débit par siphon. L.C.M. 17. 513.

1985. *C. H. Innes.* Modern fans. Eg. 74. 627. 732.

1986. —. High speed centrifugal fans and pumps. E. 93. 230. 252.

1987. —. Schnelllaufende Zentrifugalpumpen und Ventilatoren, System Rateau. P.M.C. 35. 115.

1988. *Schröder.* Mouvements et résistances des soupapes des pompes. B.S.E. 103. 123.

1989. *R. Ryves.* The hydraulically balanced Ashley pump. Eg. 74. 320. 387.

1990. *C. Blecken.* Alte und neue selbsttätige Wasserhebemaschinen. P.M.C. 35. 117; 126.

1991. *Camerer.* Neue Diagramme zur Turbinentheorie. P.J. 317. 677; 693.

1992. *A. Budau.* Über die Wirkungsweise des Wassers in den Laufrädern der Freistrahlturbinen. Z.Ö.I.A.V. 54. 413.

1993. *E. Heidebrock.* Vergleichende Untersuchungen über die hydraulischen Eigenschaften der Überdruckturbinen. P.J. 317. 1; 21; 42; 629.

1994. *G. Poisson.* Mémoire sur la forme des cours d'eau à fond mobile. A.P.Ch. 72. I. 32.

1995. *R. Siedek.* Die natürlichen Normalprofile der fließenden Gewässer. Z.Ö.I.A.V. 54. 133.

1996. *T. E. Stanton.* Some characteristics of the flow of water in channels of varying cross section. Eg. 74. 664.

1997. *A. Jöhrens.* Über Bewegung des Wassers in Kanälen. Z.A.I. (2) 7. 257.

1998. *G. Crugnola.* Zur Dynamik des Flußbetts. Z.G. 4. 268.

1999. *P. P.* Débit maximum d'un canal découvert. L.C.M. 17. 236.

2000. *E. Krüger.* Der Einfluß einer Flußregelung auf den Wasserstand im Unterlauf. C.B.B. 22. 403.

2001. *Saller.* Über Staukurvenberechnung. D.B.Z. 36. 514.

2002. *G. Ramisch.* Beitrag zur Dimensionierung der Talsperremauern. Z.Ö. I.A.V. 54. 261.

2003. *E. Wattenberg.* Wettbewerb für den Entwurf zu einer Schachtschleuse mit 20 m Gefälle. Z.B.W. 52. 409. 545.

2004. *L. Czischek.* Ein neues Sparschleusensystem. Z.Ö.I.A.V. 54. 577.

2005. *L. v. Lubimoff.* Verdrückung von Brücken durch Frost auf der sibirischen Eisenbahn. O.F.E. (2) 39. 110.

2006. *K. Grünhut.* Die Regulierung des Donaustromes in Ungarn. Z.Ö.I.A.V. 54. 753; 777; 801.

2007. *E. Prins.* Eisenhaltiges Grundwasser und die konstruktive Behandlung von Enteisenungsanlagen. J.G.W. 45. 149; 163.

2008. *A. T. J. Kersey.* Negative slip. Eg 73. 551.

Inhalte.

2009. *L. Szarvas.* Flächenberechnung. C.B.B. 22. 598.

2010. *M. Grellert.* Inhalte und Oberflächen von Gefäßen. G.I. 25. 273.

2011. *Westerner.* A circle to enclose a given number of smaller circles. Am.M. 1902. 1521.

Kinematik.

2012. *W. Hartmann.* Konstruktion der Normalen und der Krümmungskreise der Polbahnen der Viergliederkette. Z.V.D.I 46. 1361.

2013. *A. Kittel.* Über eine Vorrichtung korrekte Zahnräder auf der Drehbank herzustellen. D.M.Z. 1902. 13. 21.

2014. *O. Sch.* Neue Holzzahnräder. P.M.C. 35. 89.

2015. *H. Markus.* Propellerriemen und Wurfgetriebe. Z.V.D.I. 46. 1808.

2016. *N. Westberg.* Schneckengetriebe mit hohem Wirkungsgrade. Z.V.D.I. 46. 918.

2017. *F. Mangelsdorff.* Über Ovalwerke. V.V.G. 81. 423.

Kurven.

2018. *L. Kleritj.* Präzisions-Kurvenrektifikator. Z.I. 22. 311.

2019. *L. Bückle.* Berechnung eines Kreises, der eine Gerade und einen Kreis berührt und durch einen gegebenen Punkt geht. O.F.E. (2) 39. 7. — *Puller* 96.

2020. *W. Weitbrecht.* Absteckung eines Kreisbogens, welcher 2 gegebene Grade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht. Z.V. 31. 217.

2021. *S. Sor.* Abstecken von Kreisbogen aus dem Tangentenschnittpunkt. Z.V. 31. 436.

2022. *Hammer* Zur Kreisbogenabsteckung. Z.V. 31. 487.

2023. *L. J. Blanco.* Location of a circular curve. E. 94. 241.

2024. *C. Herbst.* Parabelkonstruktion. P.J. 317. 740.

2024 a. *G. Pinkenburg.* Über Holzpflaster. Z.B.W. 52. 419.

2025. *Ebner.* Elementares über die zyklischen Kurven. P.J. 317. 405.

2026. *J. N. Le Conte.* A diagram for laying out spiral gears. Am.M. 1902. 296.

2027. *F. Loppé.* Décomposition d'une courbe représentative d'un phénomène alternatif en sinusoides. E.E. 31. 499.

2028. *F. Loppé.* Décomposition en sinusoides d'une courbe représentant un phénomène périodique. E.E. 32. 287.

2029. *Nordling*, *Dupuy* et *Ricour.* Raccordement des courbes avec les alignements droits. A.P.Ch. 72. III. 89.

2030. *M. d'Ocagne.* Sur les raccordements à courbure progressive pour voies ferrées. Emploi de la clothoïde et tables numériques. A.P.Ch. 72. III. 70.

2031. *Bückle.* Verbindung zweier konzentrischer Kreise durch einen aus zwei Kreisbogen bestehenden Korbbogen. Z.V. 31. 509. 541.

2032. *K. Hager.* Über die Absteckung von Eisenbahnlinien in engen Tälern. O.F.E. (2) 39. 116.

2033. *W. L.* Die vollständige Kompensation eines Chronometers. C.Z.O.M. 23. 43.

2034. *E. H. Young.* Tables of formulas for points and crossings. M.P.I.C.E. 150. 315.

Magnetismus.

2035. *E. Müllendorf.* Die Bestimmung der Konstanten in der Magnetisierungsfunktion. E.Z. 23. 25.

2036. *A. Dina.* Über rotierende Hysteresis. E.Z. 23. 41. — *R. Hiecke* 142. — *Schenkel* 429.

2037. *I. Döry.* Theoretische Ableitung der Steinmetzschen Hysteresisformel $A = \eta B^{1 \cdot 6}$, Ermittlung der Magnetisierungsfunktion $B = f(\mathfrak{H})$. Z.E.W. 20. 329; 412. — *R. Hiecke* 411; 435.

2038. *G. F. C. Searle.* The ballistic measurement of hysteresis. T.E. 49. 100; 219.

2039. *E. Gumlich.* Über Verhältnis der magnetischen Eigenschaften zum elektrischen Leitungsvermögen magnetischer Materialien. E.Z. 23. 101.

2040. *P. E. Shaw.* The magnetic expansion of iron and steel. T.E. 48. 699; 765.

2041. *A. D. Williams.* Notes on crane designe. Am.M. 1902. 1676.

2042. *F. Townsend, S. Diamant* and *L. S. Thurston.* The permeability of magnetic liquids. E.W. 40. 811.

2043. *E. Hammer.* Säkularabnahme der magnetischen Deklination zu Potsdam. Z.V. 31. 181.

2044. *P. David.* Anomalies de la composante horizontale du magnétisme terrestre sur le Puy-de-Dôme. E.E. 33. 188.

Maxima und Minima.

2045. *P. Holitscher.* Über die Raumausnutzung von Litzen. E.Z. 23. 673.

Meßwerkzeuge.

2046. *A. Klingatsch.* Über den Einfluß der Exzentrizität der Alhidade beim Theodolit mit einer Ablesevorrichtung. Z.V. 31. 339.

2047. *W. L.* Das Bell-Elliottsche Tacheometer für direkte Ablesung der Tangenten. C.Z.O.M. 23. 73.

2048. *E. Doležal.* Der Hammer-Fennelsche Tachymeter-Theodolit. Z.Ö.I.A.V. 54. 831.

2049. *J. Stambach.* Der Hammer-Fennelsche Tachymetertheodolit und die Tachymeterkippregel. S.B.Z. 39. 140.

2050. *P. Lehoux.* Tachéométrie et planigraphe. J.G. 55. 182.

2051. *P. B.* Chronotachymètre à mouvement conjugué pour locomotives. P.E.M. (5) 1. 51.

Näherungsmethoden.

2052. *A. Lafay.* Note sur la représentation approchée des équations à 3 variables par des expressions de la forme $\gamma(z) = \alpha(x) + \lambda(x)\beta(y)$. G.C. 40. 298.

2053. *P. V. Vernon.* The side play of the calipers. Am.M. 1902. 340.

Nomographie.

2054a. *Hacker*. Bestimmung von Flächeninhalten, Schwerpunkten, statischen, Zentrifugal- und Trägheitsmomenten mittels des Projektierbogens. D.B.Z. 36. 581.

Optik.

2054b. *K. Strehl*. Bericht über optische Fortschritte. C.Z.O.M. 23. 1.

2055. *P. Lebedev*. Investigations on the pressure of light. T.E. 48. 226.

2056. *P. J. Lynam*. A looking glass puzzle. E. 93. 519.

2057. *K. Strehl*. Über Achromasie. C.Z.O.M. 23. 21.

2058. *K. Martin*. Über die anastigmatische Bildfeldebenung und ihre Beziehung zum Glasmaterial. C.Z.O.M. 23. 133; 157; 229. — *Rudolf* 145. 217.

2059. *T. R. Dallmeyer*. Bemerkungen über telephotographische Linsen und ein neues System („Adonsystem") für Vergrößerungen ohne Zeitverlust. C.Z.O.M. 23. 135.

2060. *O. Hecker*. Über den Zusammenhang von Objektivdistanz und stereoskopischem Effekt beim Sehen durch Doppelfernrohre. Z.I. 22. 372.

2061. *H. Krüss*. Elementare Darstellung der Helligkeit optischer Instrumente. D.M.Z. 1902. 243; 254.

2062. *O. Schönrock*. Theoretische Bestimmung des Achsenfehlers von Kristallplatten. Z.I. 22. 1.

2063. *E. Brodhuhn* und *O. Schönrock*. Apparate zur Untersuchung von senkrecht zur Achse geschliffenen Quarzplatten auf ihre Güte. Z.I. 22. 351.

2064. *M. Lamotte*. Production des rayons cathodiques par les rayons ultraviolets. E.E. 33. 155.

2065. *H. Boas*. Apparat zur orthogonal-parallel-projektivischen Aufnahme von Röntgenbildern. D.M.Z. 1902. 153; 163.

2066. *A. Winkelmann*. Über eine von E. Abbe vorgeschlagene Anordnung des Fresnelschen Doppelprismas und über die objektive Darstellung von Interferenzstreifen. Z.I. 22. 275.

2067. *C. Schaefer*. Ergebnisse der neueren Strahlungsmessungen. Z.V.D.I. 46. 17.

2068. *C. P. Matthews*. An integrating photometer for glow lamps and sources of like intensity. E.W. 40. 746.

2069. *O. Lummer*. Die Ziele der Lichttechnik. E.Z. 23. 787; 806.

Rechnen, numerisches.

2070. *Kelling*. Dividieren auf Additionsmaschinen. Z.V. 31. 171.

2071. *R. Proell*. Rechentafel „System Proell". V.V.G. 31. 48.

2072. *J. L. Sanguet*. Calculs pratiques. J.G. 55. 205; 236.

2073. *E. S. Timator*. Subtracting fractions. Am. M. 1902. 1555.

2074. *H. Sossna*. Die rechnerische Behandlung der Aufgabe des Gegenschnitts mittelst Maschine und numerisch-trigonometrischen Hilfstafeln. Z.V. 31. 365; 429.

2075. *J. Schnöckel*. Neue Hilfsmittel zur Berechnung des Netzes der Messungslinien. Z.V. 31. 245.

Reibung.

2076. *Ramisch*. Über rollende Reibung. Z.Ö.I.A.V. 54. 10.

2077. *K. Büchner*. Beitrag zur Kenntnis der Abnutzungs- und Reibungsverhältnisse der Stirnzahnräder. Z.V.D.I. 46. 159; 278.

2078. *O. Lasche*. Die Reibung von Lagern mit hoher Umfangsgeschwindigkeit. Z.V.D.I. 46. 1881; 1932; 1961.

2079. *R. Stribeck*. Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlagen. Z.V.D.I. 46. 1343; 1432; 1463.

2080. *Zschokke*. Recherches sur la plasticité des argiles. B.S.E. 103. 619.

Reihen.

2081. *C. Herbst*. Ableitung der Summenformeln arithmetischer Reihen mit Hilfe von Momenten. P.J. 317. 740.

Statik.

2082. *F. Engesser*. Zur Bestimmung der ungünstigsten Laststellung mit Hilfe der Einflußlinien. C.B.B. 22. 510.

2083. *M. Koenen*. Grundzüge für die statische Berechnung der Beton- und Betoneisenbauten. C.B.B. 22. 229; 367.

2084. *M. Marcus*. Beitrag zur Berechnung eines Kugelgelenks. S.B.Z. 40. 55.

2085. *G. Ramisch*. Kinematische Untersuchung eines doppelten Sprengwerkes. V.V.G. 31. 35.

2086. *G. Ramisch*. Untersuchung eines Balkens auf beliebig vielen Stützen. P.J. 317. 517.

2087. *G. Ramisch*. Kinematische Untersuchung eines gesprengten Fachwerkbalkens. P.J. 317. 389.

2088. *G. Ramisch*. Ableitung einer neuen Beziehung zur Bestimmung des

Maximalmoments für einen Querschnitt eines von beweglichen und zusammenhängenden Einzellasten beanspruchten Trägers. Z.A.I. (2) 7. 181; 500. — *Kriemler* 499. — *M. Marcus* 500.

2089. *G. Ramisch.* Bestimmung der Auflageplatten eines Freiträgers D.B.Z. 36. 322.

2090. *F. Stark.* Zur graphischen Statik der Bogenträger. Z.Ö.I.A.V. 54. 221.

2091. *G. Ramisch.* Kinematische Untersuchung eines halbkreisförmigen Bogenträgers mit 2 an den Kämpfern gelegenen Gelenken. Z.Ö.I.A.V. 54. 816.

2092. *G. Ramisch.* Kinematische Untersuchung eines Bogenträgers mit zwei an den Kämpfern gelegenen Gelenken. P.J. 317. 104.

2093. *O. Schmiedel.* Berechnung eines Zweigelenkbogenträgers mit ruhender Belastung. P.M.C. 35. 201.

2094. *G. Ramisch.* Elementare Bestimmung der größten Momente eines Trägers hervorgebracht von einer beweglichen und einer gleichmäßig verteilten Last unter den beweglichen Lasten. P.J. 317. 187.

2095. *G. Ramisch.* Beitrag zur Theorie des Bogens mit 2 festen Kämpfergelenken. Z.Ö.I.A.V. 54. 458.

2096. *A. Francke.* Zeichnerische Bestimmung der Kräfteverteilung im Eingelenkbogen. Z.B.W. 52. 561.

2097. *G. Ramisch.* Kinematische Untersuchung der Stützdrücke eines Dreigelenkbogens. P.J. 317. 168.

2098. *O. Schmiedel.* Beitrag zur Theorie der Berechnung statisch unbestimmter Stabwerke. P.M.C. 35. 161; 168.

2099. *Mehrtens, Müller-Breslau.* In Sachen der statisch bestimmten mehrteiligen Streben-Fachwerke. D.B.Z. 36. 74.

2100. *H. Müller-Breslau.* Über räumliche Fachwerke. C.B.B. 22. 49; 61; 429; 501.

2101. *O. Mohr.* Beitrag zur Theorie des Raumfachwerkes. C.B.B. 22. 205.

2102. *O. Mohr.* Zur Berechnung der Raumfachwerke. C.B.B. 22. 634.

2103. *Mehrtens.* Über Raumfachwerke. D.B.Z. 36. 325.

2104. *P. P.* Voûtes et murs de reservoir. L.C.M. 17. 70.

2105. *C. Tourtay.* Méthode de calcul rapide des voûtes et de leurs culées. N.A.C. (3) 9. 135; 159; 169.

2106. *P. P.* Voûtes sphériques avec pénétration. L.C.M. 17. 333.

2107. *J. Schreier.* Graphostatische Verfahren zur direkten Dimensionierung von Stütz- und Staumauern, Widerlagern und Brückenpfeilern mit ebenen und gekrümmten Begrenzungsflächen. Z.Ö.I.V. 54. 320.

2108. *R. Dietze.* Eiserne Dachkonstruktionen. P.M.C. 35. 134; 141; 150.

2109. —. Statische Berechnung der Eisenkonstruktion einer Halle. P.M.C. 35. 5; 15.

2110. *M. Preuss.* Beitrag zur statischen Untersuchung von Schornsteinen. Z.A.I. (2) 7. 295.

2111. *H. Lang.* Beiträge zur statischen Untersuchung von Schornsteinen. Z.V.D.I. 46. 1321.

2112. *P. P.* Trémie pour haut-fourneau. L.C.M. 17. 502.

2113. *R. Leupold.* Über die Berechnung der Schornsteine. P.J. 317. 636; 652.

2114. *K. Krohne.* Welcher Durchhang soll blanken Freileitungen aus Weichkupfer gegeben werden? E.Z. 23. 593.

2115. *G. Ramisch.* Kinematische Untersuchung einer durch einen Fachwerkträger versteiften Kette. P.J. 317. 549.

2116. *G. Ramisch.* Untersuchung der Endversteifung einer Balkenbrücke. P.J. 317. 682; 697.

2117. *H. Kuckuck.* Die statische Berechnung des Normalviadukts der Berliner elektrischen Hochbahn. D.B.Z. 36. 370.

2118. *K. Haberkalt.* Die Überbrückung der Salzach zwischen Oberndorf und Laufen. W.A.B.Z. 67. 17.

2119. *R. Philippe.* Le viaduc de Müngsten. N.A.C. (3) 9. 1; 23.

2120. *F. Müller von der Werra.* Die neue Kinzuabrücke. Z.V.D.I. 46. 751.

2121. *G. Cadort.* Barrages à parements rectilignes. A.P.Ch. 72 III. 31.

2122. *A. Haussner.* Neuerungen in der Papierfabrikation. P.J. 317. 717; 748.

Mathematische Tafeln.

2123. *H. Ehrhardt.* Über die Verwendung einer Tafel von Achtelquadraten zur Flächenberechnung und -Teilung. Z.V. 31. 317; 338.

Wärme.

2124. *Séligmann-Lui.* Note sur une introduction mécanique des principes de la thermodynamique. A.D.M.P. (10) 2. 144.

2125. *R. Mewes.* Zusammenhang zwischen der kinetischen und der Vibrationstheorie der Gase. P.J. 317. 758.

2126. *C. Schaefer.* Die kritischen Daten und ihre Bedeutung für die Kondensation der Gase. Z.V.D.I. 46. 1902.

2127. *L. H. Fry.* The relation between heating surface and cylinder power. A. E. R. J. 76. 313.

2128. *A. Rateau.* Recherches expérimentales sur l'écoulement de la vapeur d'eau par les tuyères convergentes et des orifices en mince paroi. A. D. M. P. (10) 1. 1.

2129. *H. O. Ritschel.* Die Dampfleitung. G. I. 25. 221.

2130. *C. E. Stromeyer.* Les tuyauteries de vapeur et les coups d'eau. B. S. E. 102. 434.

2131. *H. Parenty.* Observations sur les expériences de M. Rateau concernant le debit de la vapeur et leur concordance avec les formules de M. Parenty. A. D. M. P. (10) 2. 403.

2132. *Petavel.* Émissivité theorique dans les gaz à haute pression. B. S. E. 102. 99.

2133. —. Thermal emissivity of high pressure gases. Eg. 73. 1.

2134. *O. Bechstein.* Die Verfahren zur Bestimmung der Feuchtigkeit des Kesseldampfes. P. J. 317. 280.

2135. *C. Bach.* Zur Frage des überhitzten Wasserdampfes. Z. V. D. I. 46. 729.

2136. *A. W. Brightmore.* Formulas relating to saturated steam. M. P. I. C. E. 150. 409.

2137. *C. E. Stromeyer.* Distortion in boilers due to overheating. Eg. 73. 458.

2138. *A. C. Elliot.* Circulation in water-tube boilers. Eg. 73. 495.

2139. —. Le nouveau moteur Niel. M. I. C. 55 II. 258.

2140. *M. Schröter.* Untersuchung einer Tandem-Verbundmaschine von 1000 P. S. Z. V. D. I. 46. 803; 891.

2141. *K. Schreber.* Die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. P. J. 317. 709.

2142. *E. Meyer.* Untersuchungen am Gasmotor. Z. V. D. I. 46. 945; 1303; 1891.

2143. *H. E. Wimperis.* On gas engine temperatures. Eg. 73. 833; 74. 156.

2144. *H. Güldner.* Calcul des dimensions principales des moteurs à gaz. B. S. E. 102. 723.

2145. *J. Deschamps.* Évaluation de la consommation dans les moteurs à gaz. M. I. C. 55 II. 205.

2146. *A. Staus.* Über Sauggas und Sauggasmotoren. J. G. W. 45. 813; 837; 861.

2147. *E. C. Oliver.* Test of an Otto gasoline engine. Am. M. 1902. 897.

2148. *H. Güldner.* Berechnung der Hauptmasse der Verbrennungsmotoren. Z. V. D. I. 46. 606.

2149. *W. F. M. Goss.* Locomotive boiler testing. Eg. 73. 627; 660; 692.

2150. *M. Richter.* Schnellbetrieb auf den Eisenbahnen der Gegenwart. P. J. 317. 49; 59; 78; 539; 558; 647.

2151. *L. Austin.* Über den Wärmedurchgang durch Heizflächen. Z. V. D. I. 46. 1890.

2152. *P. Hase.* Zur Frage der generellen Wärmeregelung bei Zentralheizungen. G. I. 25. 241.

2153. *Rietschel.* Einiges über die Niederdruck-Dampfheizung. G. I. 25. 121.

2154. *Rietschel.* Die generelle Regelung der Wärmeabgabe der Heizkörper bei Niederdruckdampf durch die Höhe der Dampfspannung. G. I. 25. 173; 361. — *J. Kelling* 192. — *O. Ginsberg* 294. — *O. Hunaeus.* 349; 393.

2155. *A. V.* Berechnung einer Dampfheizung für eine Eisenbahnwagenwerkstätte. P. M. C. 35. 65.

2156. *Allardt.* Über Isolationsstoffe und Kühlräume, im besonderen die Kühlung der Munitionsräume auf Kriegsschiffen. Z. V. D. I. 46. 1366.

2157. *F. Krämer.* Über den zweckmäßigsten Kondensatordruck in Kohlensäuremaschinen für hohe Kühlwassertemperaturen. Z. G. K. 9. 66; 86; 233.

2158. *F. J. Weiss.* Kühlwasserakkumulator für Kondensatoren. Z. V. D. I. 46. 1449. 1494. 1591.

2159. *H. Fahlenkamp.* Über Rückkühlanlagen. Z. G. K. 9. 201.

2160. *R. Stetefeld.* Die 3 Kältemaschinensysteme Ammoniak, schweflige Säure und Kohlensäure zeigen für normale Kühlwassertemperaturen (+ 10° am Kondensatoreintritt und + 18° bis + 20° am Kondensatoraustritt) hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit keine Abweichungen zu Gunsten des einen oder anderen Systems, welche eine Systemfrage rechtfertigen. Z. G. K. 9. 141.

2161. *C. E. Stromeyer.* On explosions of steam pipes due to water — hammer. Eg. 73. 295.

2162. *P. Eitner.* Untersuchungen über die Explosionsgrenzen brennbarer Gase und Dämpfe. J. G. W. 45. 345; 362; 382; 397.

2163. *R. Rothe.* Über Flüssigkeitsthermometer für sehr tiefe Temperaturen. Z. I. 22. 192.

Zeichenwerkzeuge.

2164. —. Zieglers Dreieck zum Auftragen bestimmter Winkel und Neigungen. O. F. E. (2) 38. 243.

2165. *Puller.* Hilfsmittel zur Winkelbestimmung im Gradmaß. C. B. B. 22. 40.

2166. *E. Marzorati.* Der Planigraph. Z. I. 22. 209.

Reichel, Dr. **Otto,** Professor an der Königl. Landw. Hochschule zu Berlin, Vorstufen der höheren Analysis und analytischen Geometrie. Mit 30 Figuren im Text. [X u. 111 S.] gr. 8. 1904. geb. *M.* 2.40.

Salmon, George, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zweiter Teil. Sechste Auflage. [XXIV u. 416 S.] gr. 8. 1903. geh. *M.* 8.—, geb *M.* 9.—

Schenk, Dr. ing. **Julius,** Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen. Mit 45 Figuren im Text und auf einer Doppeltafel. [IV u. 59 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 1.60.

Schreber, Dr. **K.,** die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. Untersuchung der Frage: „Ist Wasser die vorteilhafteste Flüssigkeit zum Betriebe von Dampfmaschinen?" und Bearbeitung der auf diese Frage sich ergebenden Antworten. Mit 12 Zeichnungen im Text. [IV u. 126 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 3.60.

——— die Kraftmaschinen. Für Zuhörer an der Universität Greifswald gehaltene Vorlesungen über die wichtigsten der zur Zeit gebrauchten Kraftmaschinen. Mit 1 Tafel und 55 Abbildungen im Text. [XII u. 348 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 6.—, geb. n. *M.* 6.80.

Schulze, Bruno, Generalmajor und Chef der Topographischen Abteilung der Landesaufnahme, Das militärische Aufnehmen, unter besonderer Berücksichtigung der Arbeiten der Königl. Preuß. Landesaufnahme nebst einigen Notizen über Photogrammetrie und über die topographischen Arbeiten Deutschland benachbarter Staaten. Nach den auf der Königl. Kriegsakademie gehaltenen Vorträgen bearbeitet. Mit 129 Figuren im Text. [XIII u. 205 S.] gr. 8 1903. geb. n. *M.* 8.—

Seliwanoff, Demetrius, Priv. Dozent an der Universität St. Petersburg, Lehrbuch der Differenzenrechnung. [IV u. 92 S.] gr. 8. 1904. geb. *M.* 4.—

Serret-Bohlmann, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Dritter Band. Erste Lieferung. Differentialgleichungen. Herausgegeben von G. Bohlmann und E. Zermelo. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [304 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 6.— Zweite (Schluß-)Lieferung. [Erscheint im März 1904.]

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Herausgegeben vom Vorstand der Gesellschaft. Zweiter Jahrgang. [IV u. 68 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 2.—

Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 21.—, geb. n. *M.* 23.—

Thaer, Prof. Dr. **A.,** Bestimmung von Gestalt und Lage eines Kegelschnitts aus einer Gleichung zweiter Ordnung ohne Koordinaten-Transformation. Mit einer Tafel. [40 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 1.40.

Weber, H., Professor in Straßburg, und **J. Wellstein,** Professor in Gießen, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. In 3 Bänden. [I. Elementare Algebra und Analysis. II. Elementare Geometrie. III. Anwendung der Elementarmathematik.] I. Band. [XIV u. 446 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. *M.* 8.— [Bd. II u. III. 1904. Unter d. Presse.]

Weinnoldt, Dr. **Ernst,** Professor an der Kaiserlichen Marine-Akademie und -Schule zu Kiel, Leitfaden der analytischen Geometrie. Auf Veranlassung der Kaiserlichen Inspektion des Bildungswesens der Marine. Mit 62 Figuren im Text. [VI u. 80 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 1.60.

Wienecke, Ernst, Lehrer in Berlin, der geometrische Vorkursus in schulgemäßer Darstellung. Mit reichem Aufgabenmaterial nebst Resultaten z. Gebr. an allen Lehranst. Mit 59 Fig. i. Text. [IV u. 97 S.] gr. 8. 1903. geb. n. *M.* 2.20.

Wölffing, Dr. **Ernst,** Professor an der Königl. Techn. Hochschule zu Stuttgart, Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis d. wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher u. Monographien d. 19. Jahrhunderts a. d. Gebiete d. mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. I. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Heft XVI, 1. [XXXVI u. 416 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 14.—, geb. n. *M.* 15.—

ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

R. MEHMKE IN STUTTGART. UND C. RUNGE IN HANNOVER.

50. BAND. 3. HEFT.

MIT 18 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 10. Mai 1904.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Hannover-Kirchrode, Kaiser Wilhelmstr. 9, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

M. Baroni, V. Bjerknes, A. Börsch, G. Bohlmann, M. Distell, K. Doehlemann, E. Häntzschel, G. Hamel, L. Henneberg, K. Heun, J. Horn, A. Kneser, L. Krüger, F. Ludwig, R. Mehmke, R. v. Mises, O. Mohr, E. Müller, † J. Petzval, R. Rothe, C. Runge, G. Scheffers, Fr. Schilling, J. Schnöckel, A. Sommerfeld, P. Stäckel, S. Trozewitsch, P. Werkmeister, C. W. Wirtz, E. Wölffing.

Die Entwicklung des Problems der stetigen Kraftmaschinenreglung nebst einem Versuch der Theorie unstetiger Reglungsvorgänge.

Von Dipl. Ing. Wilhelm Hort in Göttingen.

Unter den verschiedenen Fragen, deren Lösung sowohl für die ausführende Technik als auch für die reine Wissenschaft von größtem Interesse ist, nimmt das Problem der Kraftmaschinenreglung eine der ersten Stellen ein. Den Beweis für diese Behauptung liefert das Literaturverzeichnis des Problems, welches die Namen von Mathematikern und Ingenieuren in bunter Reihenfolge aufweist, wenn auch die letzteren in der Mehrzahl vertreten sind.

Dank den Bemühungen dieser berufenen Forscher ist die Reglerfrage für Maschinen mit stetiger Energiezufuhr bis zu einem gewissen Grade beantwortet, so daß es von Wichtigkeit sein dürfte, nunmehr die Ergebnisse zusammen zu stellen und womöglich den neuesten Stand der Forschung scharf zu bestimmen. Anderseits ist die Theorie der Reglung nach Seite der Kolbenkraftmaschinen erweiterungsbedürftig, da die bis jetzt entwickelten Ansätze sich mit voller Strenge nur auf Maschinen mit stetiger Reglung anwenden lassen, während für Maschinen mit unstetiger Reglung die Kennzeichen für die Stabilität des Reglungsvorganges überhaupt noch nicht bekannt sind.

Die vorliegende Arbeit beabsichtigt nun, in einem ersten Teile die Entwicklung des Problems in ihren Hauptpunkten kritisch zu kennzeichnen, während in einem zweiten eigene Untersuchungen des Verfassers zur Theorie der Kraftmaschinen mit unstetiger Reglung mitgeteilt werden sollen.

I. Die Entwicklung des Regulierproblems.

Allgemein gesprochen sind die Regler, die wir hier im Auge haben, Vorrichtungen zur selbsttätigen Erhaltung einer möglichst gleichförmigen Bewegung der zugehörigen Maschine. Die Maschine besitzt stets zwei von einander unabhängige Kraftfelder: das Feld der treibenden Kräfte (Dampf, Wasser, Wind usw.) und das Feld der widerstehenden Kräfte (die angetriebenen Arbeitsmaschinen, Reibungen usw.). Das Feld der Wider-

standskräfte ist nun stets durchaus willkürlichen, zufälligen Veränderungen ausgesetzt, die durch Aus- oder Einschaltung einer oder mehrerer der angetriebenen Maschinen hervorgerufen werden. Diesen Änderungen gegenüber hat der Regler das Feld der treibenden Kräfte derart zu beeinflussen, daß die eintretenden Geschwindigkeitsschwankungen innerhalb vorgeschriebener Grenzen möglichst klein ausfallen. Dabei wollen wir im folgenden zufällige Änderungen des Antriebsfeldes (durch Änderung des Kesseldruckes bei Dampfmaschinen, des Gefälles bei Turbinen, der Windgeschwindigkeit bei Windrädern) als ausgeschlossen betrachten.

Die Regler, die dem angegebenen Zwecke dienen, können nun auf drei grundsätzlich verschiedene Weisen in Wirksamkeit treten:

1) Die Ursache, die das Widerstandsfeld der Maschinen ändert, ändert gleichzeitig auch das treibende Feld.

2) Die Änderung des Widerstandsfeldes bewirkt die entsprechende Änderung des Antriebsfeldes.

3) Die bei Änderung des Widerstandsfeldes eintretende Geschwindigkeitsänderung ändert das Antriebsfeld.

Regler der ersten beiden Arten finden in der Praxis nur wenig Verwendung und sollen daher in den folgenden Erörterungen nur gelegentlich der Vollständigkeit halber erwähnt werden. Wir beschränken uns im übrigen wesentlich auf die Theorie der Maschinen mit *Geschwindigkeitsreglern.*

Der Erfinder der einfachsten Art von Geschwindigkeitsreglern, des Zentrifugalregulators, ist bekanntlich James Watt, dem derselbe durch Patent vom Jahre 1784 geschützt wurde. Er hat von dieser Zeit an bis etwa zu Anfang der fünfziger Jahre des 19. Jahrhunderts seinen Platz als Lenker der Dampfmaschine siegreich behauptet, trotz mannigfacher Angriffe, die von den Erfindern anderer Reglerarten gegen ihn gerichtet wurden. Es lag das daran, daß er zwar nicht besser als seine Mitbewerber, wohl aber wesentlich einfacher als diese war.

Schon zu Poncelets Zeiten gab es eine ganze Anzahl von Abarten des Wattschen Regulators neben anderen Einrichtungen, die auf dem oben unter 2) gekennzeichneten Prinzip beruhen, darunter eine von Poncelet selbst. Sie sind alle in Poncelets Cours de mécanique appliquée (1826) ausführlich behandelt, allerdings lediglich vom statischen Standpunkt aus, indem nur der Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit der Spindel des Reglers und seiner Gestalt untersucht wird.

Poncelet hatte übrigens in der Art der Betrachtung der Regulatoren einen Vorgänger in dem Engländer Tredgold, der in seinem

Traité des machines à vapeur[1]) von ähnlichen Gesichtspunkten wie Poncelet ausgeht.

Beide Autoren waren von einer dynamischen Betrachtung der Reglungsfragen noch weit entfernt, trotzdem Poncelet auf anderen Gebieten der technischen Mechanik durch Einführung dynamischer Methoden bahnbrechend gewirkt hat.

Nach Tredgold und Poncelet wurde lange Jahre nichts wesentlich Neues auf diesem Gebiete geleistet. Zu jeder neuerfundenen Form wurde eine „Theorie“ aufgestellt; trotzdem gerieten alle jene Konstruktionen wieder in Vergessenheit. In der Hauptsache drehte sich in den bezüglichen Erörterungen der technischen Zeitschriften um die Mitte des vorigen Jahrhunderts die Frage darum, ob ein "*statischer*", „*astatischer*“ oder „*pseudoastatischer*“ Regulator am günstigsten wirke. Man kam dabei auf Grund der von Tredgold und Poncelet aufgestellten Theorien zu der Meinung, daß ein „statischer“ Regulator unbrauchbar sei, da derselbe nach Eintritt einer Bewegungsstörung nur unter Zulassung einer von der normalen etwas abweichenden Geschwindigkeit den neuen Beharrungszustand herbeiführe; dem gegenüber wurden die „astatischen“ Regulatoren bevorzugt, weil bei Anwendung derselben der neue Beharrungszustand unter normaler Maschinengeschwindigkeit sich einstelle. Diese theoretischen Ergebnisse waren jedoch durchaus nicht im Einklang mit den Tatsachen; es gab Maschinen, bei denen „astatische“ Regulatoren sich scheinbar bewährten, neben solchen, bei denen die geringste Störung die bedenklichsten Geschwindigkeitsschwankungen veranlaßte. Ähnlich lag die Sache bei den statischen Regulatoren. Die Gründe für dies widersprechende Verhalten waren nicht bekannt; sie konnten auch mit Hilfe der üblichen Regulatortheorien nicht festgestellt werden. So kam es, daß alle diesbezüglichen Erörterungen zu keinem einigermaßen brauchbaren Ergebnis führten.

Erst Reuleaux[2]) wies 1859 darauf hin, daß der Regulator zugleich mit dem von ihm betätigten Steuerungsmechanismus betrachtet werden müsse. Seine Ausführungen, die allerdings auf die Größe der Wirkungen keine Rücksicht nehmen, gipfeln in der Behauptung, daß ein statischer Regulator nur in Verbindung mit einem indirekten, ein astatischer nur in Verbindung mit direktem Reguliermechanismus brauchbar sein könne. In wie weit diese Behauptung gerechtfertigt ist, werden wir weiter unten an Hand einer später gefundenen genauen Theorie sehen.

1) Franz. Übers. d. engl. Werkes, bes. v. Mellet, erwähnt bei Poncelet. — Zweite Ausg. d. franz. Übers. Paris 1838.

2) Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1859. S. 59.

Aus dem Wirrwarr der unzähligen Schriften jener Zeit über unsern Gegenstand ragt, weil von einem ganz andern Geiste beseelt, eine Arbeit von G. B. Airy[1]) hervor: On the Regulator of the Clockworks for effecting uniform Movement of Equatoreals. Hier werden meines Wissens zum erstenmal die Differentialgleichungen der Bewegung des Zentrifugalpendels aufgestellt und unter Heranziehung der bekannten Substitution für kleine Schwingungen integriert. Das Ziel der Untersuchung ist, das Verhältnis der Schwingungsdauer des Pendels zur Drehungsdauer des Reglers zu bestimmen und so Aufschluß über die Gleichförmigkeit der Drehung zu erhalten, eine Aufgabe, welche für vier verschiedene Fälle gelöst wird. Für den Dampfmaschinenregler sind allerdings die Ansätze Airys durchaus nicht direkt brauchbar, schon weil die Maschine ganz außer Acht bleibt, es ist aber immerhin verwunderlich, daß niemand von den Zeitgenossen Airys auf den Gedanken kam, auch den Dampfmaschinenregler in ähnlicher rationeller Weise zu behandeln. Keiner von den Vertretern der technischen Mechanik jener Zeit, die für die Entwicklung der kinetischen und kinetostatischen Probleme der Maschinentechnik so bedeutendes geleistet haben, sind der Frage mit den Mitteln, die ihnen zu Gebote standen, näher getreten. Poncelets Standpunkt ist schon oben gekennzeichnet; Rankine[2]) in seinem Manual of applied Mechanics berührt sie nicht einmal, und Redtenbacher[3]) in seinem „Maschinenbau“ beschränkt sich auf die übliche Erörterung des statischen und astatischen Regulators.

Und doch hatte wieder Airy[4]) inzwischen im Jahre 1851 die Differentialgleichung des gebremsten Zentrifugalregulators, des einzig brauchbaren, wie sich später ergab, aufgestellt und die drei verschiedenen Formen des Integrals derselben diskutiert.

Diese erste Periode der ergebnislosen Erörterung dauerte bis zum Jahre 1861, in welchem eine Arbeit von J. Lüders[5]) erscheint, die den damaligen Stand der Frage feststellt, die bis dahin bekannten Arten von Reglern einteilt (welcher Einteilung ich mich oben angeschlossen habe) und sie einer allgemeinen Erörterung unterzieht. Ferner wird schon klar der Gedanke ausgesprochen, daß nur eine eingehende Diskussion des Verlaufs des Reglungsvorganges über die Brauchbarkeit des Reglers entscheiden könne, und auf die Notwendigkeit der Vornahme von Experimenten hingewiesen. Zu einer Aus-

1) Mem. of the Astr. Soc. of Lond. 1839. (XI).
2) Rankine, a Manual of applied Mechanics. Lond. 1858.
3) Redtenbacher, Maschinenbau. Mannheim 1862—65.
4) Mem. of the Astr. Soc. of Lond. 1851. (XX).
5) Zeitschr. d. V. d. Ing. 1861. S. 60.

führung dieser Gedanken gelangte er erst im Jahre 1865. Wieder in der Z. d. V. d. I. erschien eine Arbeit[1]), die als der Ausgangspunkt aller neueren Untersuchungen über die Reglungsfrage betrachtet werden muß. Es ist nicht uninteressant, die Schlußweise von Lüders hier kurz darzulegen. Er geht von der Energiegleichung der betrachteten Maschine aus, die wir schreiben

$$\frac{1}{2}\Theta(\omega^2 - \omega_0^2) = \int_{p_0}^{p} P\,dp - \int_{q_0}^{q} Q\,dq, \tag{1}$$

wo bedeutet: Θ das Trägheitsmoment des rotierenden Teils der Maschine, ω die Winkelgeschwindigkeit, $\int P\,dp$ die Arbeit des Antriebsfeldes, $-\int Q\,dq$ die Arbeit des Widerstandsfeldes. Die Behauptung, die nun folgt, daß im Beharrungszustande für jeden Wert von p und q

$$\int_{p_0}^{p} P\,dp = \int_{q_0}^{q} Q\,dq \tag{2}$$

sei, ist allerdings nicht richtig, da sie die Konstanz von P und Q voraussetzt, die wohl bei Turbinen, jedoch nicht bei Dampfmaschinen oder Gasmotoren besteht. Bei diesen findet die Gleichheit jener Integrale nur statt, wenn sich p und p_0 bezw. q und q_0 um ein ganzes Vielfaches der Periode der Maschinenbewegung, d. h. von 2π bei Dampfmaschinen, von 4π bei Gasmotoren, unterscheiden. Da sich jedoch die Untersuchungen von Lüders nur auf Turbinen und Wasserräder zu beziehen scheinen, so fällt diese fehlerhafte Anschauung nicht weiter ins Gewicht.

Lüders stört nun den Beharrungszustand durch plötzliche Änderung von Q und untersucht die beginnende Tätigkeit des Reglers und seine Einwirkung auf den Gang der Maschine. Er unterscheidet dabei drei verschiedene Arten der Einwirkung des Reglers:

1) Indirekte Regulierung: Der Regler kuppelt bei Änderung der Normalgeschwindigkeit das Stellzeug[2]) mit der Maschine; es ist der Weg des Stellzeuges von da an einfach eine Funktion der Maschinenbewegung:

$$s = f(p). \tag{3}$$

2) Differenz-Regulierung: Außer der eigentlichen Maschine ist noch ein von ihr unabhängiger Rotationsmechanismus angeordnet, der im Be-

---

1) Zeitschr. d. V. d. Ing. 1865.

2) Eine Definition des Begriffes Stellzeug ist unten S. 264 gegeben.

harrungszustand bei konstanter Winkelgeschwindigkeit mit der Maschine synchron läuft. Wird dieser Zustand der Hauptmaschine gestört, so treten zwischen ihr und dem Rotationsmechanismus Relativdrehungen auf, die zur Betätigung des Stellzeugs derart benutzt werden, daß der Weg desselben

$$s = f[at - \varphi(p)] \tag{4}$$

wird, wo a eine Konstante, t die Zeit, $\varphi(p)$ eine Funktion des Maschinenweges ist.

3) Direkte Regulierung. Der Regler betätigt das Stellzeug direkt; die Bewegung desselben wird hier in Gestalt einer Differentialgleichung gegeben:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = f(\omega). \tag{5}$$

Was das Antriebsfeld P angeht, so wird angenommen, daß dasselbe im Beharrungszustande eine Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω sei, welche Annahme dadurch gerechtfertigt ist, daß z. B. bei Wasserrädern die Füllung der einzelnen Zellen und mithin die treibende Kraft wegen der Konstanz der in der Zeiteinheit zufließenden Wassermenge mit steigender Geschwindigkeit abnimmt. Während des Reglungsvorganges ist dann außerdem P von der Stellzeugbewegung abhängig, sodaß gesetzt werden kann

$$P = P(\omega, s).$$

Indem noch der Weg q des Widerstandsfeldes wegen des kinematischen Zusammenhanges der betreffenden Maschinenteile gesetzt wird

$$q = \psi(p),$$

so ergeben sich aus der Energiegleichung für die drei Reglerarten folgende Differentialgleichungen:

1) Für den indirekt wirkenden Regulator

$$\begin{aligned} &1.\ \Theta\omega d\omega = [P(\omega, s) - Q \cdot \psi(p)]dp, \\ &s = s(p). \end{aligned} \tag{6}$$

2) Für den Differenz-Regulator

$$\begin{aligned} &2.\ \Theta\omega d\omega = [P(\omega, s) - Q\psi(p)]dp, \\ &s = s(at - \varphi(p)). \end{aligned} \tag{7}$$

3) Für den direkt wirkenden Regulator

$$\begin{aligned} &3.\ \Theta\omega d\omega = [P(\omega, s) - Q\psi(p)]dp, \\ &\frac{d^2s}{dt^2} = f(\omega). \end{aligned} \tag{8}$$

Führt man nun $\omega = \frac{dp}{dt}$ ein, so sieht man sofort, daß man es mit totalen Differentialgleichungen zu tun hat, die für besondere Fälle der auftretenden Funktionen P, ψ, s, f, φ unter Umständen integriert werden können.

Es ist nun sehr bemerkenswert, daß Lüders die Differentialgleichungen 2) und 3) garnicht diskutiert, obwohl sie den Gesamtverlauf des zugehörigen Störungsvorganges beschreiben, während die indirekte Regulierung zu den unstetigen Vorgängen gehört, die sich nur durch absatzweises Integrieren und Untersuchung der erhaltenen Integralfolge beherrschen lassen. Gerade diese Regulierungsart hat aber Lüders eingehend untersucht unter den vereinfachenden Annahmen, daß P und Q unabhängig von $\omega = \frac{dp}{dt}$ sei, daß man es für $\psi(p) = p$ mit einer Turbine zu tun habe und daß P in die Form $P \cdot f(p)$ gebracht werden könne, wo $f(p)$ in p linear ist.

Unter diesen Umständen ergibt sich, daß bei indirekter Regulierung eine Störung des Beharrungszustandes nie zu einem neuen Gleichgewichtszustande führen kann, sondern daß die Maschine dauernde, allerdings endlich bleibende Schwankungen der Winkelgeschwindigkeit vollführt.

Dieses Resultat ist jedoch lediglich eine Folge der gemachten Voraussetzungen und der Annahme, daß der Regler ein vollkommener ohne Massenwirkung und Unempfindlichkeit sei, der bei der geringsten Abweichung der Winkelgeschwindigkeit von ihrem Normalwert das Stellzeug einrückt, um es bei Wiedereintritt der Normalgeschwindigkeit ebenso rasch wieder auszurücken. Lüders ist dieser Umstand nicht verborgen geblieben, er untersucht deshalb noch den Reglungsvorgang unter Berücksichtigung der Unempfindlichkeit sowie unter der Annahme, daß das treibende Kraftfeld von der Maschinengeschwindigkeit beeinflußt wird. Diesen Verwicklungen ist er jedoch nicht gewachsen, und sein Beweis, daß in diesem Falle der Reglungsvorgang konvergent verläuft, ist im höchsten Grade unstreng; seine Behauptungen werden lediglich durch eine graphische Darstellung glaubhaft gemacht. Immerhin bleibt seine Arbeit als ein erster Versuch, mit Hilfe der Dynamik Licht in die schwierige Frage zu bringen, bemerkenswert, wenn er auch aus den aufgestellten Differentialgleichungen keine Schlüsse zu ziehen vermag.

Nach Lüders hat sich zunächst der Franzose Rolland mit der Frage befaßt. Er greift in seiner Arbeit „Mémoire sur l'établissement de Régulateurs de la vitesse"[1]) zunächst zurück auf die alten statischen

1) Journ. de l'éc. polytechnique 1870.



Ansätze Poncelets und beschäftigt sich an der Hand derselben eingehend mit dem „problème de l'isochronisme", d. h. der Frage, wie man ganz allgemein einen Regler astatisch machen könne. Die erhaltenen Bedingungsgleichungen führt er in die Energiegleichung des Reglers ein und sucht nun festzustellen, welche Eigenschaften derselbe haben muß, damit bei einer Störung des Beharrungszustandes die von ihm beherrschte Maschine unter nur kleinen Schwankungen der Winkelgeschwindigkeit in den neuen Gleichgewichtszustand übergehe. Er sucht seinen Zweck zu erreichen durch möglichste Verminderung der trägen Massen des Regulators unter Vermeidung von Dämpfungseinrichtungen, da durch diese die Empfindlichkeit des Apparates verkleinert werde. Von diesen Ergebnissen ist nur eines richtig, nämlich die Erkenntnis der Schädlichkeit der trägen Massen; dagegen ist das Streben nach einem astatischen Regulator durchaus zwecklos, wie einige Jahre später bewiesen wurde; ebenso verkehrt ist es, alle Reibungen oder Dämpfungen vermeiden zu wollen, da ein gänzlich ungedämpfter Regler zur Maschinenreglung überhaupt unbrauchbar ist.

In der von Lüders eingeschlagenen Richtung ging zunächst Kargl weiter mit einem „Beitrag zur Lösung der Regulatorfrage".[1]) Hier wird zum ersten Mal in der rein technischen Literatur die Schwingungsgleichung des damals allgemein gebräuchlichen Watt-Porter-Regulators aufgestellt, zunächst noch ohne Dämpfungsglied in der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax = c, \tag{9}$$

wo t die Zeit, x den Muffenhub, a und c von der Konstruktion des Mechanismus abhängige Konstanten bezeichnen. Mit dieser Gleichung wird die Bewegungsgleichung der Dampfmaschine

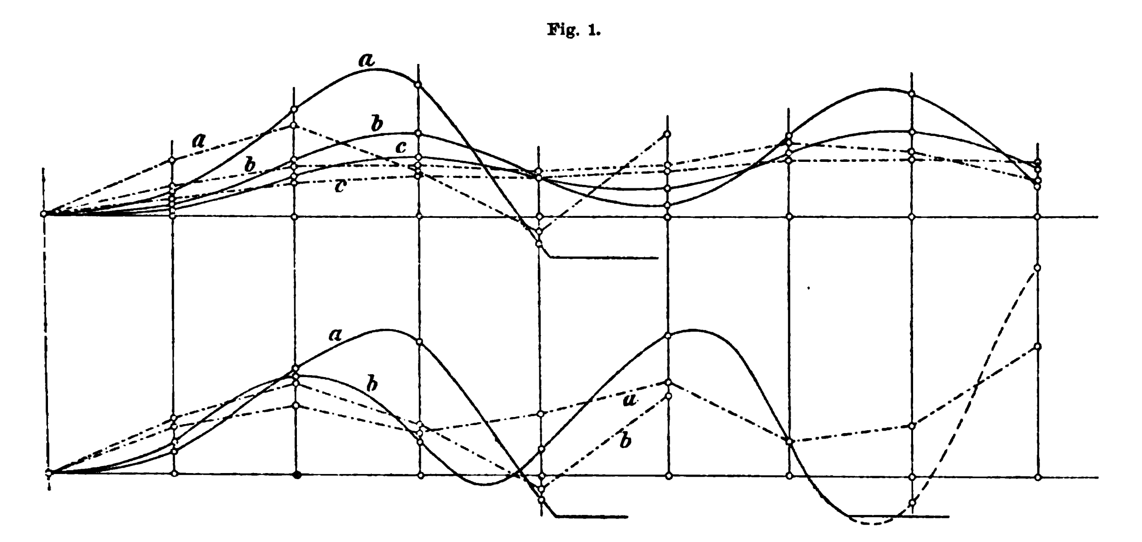
$$p = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{T - W}{rM} \tag{10}$$

zusammengestellt, in welcher ϑ den Kurbelwinkel, T den mittleren Tangentialdruck, W den Tangentialwiderstand, r den Kurbelradius, M das Trägheitsmoment der rotierenden Teile der Maschine bedeutet. Interessant ist es nun, daß Kargl diese Differentialgleichungen sofort auf den Fall der unstetigen Reglung, also auf die Dampfmaschine anwendet, unter Übergehung des viel näher liegenden der stetigen Einwirkung des Reglers auf das Antriebsfeld der Maschine. Die Differentialgleichungen werden dazu benutzt, den Verlauf einer Störung des Beharrungszustandes zahlenmäßig und graphisch an dem Beispiel einer

1) Zivilingenieur 1871, S. 266.

ausgeführten Maschine zu verfolgen. Das Ergebnis ist in den beistehenden Figuren dargestellt. Die ausgezogenen Kurven geben die Bewegungen der Reglermuffe wieder, die gestrichelten die Schwankungen der Winkelgeschwindigkeit. Um nun den Einfluß bestimmter Konstanten des Reglers auf den Verlauf der Reglung zu verfolgen, und zwar solcher Konstanten, die an einer vorhandenen Anlage leicht geändert werden können, nämlich des Verhältnisses der Hebelübersetzung von der Reglermuffe zum Steuerungsmechanismus, sowie der Umdrehungszahl der Reglerspindel, konstruierte Kargl die Reglungskurven für verschiedene Werte dieser Konstanten. In Fig. 1 entsprechen die

Fig. 1.



Kurven *a*, *b* *c* den Übersetzungsverhältnissen 1 : 1, 2 : 1, 3 : 1, bei einem Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten von Spindel und Maschinenwelle von 1,03. Man erkennt deutlich, daß bei Verkleinerung des Übersetzungsverhältnisses der Verlauf der Reglung günstiger wird. In Fig. II sind dagegen zwei Reglungskurven *a* und *b* für dasselbe Übersetzungsverhältnis 1 : 1, aber für verschiedene Winkelgeschwindigkeitsverhältnisse, nämlich 1,03 und 1,12 gezeichnet. Auch hier fällt die günstige Wirkung einer Vergrößerung der Winkelgeschwindigkeit der Spindel sofort in die Augen.

In einer weiteren Arbeit[1]) gibt dann Kargl noch den Beweis der Unbrauchbarkeit sämtlicher astatischer Regulatoren, d. h. solcher, die bei einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit ihrer Spindel in allen Lagen im Gleichgewicht sind. Der Beweis ist jedoch nicht ganz streng,

1) Zivilingenieur 1873, S. 421.

weil keine Rücksicht auf die Wirkung des Stellzeugs auf das Kraftfeld der Maschine genommen ist und einige nicht ganz einwandsfreie Vernachlässigungen vorgenommen werden; das Resultat ist jedoch richtig. Wir werden übrigens weiter unten einen strengen Beweis des Karglschen Satzes kennen lernen. Durch diese Arbeit wurde zugleich die oben mitgeteilte Reuleauxsche Ansicht von der Brauchbarkeit eines astatischen Regulators in Verbindung mit einem direkten Reguliermechanismus als unhaltbar dargetan. Wenn seitdem von „astatischen“ Regulatoren die Rede ist, so sind immer solche gemeint, die bei relativ großem Muffenhub kleinen Ungleichförmigkeitsgrad haben.

Inzwischen war auch wieder von französischer Seite die Reglerfrage in Angriff genommen worden, und zwar war es der Ingenieur Worms de Romilly, der 1872[1]) in höchst scharfsinniger Weise das Problem behandelte. Er stellt die Schwingungsgleichung des aus Maschine und Regulator bestehenden Systems ganz allgemein in der Form auf:

$$l\frac{d^2U}{dt^2} + D\frac{dU}{dt} + BU + D\eta_0 = 0, \tag{11}$$

wo gesetzt ist

$$U = \int_0^t \eta\, dt. \tag{12}$$

η bedeutet hier die als klein vorausgesetzten Ausschläge des Reglers; l, D, B, η_0 sind Konstante.

Diese Gleichung liefert jedoch auch in dem Fall des astatischen Regulators, wo sie mit $D = 0$ lautet:

$$l\frac{d^2U}{dt^2} + BU = 0, \tag{13}$$

nur divergent verlaufende Schwingungen, was daher rührt, daß das Reibungsglied fehlt. Die entsprechende Maschinenanordnung erweist sich also unter Vernachlässigung des Reibungseinflusses als theoretisch unbrauchbar. Romilly bespricht dann noch den Foucaultschen Regulator, der zur Klasse der später genauer zu behandelnden Beharrungsregler gehört, stellt die zugehörige Differentialgleichung auf und findet (unter Einführung einiger Vernachlässigungen), daß das Integral derselben Schwingungen von gleichbleibender Amplitude liefert. Dieser Regler erscheint ihm daher als brauchbar, wenn die Schwingungen innerhalb der zulässigen Grenzen bleiben. Diese Ergebnisse waren zu erwarten; ohne Reibung, bezw. Dämpfung, tritt entweder Resonanz auf, oder der Regler vollführt seine Eigenschwingung.

1) Annales des Mines 1872, T. I, p. 36.

Die Klärung dieser Sachlage erfolgte einige Jahre später durch Wischnegradsky, Professor am technologischen Institut zu St. Petersburg, dessen Arbeit[1]) über „direktwirkende Regulatoren" als grundlegend für die heutige Reglungstheorie betrachtet werden muß.

Die Störungsbewegung der Maschine wird hier auf zwei simultane Differentialgleichungen zurückgeführt:

$$(14)\qquad \begin{cases} 1)\ \Theta \dfrac{d\omega}{dt} + a \cdot u = r(P - W), \\ 2)\ \dfrac{d^2u}{dt^2} + b\dfrac{du}{dt} + cu \pm (R' + R'') = kg\dfrac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \end{cases}$$

von denen die erste sich auf die eigentliche Maschine, die zweite auf den Regler bezieht. Es bedeutet darin ω die Winkelgeschwindigkeit der Maschine, u den Muffenhub des Reglers, während die übrigen Größen Konstanten der Maschine sind, auf deren Bedeutung hier nicht eingegangen werden soll. Durch Differentiation von 2) nach t und Elimination von $\frac{d\omega}{dt}$ erhält man eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$(15)\qquad \frac{d^3u}{dt^3} + \frac{bd^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + \frac{kga}{\Theta\omega_0}u = \frac{kgr(P - W)}{\Theta\omega_0},$$

deren allgemeines Integral sofort den Verlauf der Störung liefert. Ebenso kann man für ω dieselbe Differentialgleichung ableiten.

In dieser Gleichung ist das Glied $b\frac{d^2u}{dt^2}$ bemerkenswert; dasselbe trägt dem Einfluß eines Nebenapparates des Regulators, des sogenannten Kataraktes oder der Ölbremse, die eine Dämpfung bewirkt, Rechnung. Die Vorgänger Wischnegradskys hatten diese Dämpfung einzuführen unterlassen, sodaß sie durchweg zu negativen Resultaten kamen.

Das allgemeine Integral jener Differentialgleichung läßt sich bekanntlich folgendermaßen schreiben:

$$(16)\qquad 3)\ u = A_1e^{\alpha_1 t} + A_2e^{\alpha_2 t} + A_3e^{\alpha_3 t} + \frac{(P - W)r}{a},$$

wo $A_1 A_2 A_3$ willkürliche Konstanten und $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ die Wurzeln der Gleichung

$$(17)\qquad 4)\ \alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + \frac{kg}{\Theta\omega_m} = 0 \text{ sind.}$$

Die Konvergenz des durch 3) beschriebenen Schwingungsvorganges hängt von dem Vorzeichen und der Realität der Wurzeln der Gleichung 4) ab und somit von einfachen Bedingungen, denen die Kon-

1) Zivilingenieur 1877, S. 95. — Comptes Rendus t. 83, Nr. 5 (Auszug).

stanten der Maschine und des Reglers zu genügen haben, damit eine stabile Regulierung möglich wird. Abgesehen von höchst brauchbaren Formeln für die Vorausberechnung der Regler kommt Wischnegradsky auf diese Weise zu folgenden Sätzen:

1) Ohne Katarakt ($b = 0$) ist jeder Zentrifugalregulator für eine stabile Regulierung unbrauchbar.

2) In jedem Falle kann die Größe b der Kataraktwirkung so bestimmt werden, daß die Störung aperiodisch zum neuen Gleichgewichtszustand führt.

3) Ein astatischer Regulator ($c = 0$) ist auch in Verbindung mit einem Katarakt unbrauchbar.

In diesen Sätzen[1]) ist die ganze Theorie der stetig und direkt wirkenden Regler enthalten. Leider haben jedoch die Wischnegradskyschen Sätze in der ausführenden Technik die ihnen gebührende Beachtung nicht gefunden.

Die Wischnegradskysche Arbeit muß als Abschluß einer zweiten Periode in der Entwicklung des Regulierproblems betrachtet werden, die von Lüders (siehe oben) ab zu rechnen ist. Gekennzeichnet ist diese Periode dadurch, daß die Dynamik zur Erkenntnis der Reguliervorgänge herangezogen wurde, in etwas absonderlicher Form zunächst (siehe die Differentialgleichungen von Lüders), bis schließlich Wischnegradsky den richtigsten Weg einschlug, der ihn zur Klarlegung der Theorie der direkt wirkenden Regulatoren führte.

Nach Wischnegradsky wurde die schon von Lüders begonnene Untersuchung der indirekten Regulierung wieder aufgenommen, mit der sich übrigens Wischnegradsky ebenfalls beschäftigt zu haben scheint. Wenigstens teilt er in einer Anmerkung zu der oben erwähnten Arbeit

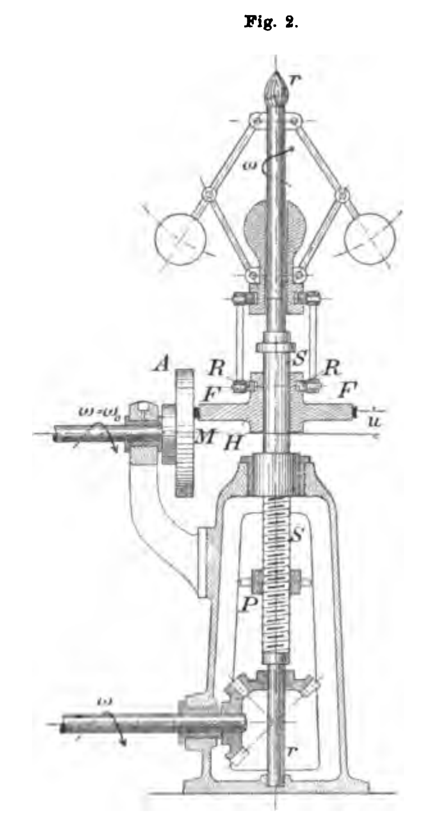
---

1) In ähnlicher Weise hatte schon 1868 J. C. Maxwell, in einer Arbeit, die auf dem Kontinent so gut wie unbekannt geblieben zu sein scheint, Proc. of th. R. S. of L. Vol. 16, die dynamische Theorie der Regulatoren in Angriff genommen. Auch er gelangt zu einer Differentialgleichung dritter Ordnung mit Dämpfungsglied, sodaß ihm in dieser Hinsicht die Priorität vor Wischnegradsky gebührt; doch kommt er nicht bis zur Aufstellung so klarer Sätze wie die Wischnegradskyschen. Übrigens behandelt Maxwell in dieser Arbeit auch noch verwickeltere Reguliereinrichtungen, deren Untersuchung auf ähnliche Gleichungen führt wie sie unten auf S. 254 für den Hartmannschen Regulator aufgestellt sind. Doch hat Maxwell leider unterlassen, sich eingehender über die zu Grunde gelegten Mechanismen zu äußern, sodaß es unmöglich ist, volle Einsicht in seine Entwicklungen zu gewinnen. — Interessant ist noch, daß Maxwell bereits den Mangel empfindet, der darin lag, daß damals die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Auftreten von Wurzeln mit nur negativen reellen Bestandteilen für höhere Gleichungen noch nicht bekannt waren. Diesen Mangel hat erst Hurwitz 1895 beseitigt. (Vgl. unten.)

mit, daß die Differentialgleichung der Bewegung in diesem Falle von der vierten Ordnung sei; doch hat er meines Wissens eine Ableitung derselben nirgend veröffentlicht.

Da die späteren Forscher von ganz anderen Gesichtspunkten ausgehen, so will ich im folgenden zunächst einen indirekten Reguliermechanismus betrachten, der auf eine Differentialgleichung 4. Ordnung führt; ich vermute, daß Wischnegradsky eine ähnliche Einrichtung im Auge gehabt hat. Die Anordnung (s. Fig. 2) sei folgende: Das Rad A werde durch die Welle $\omega = \omega_0$ von der Maschine oder von einem Hilfsmotor aus in Drehnng erhalten. Vor der Planseite des Rades ist die senkrechte Spindel rr eines Zentrifugalregulators aufgestellt, der von der Welle aus in Drehung um rr gesetzt wird. Über die Spindel rr ist eine Hülse S mit Schraubengewinde geschoben, die gegen rr zwar drehbar, aber nicht axial verschiebbar ist. Das obere glatte Ende dieser Hülse trägt eine zweite Hülse H mit Reibungsrad F, die gegen S nur axial verschiebbar, aber nicht drehbar ist. Die Hülse H ist durch den Ring RR mit dem Gestänge des Reglers verbunden.

Fig. 2.



Bei der mittleren Geschwindigkeit w_1 der Maschine verharre nun der Regler in einer solchen Lage, daß das Reibungsrad F die Scheibe A in ihrem Mittelpunkt M berührt. F bleibt dann dauernd in Ruhe, so lange die Maschine mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 läuft. Ändert sich nun ω_0 infolge einer Störung des Beharrungszustandes, so sucht der Regler das Rad F zu heben oder zu senken, wodurch dasselbe von der Scheibe A in Drehung versetzt wird und seinerseits die Schraubenspindel S mitnimmt. Durch die Drehung von S wird dann die Änderung des Kraftfeldes bewirkt, in dem die Schraubenmutter P das Regulierorgan vorstellt.

Die Differentialgleichungen der Bewegung ergeben sich nun folgendermaßen.

Es gilt für die Maschine selbst

$$\Theta \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = (P - W) r - a \frac{d\vartheta}{dt}, \tag{18}$$

wo Θ das Trägheitsmoment des Schwungrades, ϑ den Drehungswinkel der Maschinenwelle, r den Angriffsradius des Kraftfeldes bedeutet. Letzteres besteht aus 2 Teilen, dem treibenden vom Regulator beeinflußten P und dem widerstehenden, nach Eintritt der Störung konstanten W. Das Glied $-a \frac{d\vartheta}{dt}$ soll der Lagerreibung der Maschinenwelle Rechnung tragen.

Für den Regulator gelte folgende Bewegungsgleichung;

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + M \frac{du}{dt} + Nu \mp (R' + R'' + kg) = \frac{kg}{\omega_0} \frac{d\vartheta}{dt}, \tag{19}$$

während die treibende Kraft P zur Zeit t nach Eintritt der Störung folgenden Wert hat:

$$P = P_0 - c \int_0^t u \omega \, dt, \tag{20}$$

wo P_0 den Wert vor der Störung, c eine Konstante bedeutet, u und $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ aus der Figur zu entnehmen sind. Es ist hierbei angenommen, daß P sich proportional dem von der Mutter P zurückgelegten Weg ändere. Aus (20) erhält man durch Differentiation:

$$\frac{dP}{dt} = -cu\omega. \tag{20a}$$

Hier kann man in erster Annäherung ω konstant $= \omega_0$ setzen, wonach man durch Differentiation von (19) erhält:

$$\left\{ \begin{aligned} \Theta \frac{d^3 \vartheta}{dt^3} + a \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = - rc\omega_0 u = \Theta \frac{d^2 \omega}{dt^2} + a \frac{d\omega}{dt} \\ -u = \frac{\Theta}{rc\omega_0} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{a}{c\omega_0 r} \frac{d\omega}{dt} \end{aligned} \right\} \tag{18a}$$

Das in (19) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \omega}{dt^4} + \frac{a + M\Theta}{\Theta} \frac{d^3 \omega}{dt^3} + \frac{aM + \Theta N}{\Theta} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{Na}{\Theta} \frac{d\omega}{dt} + \frac{kgrc}{\Theta} \omega - \frac{kgrc}{\Theta} \omega_0 \\ \mp \frac{(R' + R'') rc\omega_0}{\Theta} = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Eliminiert man in ähnlicher Weise ω, so findet man für den Regulatorhub u die Differentialgleichung:

$$\frac{d^4 u}{dt^4} + \frac{a + M\Theta}{\Theta} \frac{d^3 u}{dt^3} + \frac{aM + \Theta N}{\Theta} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{Na}{\Theta} \frac{du}{dt} + \frac{kgrc}{\Theta} u = 0 \tag{21a}$$

Man erkennt sofort, daß im Beharrungszustand stets $\omega = \omega_0$ und $u = 0$ sein muß, daß wir also einen astatisch regulierenden Mechanismus vor uns haben; über die Astasie des eigentlichen Zentrifugalregulators rr ist damit jedoch noch nichts ausgesagt. — Was die Konvergenz des durch (21) und (21ᵃ) gelieferten Schwingungsvorganges anlangt[1]), so wird dieselbe unbedingt stattfinden, wenn die Gleichung $c_0\alpha^4 + c_1\alpha^3 + c_2\alpha^2 + c_3\alpha + c_4 = 0$ nur Wurzeln mit negativen reellen Bestandteilen aufweist. Hierzu gehört[2]):

$$(22)\qquad \left.\begin{array}{l} 1)\ c_0 > 0;\ c_1 > 0;\ c_2 > 0;\ c_3 > 0;\ c_4 > 0. \\ 2)\ \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix} > 0,\ \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & 0 \\ c_0 & c_2 & c_4 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} > 0. \end{array}\right\}$$

Die Bedingung 1) ist tatsächlich erfüllt; die Bedingungen 2) liefern jedoch folgende Ungleichungen:

$$(22^a)\qquad \left.\begin{array}{c} (a + M\Theta)(aM + \Theta N) - aN\Theta > 0, \\ (a + M\Theta)(aM + \Theta N)\,aN - (a + M\Theta)^2\,kgrc - \Theta N^2 a^2 > 0. \end{array}\right\}$$

Hier sieht man sofort, daß im Falle die Maschinenlagerreibung unabhängig von der Geschwindigkeit ist ($a = 0$), eine stabile Regulierung überhaupt unmöglich ist. Ebensowenig darf also M verschwinden, der Regulator darf nicht ungedämpft sein. Ferner sieht man noch, daß auch N von Null verschieden sein muß, d. h. der das Stellzeug einschaltende Zentrifugalregulator muß seinerseits statisch sein, während die ganze Anordnung astatisch reguliert.

Die im Vorhergehenden besprochenen indirekten Regler gestatteten die Aufstellung einer Differentialgleichung, die sogleich den ganzen Verlauf der Störung lieferte. Andere Mechanismen gestatten dies jedoch nicht, und gerade solche wendet man häufig (auch bei Dampfmaschinen) an. Der Behandlung der mit derartigen Apparaten in Zusammenhang stehenden Fragen wendeten sich vorzugsweise französische Forscher zu.

Schon gleichzeitig mit Wischnegradsky hatte sich Rolland wieder eingehender mit der Regulierungstheorie befaßt, wie aus einer Note Comptes Rendus von 1877 hervorgeht. Wichtiger war jedoch eine

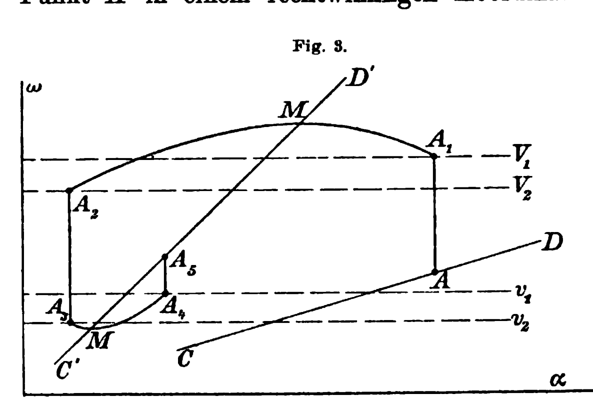
1) Wir vernachlässigen der Einfachheit halber das Glied der konstanten Reibung $R' + R''$; derselbe hat in vielen Fällen den Einfluß einer Dämpfung; das Gesamtergebnis kann daher durch jene Vernachlässigung nicht erheblich beeinträchtigt werden. In ähnlicher Weise behandelt Stodola die Reibung des Regulators in seiner später zu besprechenden Arbeit über die Trägheitsregler.

2) Vgl. Hurwitz, Math. Annalen Bd. 46, 1895, S. 273.

Arbeit von Léauté „Memoire sur les oscillations à longues périodes“.[1]) Der Verfasser gibt hier eine höchst eigenartige Theorie der indirekten Regulierung, die nicht nur den Einfluß der Maschinenreibung, sondern auch die Unempfindlichkeit des Regulators berücksichtigt.[2]) Besonders lehrreich sind seine Erörterungen dadurch, daß er graphische Methoden benutzt, um den Verlauf einer Beharrungsstörung zu kennzeichnen.

Der der Störung vorangehende Beharrungszustand wird durch einen Punkt A in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (s. Fig. 3) dargestellt, dessen Abszisse die Schieber- bezw. Ventilöffnung α, dessen Ordinate die Maschinengeschwindigkeit ω ist. Wird jetzt die Ventilöffnung α ein wenig geändert, so beginnt die Maschine schneller oder langsamer zu laufen; unter dem Einfluß der Reibungswiderstände, die sich vergrößern oder vermindern, kommt sie jedoch bald von selbst in einen neuen Beharrungszustand. Der so gekennzeichnete Zusammenhang zwischen Ventilöffnung und Maschinengeschwindigkeit sei durch die Linie CAD versinnbildlicht. Zu jeder Belastung W der Maschine gehört nun eine solche „ligne de régime“, die der „Point figuratif“ A nur verläßt, wenn W geändert wird. W werde nun plötzlich in W' $(W' < W)$ geändert; die zu W' gehörige ligne de régime sei $C'D'$. Die Winkelgeschwindigkeit ω nimmt zu, der Regulator beginnt zu steigen, um bei einer bestimmten Geschwindigkeit $\omega = V_1$ das Stellzeug mit der Maschine zu kuppeln, wodurch dann die Ventilöffnung α und damit das treibende Kraftfeld verkleinert wird. Dieser Vorgang beginne in A_1, von wo ab der Punkt A eine Kurve A_1MA_2 beschreibt, die in M, weil hier das treibende Kraftfeld gleich dem widerstehenden geworden ist, die ligne de régime des anzustrebenden Beharrungszustandes mit horizontaler Tangente schneidet. In A_2 herrscht diejenige Geschwindigkeit $\omega = V_2$, bei welcher der Regulator das Stellzeug wieder ausrückt. Von hier ab nimmt ω bis zu dem Werte $\omega = v_2$ im Punkte A_3 ab, wo der

Fig. 3.



1) Journal de l'École polyt. 1885.

2) Wie oben S. 239 berichtet, hatte schon Lüders diese Einflüsse in Betracht gezogen, ohne jedoch zu einer strengen Diskussion derselben zu gelangen.

abwärtsgehende Regulator das Stellzeug von neuem, aber in entgegengesetztem Sinne einrückt, wodurch das treibende Kraftfeld vergrößert wird. ω ändert sich nun nach der Kurve $A_3 M_1 A_4$, die in M_1 wiederum eine horizontale Tangente hat; usw. Das Spiel dauert so lange, bis eine von den senkrechten Geraden AA_1 A_2A_3 A_4A_5 usw. die ligne de régime $C'D'$ schneidet, ohne vorher eine der horizontalen $V_1 V_2$, $v_1 v_2$ getroffen zu haben. Léauté leitet nun die Gleichung der Regulierungskurven $A_1 M A_2$ ab und findet unter Annahme nur kleiner Abweichungen von der mittleren Geschwindigkeit Ω der Maschine diese Abweichungen zu:

$$(23) \qquad y = e^{-\int \frac{\Phi(\theta)\,\alpha\, d\theta}{\Theta \Omega^2}} \int \left\{ \frac{\Psi(\theta)}{\Theta \Omega^3} - \frac{\Phi(\theta)\,\alpha}{\Theta \Omega^2} \right\} e^{\int \frac{\Phi(\theta)\,\alpha\, d\theta}{\Theta \Omega^2}} d\theta$$

(wo die Integrationen sich auf θ beziehen) und demnach:

$$(24) \qquad \omega = \Omega + y,$$

wodurch der Zusammenhang zwischen ω und α gegeben ist. Es bedeutet hier $\Phi(\theta)$ das treibende Kraftfeld, $\Psi(\theta)$ das widerstehende Kraftfeld, Θ das Trägheitsmoment des Schwungrades. Als Bedingung für die Konvergenz des oben graphisch angedeuteten Störungsvorganges wird schließlich die Ungleichung abgeleitet:

$$(25) \qquad \frac{\Delta}{\Omega} + \frac{2}{3}\frac{\delta}{\Omega} < \frac{\Omega}{\alpha_0}\sqrt{\frac{2\,\Theta\,\varepsilon\,\delta}{\Phi}}.$$

Hier ist unter $\frac{\Delta}{\Omega}$ der Ungleichförmigkeitsgrad, unter $\frac{\delta}{\Omega}$ der Unempfindlichkeitsgrad des Reglers, unter α_0 die Öffnung des Ventils vor Eintritt der Störung, unter $\frac{1}{\varepsilon}$ das Übersetzungsverhältnis von der Antriebswelle der Maschine zur Ventilöffnung $= \frac{d\theta}{d\alpha}$ zu verstehen, während

$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\, d(\theta)$ sein soll. Vorausgesetzt ist bei diesen Erörterungen ein vollkommen aperiodisch gedämpfter Regulator, was übrigens bei Léauté nicht ausdrücklich hervorgehoben wird. Diese Arbeit von Léauté brachte die Theorie derjenigen indirekten Regulierungen zum Abschluß, bei denen ein Zentrifugalregulator nur in zwei ganz bestimmten Stellungen das Regulierorgan mit der Maschinenwelle kuppelt, so daß die gewünschte Verstellwirkung eintritt. Es wird der Nachweis der Brauchbarkeit der betreffenden Anordnungen erbracht, sowie die Bedingung für das Zustandekommen einer stabilen Regulierung aufgestellt. Dabei muß als besonders wichtig hervorgehoben werden, daß die Abhängigkeit der Widerstände der Maschine von deren Geschwindigkeit eine

wesentliche Rolle spielt, ja, daß ohne sie eine stabile Regulierung undenkbar ist. Dies stimmt auch überein mit den Ergebnissen der auf S. 246 enthaltenen Untersuchung eines speziellen indirekten Regulators, wie mit den Erörterungen von Grashof, Theoret. Maschinenlehre Bd. II. S. 501ff., die wohl auf die Lüderssche Arbeit zurückzuführen sind.

Reglereinrichtungen der besprochenen Art haben sich bei Dampfmaschinen im allgemeinen bewährt, für Turbinen jedoch nicht, da in diesem Falle die Bewegung der Wassersäule im Zuflußrohr der Turbine störend in den Reguliervorgang eingreift. Man hat deshalb frühzeitig andere indirekte Regler erfunden, die auf dem Prinzip des Servomotors beruhen. Diese Einrichtungen sind dadurch gekennzeichnet, daß ein von der Maschine angetriebener Zentrifugalregulator ein mechanisches (meistens hydraulisches) Relais einschaltet, welches die Verstellung der Zulauföffnung der Turbine besorgt; dabei gehört zu jeder Regulatorstellung eine bestimmte Relaisstellung. Die Theorie dieser Regulierapparate wurde in erschöpfender Weise von Stodola aufgestellt in zwei Arbeiten über „Turbinenregulierung" 1893 und 1894.[1]) Hier werden nicht nur die mechanischen Eigenschaften des Regulators und der Maschine berücksichtigt, sondern auch das Verhalten der Wassersäule im Zuflußrohr der Turbine eingehend untersucht. Die bei Eintritt einer Störung durch Vermittlung des Regulators sich geltend machenden Änderungen der Zuflußöffnung (des Leitradquerschnittes) bewirken abwechselnde Beschleunigungen und Verzögerungen der Wassersäule, die Druckschwankungen und damit Rückwirkungen auf die Bewegung des Laufrades zur Folge haben.

Die Berücksichtigung aller dieser Umstände führt auf ein System von sieben simultanen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, dessen Integration die Auflösung einer charakteristischen Gleichung 7. Grades erfordert. Die explizite Darstellung der Integrale ist sonach allgemein unmöglich; doch hat Stodola den Einfluß der Maschinenkonstanten auf die Konvergenz des Schwingungsvorganges für gewisse Sonderfälle untersucht, wobei er zu einer Reihe von Sätzen gelangte, deren Richtigkeit er auch durch das Experiment bewies. Die Veröffentlichung des Versuchsmaterials steht allerdings noch aus.

Zur Klasse der Servomotorregler gehören auch neuere Anordnungen, die bei Dampfmaschinen Anwendung finden; so z. B. der Regulator von Hartmann (patentiert 1878, seitdem vielfach verbessert).

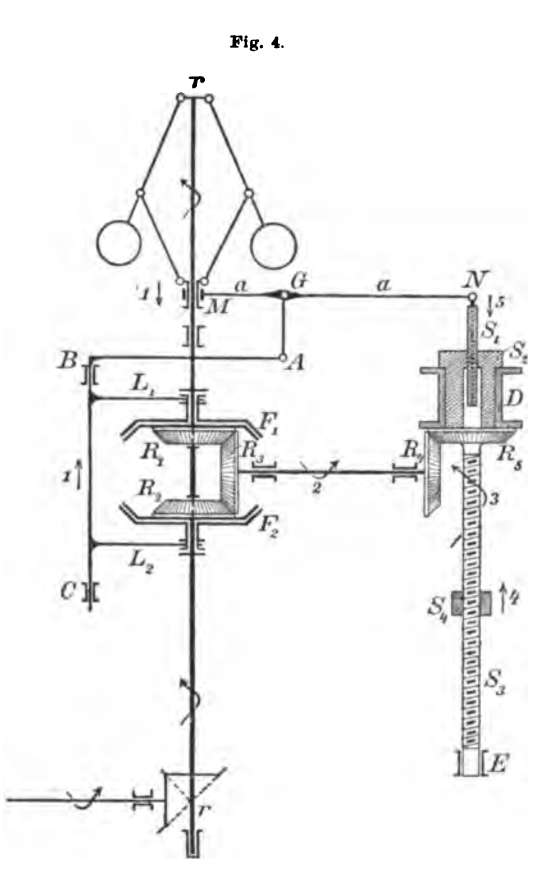
Da eine mathematische Diskussion der Wirksamkeit eines solchen Apparates in der Literatur nirgends anzutreffen ist und die betreffenden

1) Schweizerische Bauzeitung Bd. XXII Nr. 17—20. Bd. XXIII Nr. 17 u. 18.

Entwickelungen immerhin einiges Interessante bieten, so soll der Hartmann-Regulator im folgenden etwas eingehender behandelt werden. Andere Apparate dieser Gattung unterscheiden sich nicht wesentlich von jenem, so z. B. der Regulator von Knüttel.[1])

Der Hartmannsche Mechanismus ist folgendermaßen (s. Fig. 4) eingerichtet: Die senkrechte Spindel *rr* eines gewöhnlichen Zentrifugalreglers wird von der Maschinenwelle aus zwangläufig in Rotation versetzt. Die Muffe *M* desselben führt das eine Ende einer Stange *aa* senkrecht auf und ab; das andere Ende *N* ist an der senkrechten Schraubenspindel S_1 angelenkt. Mit dem Punkte *G* der Stange *aa* ist der starre Winkel *ABC* verbunden, der bei *B* und *C* senkrecht geführt wird. An *BC* sind zwei Arme L_1 und L_2 fest angebracht, die die Naben zweier auf der Achse des Regulators verschiebbarer konischer Friktionsräder F_1 und F_2 umfassen, so daß die letzteren eine etwaige Vertikalbewegung des Armes *BC* mitmachen müssen; dabei nehmen F_1 und F_2 dauernd an der Rotation der Regulatorspindel teil.

Fig. 4.

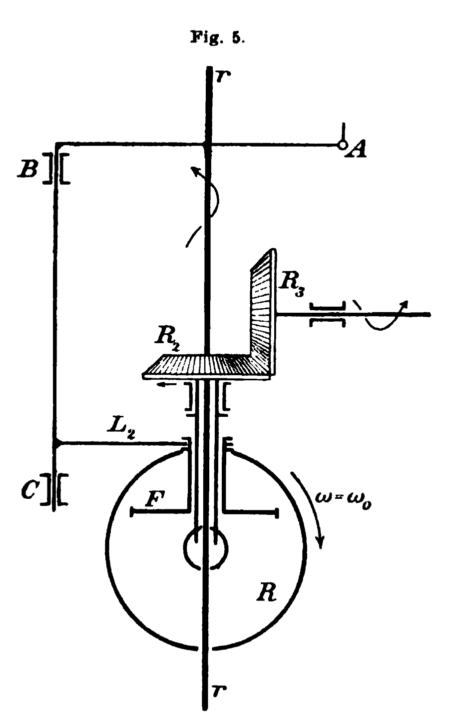


Innerhalb von F_1 und F_2 sitzen auf der Spindel *rr*, gegen dieselbe drehbar aber axial unverschieblich, zwei Kegelräder R_1 und R_2, die mit konischen in F_1 bezw. F_2 hineinpassenden Reibungsflächen ausgestattet sind. Mit R_1 und R_2 in stetem Eingriff steht das Kegelrad R_3, welches seine Drehung vermittelst der Kegelräder R_4 und R_5 der bei *D* und *E* gelagerten senkrechten Schraubenspindel S_3 mitteilt. S_3 setzt sich oberhalb R_5 in die koaxiale Schraubenmutter S_2 fort, die ihrerseits in das

1) Patentiert 1879.

Gewinde der schon erwähnten Spindel S_1 eingreift. S_1 trägt Linksgewinde, S_3 Rechtsgewinde. Der Apparat arbeitet nun folgendermaßen. Beginnt die Maschine infolge einer Störung ihres Beharrungszustandes z. B. rascher zu laufen, so hebt sich die Reglermuffe, wobei die Stange aa um ihren festen Endpunkt N gedreht wird. Hierdurch wird auch das Gestänge $GABC$ nach oben bewegt, bis das Reibungsrad F_2 in Berührung mit dem zugehörigen Kegelrad R_2 kommt; R_2 nimmt an der Drehung von F_2 teil und überträgt diese Drehung im Sinne der Pfeile 2 bezw. 3 auf die Räder R_3 und R_4 bezw. die Schraubenspindel S_3 und ihren oberen Fortsatz S_2. Hierdurch wird einerseits die Schraubenmutter S_4 nach oben geschraubt, wodurch die Füllung verkleinert wird, andererseits die Schraubenspindel S_1 und damit das Gestänge $NGABCL_1L_2$ nach unten bewegt, wobei M der Drehpunkt der Stange aa ist. Durch die Senkung von BC kommt das Reibungsrad F_2 außer Berührung mit R_2, wonach die Rotation von $R_3R_4S_3S_2$ beendet ist. Hat die inzwischen stattgefundene Füllungsänderung noch nicht genügt, so steigt der Regulator von neuem, und das beschriebene Spiel wiederholt sich (eventuell im entgegengesetzten Sinne), bis der neue Beharrungszustand herbeigeführt ist. — Um den geschilderten Apparat einer mathematischen Behandlung unterwerfen zu können, ersetzen wir das Reibungsgetriebe $F_1F_2R_1R_2$ durch ein mit rr konzentrisches Reibungsrad F (s. Fig. 5), welches sich sowohl um rr drehen als auch zu rr axial verschieben kann. In seiner Lage gehalten wird das Rad F durch den Arm L_2; L_1 fällt fort. Die Nabe von F ist als Hülse ausgebildet, in welcher das Kegelrad R so eingesteckt ist, daß es sich mit F drehen muß; die Hülse von F kann sich dabei auf der Nabe von R_1 verschieben. R_1 seinerseits ist fest gelagert. In dauernder Berührung mit dem Umfang von F steht die Reibungsscheibe R, die von der Maschinenwelle aus zwangläufig in Drehung gesetzt wird. Alle übrigen Teile des Apparates bleiben unverändert. Die wesentlichen Eigenschaften des-

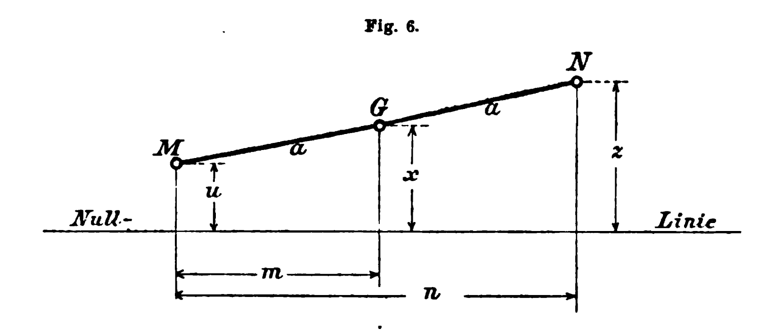
Fig. 5.



selben werden durch die obigen Änderungen nicht alteriert; wir haben lediglich durch dieselben die Bewegung stetig gemacht.

Diejenige Lage von G bei welcher F das Rad R im Mittelpunkte berührt, werde mit $x = 0$ bezeichnet; die Verschiebungen x von G

Fig. 6.



(bezw. F) nach oben seien positiv. Auf dieselbe Höhenlage von G beziehen wir die Vertikalverschiebungen u der Muffe M und des Punktes N. Da M, G, N Punkte der starren Stange aa sind, so gilt stets (s. Fig. 6)

$$x = \frac{m}{n} z + \frac{n-m}{n} u. \tag{1}$$

Für die Bewegung von N gilt ferner:

$$z = z_0 + \int_0^t c_2 \omega \cdot dt. \tag{2}$$

Für die Bewegung des Regulators schreiben wir an:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + M \frac{du}{dt} + Nu - \frac{kg}{\omega_0} \omega + kg = 0. \tag{3}$$

Für die Maschine:

$$\Theta \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + a \frac{d\vartheta}{dt} = r (P - W) \tag{4}$$

Für das treibende Kraftfeld:

$$P = P_0 + \int_0^t c_1 x \omega dt. \tag{5}$$

In (2) und (5) können wir in erster Annäherung ω durch ω_0 ersetzen; in (4) schreiben wir ω für $\frac{d\vartheta}{dt}$. Durch Differentiation von (2) und (5) nach t erhalten wir dann 5 simultane Differentialgleichungen für die abhängigen Variablen ω, x, z, u, P der unabhängigen Variabeln t.

Eine einfache Elimination liefert für ω die Differentialgleichung 5. Ordnung:

$$(6)\quad \begin{cases} n\Theta\omega^{V} + [\Theta(Mn - m\omega_0 c_2) + an]\,\omega^{IV} + [\Theta(Nn - Mm\omega_0 c_2) \\ + a(Mn - m\omega_0 c_2)]\,\omega''' + [a(Nn - Mm\omega_0 c_2) - \Theta N m\omega_0 c_2]\,\omega'' \\ \qquad - [aNm\omega_0 c_2 + gk(n-m)rc_1]\,\omega' = 0. \end{cases}$$

Hier erkennt man sofort, daß c_1 und c_2 negativ sein müssen, damit eine stabile Regulierung möglich wird. Im übrigen liefern die Hurwitzschen Ungleichungen die Bedingungen, denen die Maschinenkonstanten zu genügen haben.

Mit der Stodolaschen Arbeit schließt die Reihe der für die indirekte Regulierung in Betracht kommenden Abhandlungen.

Inzwischen waren auf dem Gebiete der direkten Regelung der Dampfmaschine, zunächst von Seite der Praxis, erhebliche Fortschritte gemacht worden, welche durch die in Aufschwung gekommene elektrische Industrie und die von ihr an den Maschinenbau gestellten Anforderungen hervorgerufen waren. Die dynamoelektrischen Maschinen erheischten eine äußerst feine Regulierung des Antriebsmotors bei vergleichsweise hoher Umlaufszahl; daneben suchte man den Reguliermechanismus so einfach wie möglich zu gestalten. Diese Umstände hatten das Auftreten einer neuen Klasse von Reglern zur Folge, die mit den Fliehkraftregulatoren in erfolgreichen Wettbewerb zu treten begannen. Es handelt sich hier um die sogenannten „Beharrungsregler", die auf dem schon von Werner und Wilhelm Siemens im Jahre 1845[1]) angegebenen Grundsatz beruhen, die bei Belastungsänderungen der Maschine auftretende, auf eine frei mitrotierende Masse ausgeübte Beschleunigungskraft bezw. ihre Reaktion, d. h. den Trägheitswiderstand der Hilfsmasse, als Stellkraft zur Verschiebung des Steuerorgans des Motors zu benutzen. Der erste auf diesem Prinzip beruhende brauchbare Regler wurde 1891 von Kummer, Fischinger und Leck erfunden; es sind ihm seitdem eine ganze Reihe namentlich amerikanischer Konstruktionen gefolgt, die in einer neuen Stodolaschen Arbeit[2]) besprochen werden. Was die Theorie dieses Regulators anlangt, so wird sie von Stodola sozusagen synthetisch aufgebaut und durch Hereinnahme spezieller technischer Vorstellungen ihr Verständnis erschwert. Es soll daher im folgenden eine Theorie des Reglers auf Grund der dynamischen

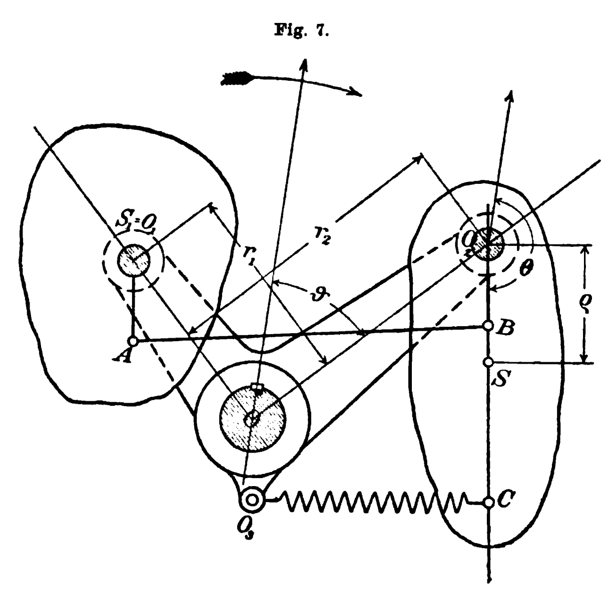
1) Dingl. polyt. journ. Bd. 98. S. 81. W. Siemens. Ges. Abh. und Vorträge. 1881. S. 9.

2) Z. d. V. I. d. 1899. S. 506, 673. Das Siemenssche Regulierprinzip und die amerikanischen Inertieregulatoren.

Differentialgleichungen von Lagrange gegeben werden, die vielleicht dem Nichttechniker willkommen sein wird.

Das Grundsätzliche der Einrichtung eines Beharrungsreglers besteht in folgendem: Auf der Maschinenwelle (s. Fig. 7) festgekeilt ist der dreiarmige Hebel $O_1 O_2 O_3$. Um O_1 und O_2 drehbar angeordnet sind zwei Massen M_1 und M_2, die bezüglich O_1 und O_2 die Trägheitsmomente Θ_1 und Θ_2 haben. Der Schwerpunkt S_1 von M_1 fällt mit O_1 zusammen, während S_2 von O_2 den Abstand ϱ hat; die Hebelarme OO_1 und OO_2 haben die Längen r_1 und r_2. M_1 und M_2 sind durch die Stange AB mit Gelenken in A und B verbunden; dabei soll $O_1 A = O_2 B$ sein. Im übrigen ist der Punkt C von M_2 mit O_3 durch eine Feder verbunden. Auf der Welle O sitzt außerdem das Maschinenschwungrad vom Trägheitsmomente Θ. Die ganze Anordnung bildet ein System von zwei Freiheitsgraden; die beiden zugehörigen Koordinaten seien ϑ und φ, deren Bedeutung aus der Figur leicht zu ersehen ist.

Fig. 7.



Zunächst ist es erforderlich, die kinetische Energie des Systems aufzustellen. Wir betrachten hierbei die Massen für sich; dieselben seien als plattenförmige Körper ausgebildet, deren parallele Begrenzungsebenen auf den Drehachsen O_1 und O_2 senkrecht stehen; ein Massenelement heiße dm. Bezeichnet v die Geschwindigkeit desselben, so ist offenbar die kinetische Energie eines solchen Körpers

$$E = \frac{1}{2}\int v^2 dm,$$

wobei sich die Integration über die Plattenfläche zu erstrecken hat. Hat nun (s. Fig. 8) dm die Koordinaten xy in dem festen Koordinatensystem XY und $\xi\eta$ in dem sich drehenden ΞH, so ist:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Für x und y gilt aber (siehe Figur 7)

$$(3)\qquad \begin{cases} x = r\cos\vartheta + \xi\cos(\vartheta+\varphi) - \eta\sin(\vartheta+\varphi) \\ y = r\sin\vartheta + \xi\sin(\vartheta+\varphi) + \eta\cos(\vartheta+\varphi). \end{cases}$$

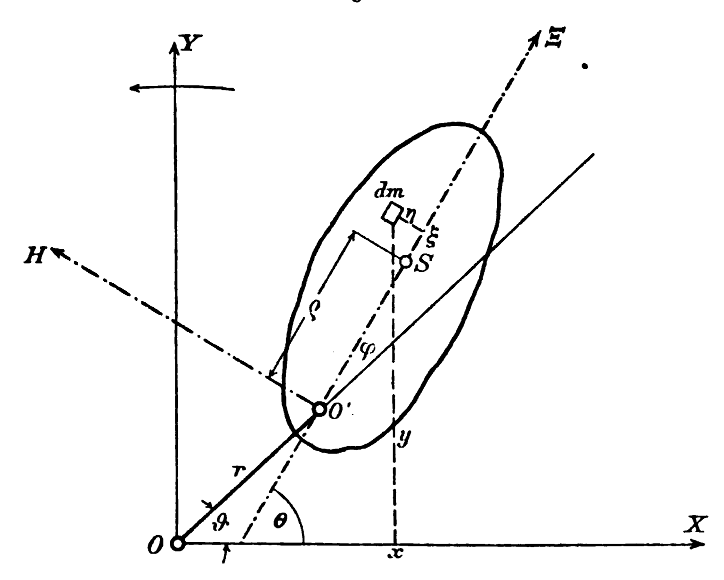
Durch Differentiation folgt hieraus:

$$(3\text{a})\quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -r\sin\vartheta\,\vartheta' - \xi\sin(\vartheta+\varphi)(\vartheta'+\varphi') - \eta\cos(\vartheta+\varphi)(\vartheta'+\varphi') \\ \frac{dx}{dt} = \quad r\cos\vartheta\,\vartheta' + \xi\cos(\vartheta+\varphi)(\vartheta'+\varphi') - \eta\sin(\vartheta+\varphi)(\vartheta'+\varphi') \end{cases}$$

und danach durch Quadrieren und Addieren:

$$(2\text{a})\quad v^2 = r^2\vartheta'^2 + (\xi^2+\eta^2)(\vartheta'+\varphi')^2 + 2r\vartheta'(\vartheta'+\varphi')(\xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi).$$

Fig. 8.



Die kinetische Energie findet sich sodann zu:

$$(1\text{a})\qquad E = \tfrac{1}{2}r^2\vartheta'^2\int dm + \tfrac{1}{2}(\vartheta'+\varphi')^2\int(\xi^2+\eta^2)\,dm + r\vartheta'(\vartheta'+\varphi')\left\{\cos\varphi\int\xi\,dm - \sin\varphi\int\eta\,dm\right\}.$$

Angewandt auf die Masse M_1, ergibt dies wegen $\int\xi\,dm = \int\eta\,dm = 0$

$$(1\text{b})\qquad E_1 = \tfrac{1}{2}r_1^2 M_1\vartheta'^2 + \tfrac{1}{2}\Theta_1(\vartheta'+\varphi')^2$$

Für M_2 findet man dagegen

$$(1\text{c})\quad E_2 = \tfrac{1}{2}r_2^2 M_2\vartheta'^2 + \tfrac{1}{2}\Theta_2(\vartheta'+\varphi')^2 + r(\vartheta'+\varphi')\vartheta'\{a\cos\varphi - b\sin\varphi\}M_2,$$

wo a und b die Koordinaten des Schwerpunktes S_2' bedeuten. Der in Klammern { } stehende Ausdruck stellt die Projektion des Schwerpunktabstandes ϱ auf die Richtung von r_2 dar und kann daher bei der Willkürlichkeit des Koordinatensystems der ξ, η gleich $\varrho \cos \varphi$ gesetzt werden. Somit wird die ganze kinetische Energie des aus Schwungrad und Regulator bestehenden Systems:

$$(4)\qquad L = \tfrac{1}{2}(\Theta + r_1^2 M_1 + r_2^2 M_2)\vartheta'^2 + \tfrac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2)(\vartheta' + \varphi')^2 + r_2 \varrho M_2 \vartheta' (\varphi' + \vartheta') \cos \varphi.$$

Die Koordinaten des Kraftfeldes der Maschine haben nun folgende Zusammensetzung: 1) ϑ Koordinate: $F_1(\vartheta, \varphi)$ das treibende Kraftfeld, abhängig vom Kurbelwinkel ϑ und der Relativstellung φ zwischen Regulator und Maschinenwelle. Ferner das Widerstandsfeld $-W$, welches als konstant vorausgesetzt wird, nebst dem Feld der Lagerreibung $-a_0 - a\vartheta'$. 2) Für die φ-Koordinate hat man dagegen $-F_2(\varphi)$ das Feld der Federkraft und $-b\varphi'$ die Regulatorreibung nebst Bremse.

Den oben gefundenen Ausdruck für L vereinfachen wir durch Einführung der Abkürzungen:

$$(5)\qquad \begin{cases} \Theta + \Theta_1 + \Theta_2 + r_1^2 M_1 + r_2^2 M_2 = J_1 \\ \Theta_1 + \Theta_2 = J_2 \\ r_2 \varrho M_2 = T \end{cases}$$

in

$$(4a)\qquad L = \tfrac{1}{2}(J_1 + 2T\cos\varphi)\vartheta'^2 + \tfrac{1}{2}J_2\varphi'^2 + (J_2 + T\cos\varphi)\vartheta'\varphi'.$$

Die Lagrangeschen Differentialgleichungen der Bewegung nehmen dann folgende Gestalt an:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \vartheta'}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \vartheta} = \{J_1 + 2T\cos\varphi\}\vartheta'' + (J_2 + T\cos\varphi)\varphi'' - 2\varphi'\vartheta' T\sin\varphi \\ \qquad\qquad - T\varphi'^2 \sin\varphi = F_1 - W - a_0 - a\vartheta' \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \varphi'}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = \{J_2 + T\cos\varphi\}\vartheta'' + J_2\varphi'' + T\sin\varphi\,\vartheta'^2 = -F_2 - b\varphi'. \end{cases}$$

Wenden wir jetzt die Transformation für kleine Schwingungen

$$(7)\qquad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon; \quad \vartheta' = \omega = \omega_0 + \varDelta\omega$$

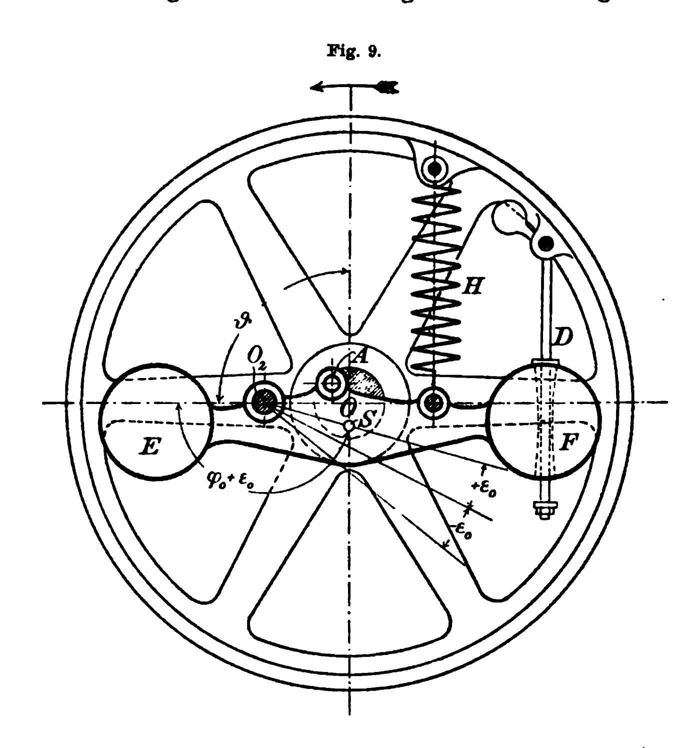
an, so erhalten wir

$$(7a)\qquad \begin{cases} \sin\varphi = \sin\varphi_0 + \varepsilon\cos\varphi_0, \\ \cos\varphi = \cos\varphi_0 - \varepsilon\sin\varphi_0. \end{cases}$$

Hierbei wird ε positiv im Sinne der Drehrichtung gezählt und zwar so, daß für $\varepsilon = 0$ $\varphi = \varphi_0$ wird. Der Anfangspunkt der Zählung der ε ist damit gegen den Arm r_2 um den Winkel φ_0 im Sinne der Dreh-

richtung (also nach vorn) verschoben. Über die Winkelgeschwindigkeit ω entscheiden wir dann so, daß im Beharrungszustande bei der mittleren Winkelgeschwindigkeit ω_0 die Pendelauslenkung $\varepsilon = 0$ ist. Für einen Beharrungszustand mit der größeren Winkelgeschwindigkeit

Fig. 9.



$\omega_0 + \Delta\omega$ ist dann der Pendelausschlag ε negativ, wie sich sofort aus der Anordnung der Fig. 9 ergibt. Bezeichnet nun $\pm\,\varepsilon_0$ den Maximalausschlag des Pendels nach vorn oder nach rückwärts und setzen wir Proportionalität zwischen Pendelausschlägen und zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten voraus, so muß geschrieben werden:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega = \omega_0\left(1 - \delta\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right), \tag{8}$$

d. h. für $\varepsilon = -\,\varepsilon_0$: $\qquad \omega_{\max} = \omega_0(1 + \delta)$

für $\varepsilon = +\,\varepsilon_0$: $\qquad \omega_{\min} = \omega_0(1 - \delta)$;

mithin

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2\,\omega_0}, \tag{9}$$

wodurch δ als Ungleichförmigkeitsgrad des Regulators erkannt wird.

Aus (8) findet man noch:

$$\Delta\omega = -\delta\omega_0\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}. \tag{8a}$$

Für den Beharrungszustand ergibt sich hier noch (aus Gleichung (6),

$$0 = F - W - a_0 - a(\Delta\omega + \omega_0)$$

oder

$$F_1 = W + a_0 + a(\omega_0 + \Delta\omega),$$

d. h. das treibende Kraftfeld F_1 überwindet den Nutzwiderstand W nebst den Reibungswiderständen $a_0 + a(\omega_0 + \Delta\omega)$.

Aus der zweiten Gleichung (6) findet man dagegen

$$T\sin\varphi\,\vartheta'^2 = -F_2,$$

d. h. die am Pendel angreifende Zentrifugalkraft hält der Federspannung $-F_2$ das Gleichgewicht.

Wir kehren nach diesen Festsetzungen zurück zur Transformation (7). Nach Anwendung derselben auf die Gleichungen (6) und nach Vernachlässigung der kleinen Größen höherer Ordnung

$$\varepsilon\frac{d\Delta\omega}{dt};\ \varepsilon\frac{d^2\varepsilon}{dt^2};\ (\Delta\omega)^2;\ \Delta\omega\frac{d\varepsilon}{dt};\ \varepsilon\Delta\omega;\ \varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt};\ \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2$$

ergibt sich:

$$\text{(6a)}\quad\begin{cases}(J_1 + 2T\cos\varphi_0)\dfrac{d\Delta\omega}{dt} + (J_2 + T\cos\varphi_0)\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2} - 2T\omega_0\sin\varphi_0\dfrac{d\varepsilon}{dt} \\ \qquad = F_1 - W - a_0 - a\omega_0 - a\Delta\omega \\ (J_2 + T\cos\varphi_0)\dfrac{d\Delta\omega}{dt} + J_2\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2} + T\sin\varphi_0\omega_0^2 + 2T\sin\varphi_0\omega_0\Delta\omega \\ \qquad + T\cos\varphi_0\omega_0^2\varepsilon = -F_2 - b\dfrac{d\varepsilon}{dt}.\end{cases}$$

In diesen Gleichungen ist nur noch über die Kräfte F_1 und $-F_2$ Verfügung zu treffen. Um zunächst $-F_2$ zu betrachten, setzen wir die zweite der Gleichungen (6a) für den Beharrungszustand an:

$$T\sin\varphi_0\omega_0^2 + 2T\omega_0\sin\varphi_0\Delta\omega + T\omega_0^2\cos\varphi_0\varepsilon = -F_2.$$

Hier kann vermöge (8a) $\Delta\omega = -\delta\omega_0\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ gesetzt werden. Setzt man den so gefundenen Ausdruck für $-F_2$ in das Gleichungssystem (6a) ein, so erhält man:

$$\text{(6b)}\quad\begin{cases}(J_1 + 2T\cos\varphi_0)\Delta\omega' + (J_2 + T\cos\varphi_0)\varepsilon'' - T\omega_0\sin\varphi_0\varepsilon' + a\Delta\omega \\ \qquad + W + a_0 + a\omega_0 = F \\ (J_2 + T\cos\varphi_0)\Delta\omega' + J_2\varepsilon'' + 2T\sin\varphi_0\omega_0^2\left(\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} + \delta\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) = 0.\end{cases}$$

Was jetzt F_1 anlangt, so sei diese Kraft zunächst von ϑ frei und von φ bez. von ε linear abhängig. Wir schreiben daher

$$F_1 = M\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon}{\varepsilon_0}. \tag{10}$$

Diesen Ansatz interpretieren wir folgendermaßen:

Ist	$\varepsilon = -\varepsilon_0$	so ist	$F_1 = 0$
„	$\varepsilon = 0$	„ „	$F_1 = M$
„	$\varepsilon = +\varepsilon_0$	„ „	$F_1 = 2M.$

M würde also das halbe maximale Drehmoment bedeuten. Daß mit wachsendem ε das Drehmoment zunimmt (umgekehrt wie bei Zentrifugalkraftregulatoren), ist in den konstruktiven Verhältnissen der Beharrungsregler begründet. Dieselben ändern die Füllung durch Verstellung des Steuerungsexzenters. Dies wird erreicht durch Veränderung der Voreilwinkels (und der Exzentrizität). Wir wollen hier nur die Änderung des Voreilwinkels an Hand der Fig. 9, die einen Beharrungsregler nach dem Patent J. Mc. Even darstellt, betrachten. Derselbe besitzt nur eine einzige Beharrungsmasse M_2, während $M_1 = \Theta_1 = 0$ ist, bestehend aus dem Körper ESF. O_2 ist der Drehpunkt desselben, O der Wellenmittelpunkt, S der Schwerpunkt; $O_2S = \varrho$; $OO_2 = r_2$; A ist der Angriffspunkt der Schieberexzenterstange. Man erkennt sofort, daß bei einer Verlegung von O_2S nach rückwärts, d. h. bei Verkleinerung von ε, das Exzenter OA nach vorn gedreht wird. Es wird mithin bei steigender Tourenzahl der Voreilwinkel vergrößert, also die Füllung und damit das Kraftfeld verkleinert. Ist letzteres tatsächlich proportional dem Pendelausschlag ε, so ist der Ansatz (10) gerechtfertigt.

Unter solchen Umständen erhalten wir ein System von 2 linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, welches integrabel ist. Dasselbe lautet:

$$\text{(6c)} \quad \begin{cases} (J_1 + 2T\cos\varphi_0)\Delta\omega' + a\Delta\omega + (J_2 + T\cos\varphi_0)\varepsilon'' - 2T\omega_0\sin\varphi_0\varepsilon' \\ \qquad\qquad - M\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + W + a_0 + a\omega_0 - M = 0 \\ (J_2 + T\cos\varphi_0)\Delta\omega' + 2T\sin\varphi_0\omega_0\Delta\omega + J_2\varepsilon'' + b\varepsilon' + 2T\sin\varphi_0\omega_0^2\frac{\delta}{\varepsilon_0}\varepsilon = 0 \end{cases}$$

oder abgekürzt:

$$\text{(6d)} \quad \begin{cases} a_1\Delta\omega' + b_1\Delta\omega + c_1\varepsilon'' + d_1\varepsilon' + e_1\varepsilon + f_1 = 0 \\ a_2\Delta\omega' + b_2\Delta\omega + c_2\varepsilon'' + d_2\varepsilon' + e_2\varepsilon \qquad = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von $\Delta\omega$ entsteht schließlich folgende Differentialgleichung 3. Ordnung für ε:

$$(11)\begin{cases} \{J_1 J_2 - J_2^2 - T^2\cos^2\varphi_0\}\frac{d^3\varepsilon}{dt^3} + \{aJ_2 + b(J_1 + 2T\cos\varphi_0)\}\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \\ \quad + \frac{1}{\varepsilon_0}\{M(J_2 + T\cos\varphi_0) + 2T\delta\omega_0^2\sin\varphi_0(J_1 + 2T\cos\varphi_0) \\ \quad + ab\varepsilon_0 + 4\varepsilon_0 T^2\omega_0^2\sin^2\varphi_0\}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{2}{\varepsilon_0}T\omega_0\sin\varphi_0\{a\delta\omega_0 + M\}\varepsilon \\ \quad + 2T\omega_0\sin\varphi_0\{M - W - a_0 - a\omega_0\} = 0. \end{cases}$$

Für den Beharrungszustand ($\varepsilon''' = \varepsilon'' = \varepsilon' = 0$) ergibt sich hieraus:

$$(11a)\quad M\frac{\varepsilon + \varepsilon_0}{\varepsilon_0} = W + a_0 + a\omega_0 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}a\delta\omega_0 = W + a_0 + a(\omega_0 + \Delta\omega),$$

d. h. das treibende Kraftfeld ist dem Widerstandsfeld gleich.

Die Frage nach der Konvergenz des durch (11) beschriebenen Schwingungsvorganges erledigt sich wieder in einfacher Weise durch Diskussion der zugehörigen charakteristischen Gleichung 3ter Ordnung, wobei interessante Beziehungen zwischen der großen Anzahl von Maschinenkonstanten zu Tage treten. Die bezüglichen Rechnungen wollen wir hier, da es sich nur um prinzipielle Gesichtspunkte handeln soll, nicht durchführen; es sei aber bemerkt, daß die von Stodola a. a. O. aufgestellte Differentialgleichung 3ter Ordnung[1]) auch hier herauskommt, wenn man in den Formeln (6c) die von Stodola vorgenommenen Vernachlässigungen eintreten läßt. Diese Vernachlässigungen sind 1) Nichtberücksichtigung der Lagerreibung der Maschine: $a_0 = 0$; $a = 0$. 2) Unterdrückung der mit ε'' und ε' behafteten Glieder der ersten Gleichung (6b) gegenüber dem mit $\Delta\omega$, da der Koeffizient $(J_1 + 2T\cos\varphi_0)$ das gewaltige Schwungradträgheitsmoment enthält, dem gegenüber J_2 und T nur von untergeordneter Bedeutung sind. Stodola kommt auf Grund dieser Vernachlässigungen zu dem Resultat, daß durch Hinzufügung einer Beharrungsmasse ein astatischer ($\delta = 0$), ja sogar ein labiler ($\delta < 0$) Zentrifugalregulator zur Regulierung brauchbar wird. Dasselbe ergibt sich übrigens auch aus der Diskussion der strengeren Gleichung (11). Ferner sieht man noch sofort, daß nie a und b (Lagerreibung und Bremse) gleichzeitig verschwinden dürfen. Die Dämpfung der Maschine kann daher die Bremse

1) Es muß bemerkt werden, daß Stodola die Regulatorausschläge entgegen der Drehrichtung positiv zählt, ohne dies ausdrücklich hervorzuheben; daher kommt es, daß die Stodolaschen Gleichungen (16a) und (17a) zunächst mit den nach Lagrange abgeleiteten (6c) auf S. 260 dieser Arbeit im Widerspruch zu stehen scheinen.



des Regulators ersetzen. Auf Grund der oben erwiesenen Möglichkeit der Verwendung eines astatischen Beharrungsreglers ist man in der Lage, Maschinen zu bauen, die bei allen Belastungen mit derselben Tourenzahl laufen, wodurch die häufige Verwendung dieser Regler im elektrischen Betriebe erklärt ist.

Nach Stodola sind noch einige Schriften[1]) mehr technischen Charakters anzuführen, die insofern bemerkenswert sind, als sie auf möglichst elementarem Wege die Regelungsfragen zu behandeln suchen. Anschließend hieran sind dann noch Tolle[2]) und Hermann[3]) hervorzuheben, die vor allem graphisch-statische Methoden für die Berechnung von Regulatoren ausgebildet haben. Alle diese Arbeiten gehen zu sehr in die technischen Einzelheiten, deren Darstellung für unsere historische Untersuchung zu weit führen würde.

Am Schluß dieser historischen Übersicht soll auch der Bericht von Heun[4]) über die kinetischen Probleme der technischen Mechanik nicht unerwähnt bleiben. In demselben finden auch die Regulatoren gebührende Berücksichtigung, wenigstens was die direktwirkenden Zentrifugalregler angeht. Dabei wird besonderer Wert auf möglichst strenge und vollständige Ansetzung der betreffenden Probleme gelegt.

II. Beitrag zur Theorie der direkten unstetigen Regulierung.

Die Behandlung, die bis jetzt das Problem der Regelung der Maschinen gefunden hat, erstreckt sich, wie wir oben gesehen haben, abgesehen von vereinzelten Versuchen, nur auf diejenigen Fälle, bei denen eine stetige Einwirkung der Reguliereinrichtung auf die Energiezufuhr stattfindet, d. h. streng genommen nur auf die Turbinen.

Wenn man in Verfolg der hier auftretenden Fragen in der Lage war, durch Erörterung der entsprechenden Differentialgleichungen der Bewegung zu den Stabilitätsbedingungen zu gelangen, so liegt es nahe, anzunehmen, daß im Falle der unstetigen Regulierung gewisse Integralgleichungen für die Auffindung jener Kriterien maßgebend sein werden. In der Tat ist es ja nicht eine Differentialgleichung, die in diesem Falle die bei einer Störung eintretenden Bewegungsvorgänge beschreibt,

---

1) J. Isaachsen, die Bedingungen für eine gute Regulierung, Berlin 1899. B. Rülf; Der Reguliervorgang bei Dampfmaschinen, Berlin 1902. T. Thümmel; Fliehkraft und Beharrungsregler, Berlin 1903.

2) S. M. Tolle, Z. d. V. d. J. 1895, 1896, 1897.

3) G. Hermann, Z. d. V. d. J. 1886 S. 253.

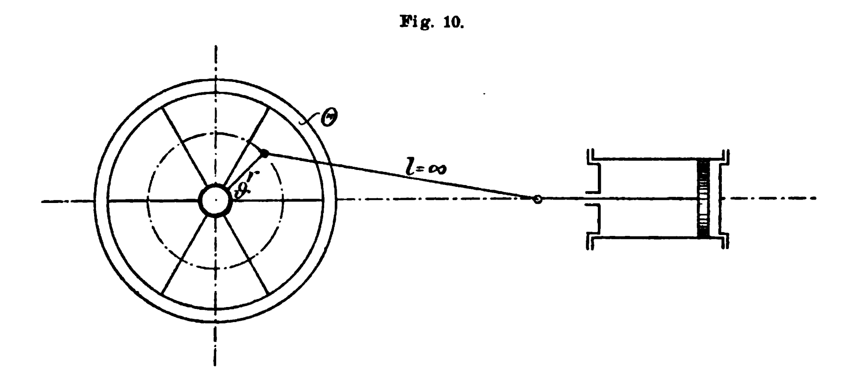
4) K. Heun, Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. Jahresbericht der Mathematiker-Vereinigung IX. Bd. Heft II. Leipzig 1900.

sondern es tritt hier eine ganze Reihe solcher Differentialgleichungen mit verschiedenen Anfangsbedingungen auf, die für die aufeinanderfolgenden Abschnitte des Störungsvorganges bestimmend sind. Nun kann man selbstverständlich nicht Differentialgleichungen kombinieren, die zu verschiedenen Zeiten gelten, sondern man muß ihre Integrale für diejenigen Zeitpunkte aufstellen, die die einzelnen Abschnitte der Störung trennen, und zusehen, ob und unter welchen Bedingungen die Reihe der Integrale bestimmte Eigenschaften hat, die für das Zustandekommen einer stabilen Regulierung erforderlich sind.

Im allgemeinen sind nun die bei Betrachtung von Reguliervorgängen eintretenden Verhältnisse so verwickelt, daß es angezeigt erscheint, zunächst für eine gewissermaßen ideale Dampfmaschine die entsprechenden Formeln aufzustellen.

Unsere Dampfmaschine (s. Fig. 10) sei ausgestattet mit einer unendlich langen Schubstange, einer Treibkurbel vom Radius r und einem

Fig. 10.



Schwungrad vom Trägheitsmomente Θ. Die Winkel, die die Kurbel mit der Zylinderachse macht, heißen ϑ, wobei die Richtung von der Wellenmitte zum Zylinder hin als Anfangsrichtung gilt. Im übrigen stellen wir uns das Gestänge nebst Kolben als masselos vor.

Was den Regulator anlangt, so wollen wir keine besondere Art voraussetzen, sondern annehmen, daß seine Muffe H (s. Fig. 11) sich annähernd nach der Differentialgleichung

$$m\frac{d^2\Delta z}{dt^2} + b\frac{d\Delta z}{dt} + c\Delta z = 0$$

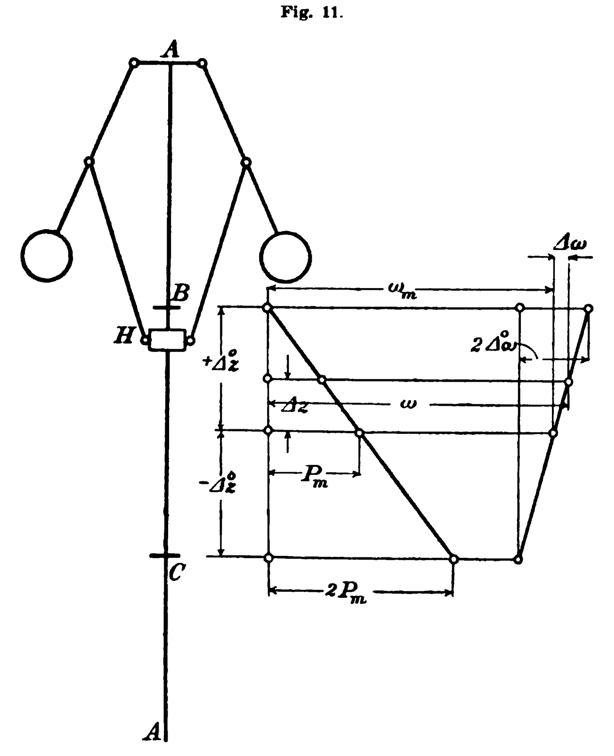
bewegt, wobei Δz die Ausweichung von H aus der Mittellage O bedeutet.

Diese Gleichung hat folgenden Sinn: Dreht sich der Regulator mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seine Achse AA, so wird er



in irgend einer Lage zwischen H und C verharren. Bringt man nun die Muffe aus ihrer Lage heraus (bei übrigens ungeänderter Winkelgeschwindigkeit ω), so wird er, freigelassen, eine Schwingung nach obiger Differentialgleichung ausführen.

Fig. 11.



Die Regulatormuffe betätigt nun in zwangläufiger Verbindung einen Mechanismus, das sogenannte Stellzeug, welches seinerseits mit einem von der Welle der Maschine aus ebenfalls zwangläufig betätigten Mechanismus, der Steuerung, in Wechselwirkung steht. Diese Wechselwirkung besteht darin, daß der Regulator bei Belastungsveränderungen durch Vermittlung des Stellzeugs einen Teil der Steuerung, bei Schiebersteuerungen z. B. den Expansionsschieber, verstellt. Diese Verstellung bezeichnet man als „Änderung der Füllung“, d. h. der Menge des dem Zylinder zuströmenden Dampfes, die so vor sich zu gehen hat, daß bei Verringerung der von der Maschine verlangten Leistung der Regulator die Füllung verkleinert und umgekehrt. Mathematisch kann man diese Einwirkung folgendermaßen fassen. Der Tangentialdruck der Maschine läßt sich, da er eine periodische Funktion des Kurbelwinkels ist, in eine Fouriersche Reihe entwickeln:

$$P = P(\vartheta) = a_0 + a_1 \cos \vartheta + a_2 \cos 2\vartheta + a_3 \cos 3\vartheta + \cdots$$
$$+ b_1 \sin \vartheta + b_2 \sin 2\vartheta + b_3 \sin 3\vartheta + \cdots$$

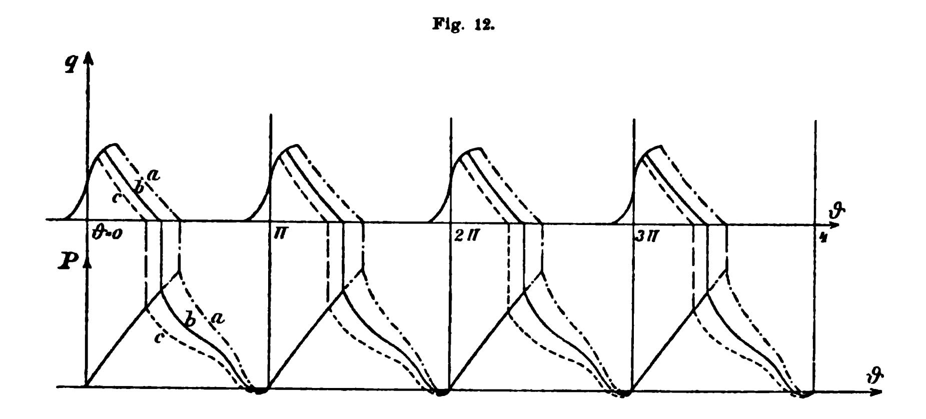
Dieser Ansatz gilt für den Beharrungszustand der Maschine. Tritt eine Belastungsänderung ein, so muß, damit ein neuer Beharrungszustand eintreten kann, der Regulator die „Füllung“ ändern, was mit einer Änderung der Koeffizienten a, b in der Entwicklung für P gleich-

bedeutend ist. Wir können uns also diese Koeffizienten als Funktionen der Regulatorstellung Δz denken.

Die Abhängigkeit des Tangentialdruckes P von Δz findet nun bei Dampfmaschinen in der Weise statt, daß nur in einem einzigen Punkte jedes Kolbenhubes die augenblickliche Regulatorstellung für den Tangentialdruckverlauf innerhalb der folgenden Hubperiode maßgebend ist. Diese Verhältnisse mögen durch untenstehende Figuren näher erklärt werden.

In Fig. 12 seien (für einen Beharrungszustand) als Abszissen die Kurbelwinkel ϑ, als Ordinaten die Zylinderkanalöffnungen q aufgetragen.

Fig. 12.



Die so gezeichneten Kurven sind bei Annahme sehr langer Exzenterstangen von Ellipsenbögen begrenzt (wenigstens bei Doppelschiebersteuerungen). Das ansteigende Ellipsenstück, also die Kanaleröffnungskurve, ist nur abhängig vom Kurbelwinkel, die Kanalschlußkurve jedoch auch von der augenblicklichen Regulatorstellung. Ändert sich die letztere, so nimmt die Schlußkurve verschiedene Lagen a, b, c an, wodurch früherer oder späterer Kanalschluß herbeigeführt wird. Lediglich von Eintritt des letzteren ist nun, wie aus Figur 12 ersichtlich, der Verlauf des Tangentialdruckdiagrammes abhängig. Die Regulatorbewegung vor und nach diesem Zeitpunkt ist für die Bewegung der Maschine gleichgültig. Kennt man nun für einen solchen Schlußpunkt die Größen ϑ, $\frac{d\vartheta}{dt}$, Δz, $\frac{d\Delta z}{dt}$ und durch Δz das Tangentialkraftdiagramm, so läßt sich die Bewegung der Maschine und des Regulators bis zum nächsten Schlußpunkt verfolgen.

Um die weiteren Entwicklungen nicht zu umständlich zu gestalten, wollen wir annehmen, die periodischen Schwankungen des Tangential-

druckes seien so klein, daß wir statt der Funktion $P(\vartheta)$ den über einen Hub erstreckten Mittelwert derselben:

$$P = \frac{1}{\pi}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} P(\vartheta)\,d\vartheta = a_0$$

einführen können, eine Annahme, die um so gerechtfertigter erscheint, je größer das Trägkeitsmoment des Maschinenschwungrades ist, da dann die Schwankungen der Winkelgeschwindigkeit und deren Einfluß auf die Regulatorbewegung nur klein sein können.

Für a_0 als Funktion von Δz schreiben wir jetzt

$$a_0 = a(\Delta^0 z - \Delta z).$$

Die Größen $\Delta^0 z$ und Δz bezeichnen die Regulatorausschläge aus seiner Mittelstellung. Befindet sich der Regulator in (s. Fig. 11) seiner höchsten Lage, d. h. ist $\Delta z = \Delta^0 z$, so hat man $P = 0$, d. h. die Maschine läuft leer; natürlich ist dann auch die Widerstandskraft $W = 0$, wobei die Abwesenheit jeglicher Reibung vorausgesetzt ist. Ist $\Delta z = 0$, so folgt $P = a\Delta^0 z = P_m$; P_m ist die halbe maximale Tangentialkraft. Für $\Delta z = -\Delta_0 z$ ist selbstverständlich $P = 2P_m$.

Wie schon oben bemerkt, bezeichnen wir das Widerstandsfeld mit W und es gilt im Beharrungszustande $P = W$. Was die Winkelgeschwindigkeit der Maschine anlangt, so bezeichnen wir diejenige, die eintreten soll, wenn die Maschine mit halber maximaler Tangentialkraft im Beharrungszustande läuft, mit ω_m. Ferner ist noch der Ungleichförmigkeitsgrad δ des Regulators von Wichtigkeit. Derselbe gibt an, in welchem Verhältnisse die Winkelgeschwindigkeit bei maximaler und minimaler Belastung stehen soll zur Winkelgeschwindigkeit bei mittlerer Belastung.

Man definiert δ durch:

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2\omega_m}.$$

Setzt man hier $\omega_{\max} - \omega_{\min} = 2\Delta^0\omega$, so folgt

$$\Delta^0\omega = \delta\omega_m.$$

$\pm\Delta^0\omega$ stellt dann die Abweichung der größten bezw. kleinsten Geschwindigkeit von ω_m dar.

Der Regulator sei ferner so eingerichtet, daß die Änderung der Tourenzahl bei verschiedenen Belastungen proportional sei den zugehörigen Regulatorstellungen:

$$\Delta z : \Delta\omega = \Delta^0 z : \Delta^0\omega = \Delta^0 z : \omega_m\delta,$$

mithin

$$\Delta z = \Delta\omega \frac{\Delta^0 z}{\omega_m \delta} = \frac{P_m}{a \delta \omega_m} \Delta\omega.$$

Es erübrigt sich nun noch, über die den Kanalschluß beherrschende Gleichung Verfügung zu treffen. Wir betrachten eine Hubperiode, der wir die von einer bestimmten Anfangsperiode gezählte Nummer k zuteilen, und verlangen, daß für diesen Hub die Steuerung in dem Moment den Einlaßkanal abschließt, wenn gilt:

$$q = \Delta_k - k\pi - \alpha \frac{\Delta^0 z - \Delta z_k}{2 \Delta^0 z} = 0,$$

woraus folgt:

(A) $$\vartheta_k = k\pi + \alpha \frac{\Delta^0 z - \Delta z_k}{2 \Delta^0 z}.$$

Hier bedeutet Δ_k den Kurbelwinkel im Schlußmoment, Δz_k die Regulatorstellung zu derselben Zeit. Die Gleichung (A) sagt aus, daß der Steuerungsabschluß im Totpunkt stattfindet, wenn $\Delta z = \Delta^0 z$ ist, d. h. bei Leerlauf der Maschine; dieselbe arbeitet dann mit der Füllung Null, wird dagegen $\Delta z_k = -\Delta^0 z$, was der Maximalleistung entspricht, so hat man

$$\vartheta_k = k\pi + \alpha.$$

α nennen wir die „Maximal-Füllung". $\alpha_m = \frac{\alpha}{2}$ heißt die mittlere Füllung.

Die Füllungen zwischen Null und α sind dann einfach den Belastungen proportional. Auf Grund der bisherigen Festsetzungen ist man in der Lage, für jeden Beharrungszustand der Maschine bei gegebener Leistung resp. Tangentialwiderstand alle erforderlichen Größen zu berechnen.

Wir betrachten jetzt die Differentialgleichungen der Bewegung während einer Störung des stationären Zustandes. Dieser anfängliche Beharrungszustand sei gekennzeichnet durch den anfänglich gegebenen Tangentialwiderstand W_0. Die zugehörige Regulatorstellung berechnet sich zu:

$$\Delta_0 z = \Delta^0 z - \frac{W_0}{a} = \frac{P_m - W_0}{a}.$$

Die zugehörige Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega_0 = \omega_m \left(1 + \delta \frac{P - W_0}{P_m}\right).$$

Die zugehörige Füllung:

$$\alpha_0 = \alpha_m \frac{W_0}{P_m} = \frac{\alpha}{2} \frac{W_0}{P_m}.$$

Wir fassen jetzt einen Schlußpunkt ins Auge, der unmittelbar auf einen Durchgang der Kurbel durch die vordere Totlage folgt, wobei wir die Kurbelwinkel von diesem Durchgang zu zählen anfangen. Im Schlußpunkt ist dann

$$\vartheta = \vartheta_0 = \alpha_0.$$

In diesem Augenblick nehmen wir eine Störung des Beharrungszustandes vor, indem wir den Tangentialwiderstand W_0 in W momentan abändern.

Die Bewegung der Maschine von da ab bis zum nächsten Schlußpunkt regelt sich nach der Energiegleichung:

$$\frac{1}{2}\Theta(\omega^2 - \omega_0^2) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} r\{P - W\}\,d\vartheta$$

$$(1) \qquad = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} r\{a(\Delta^0 z - \Delta_0 z) - W\}\,d\vartheta.$$

In einfacher Weise erhält man hieraus die Winkelgeschwindigkeit:

$$(2) \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega = \omega_0 + \frac{r}{\Theta}\{a(\Delta^0 z - \Delta z_0) - W\}\,t$$

und den Kurbelwinkel

$$(3) \qquad \vartheta = \vartheta_0 + \omega_0 t + \frac{r}{2\Theta}\{a(\Delta^0 z - \Delta_0 z) - W\}\,t^2.$$

Die Gleichungen (1), (2), (3) gelten nur für den ersten Hub. Nehmen wir an, bis zum nächsten Schlußpunkt verfließe die Zeit T_1, so gilt für diesen:

$$(3\text{a}) \qquad \vartheta_1 = \vartheta_0 + \omega_0 T_1 + \frac{r}{2\Theta}\{a(\Delta_0 z - \Delta z_0) - W\}\,T_1^2.$$

Für den $(k+1)$ten Schlußpunkt hat man analog:

$$(3\text{b}) \qquad \vartheta_{k+1} = \vartheta_k + \omega_k T_{k+1} + \frac{r}{2\Theta}\{a(\Delta^0 z - \Delta z_k) - W\}\,T_{k+1}^2$$

und

$$(2\text{a}) \qquad \omega_{k+1} = \omega_k + \frac{r}{\Theta}\{a(\Delta^0 z - \Delta z_k) - W\}\,T_{k+1}.$$

Es gilt nun, die gleichzeitig vor sich gehende Bewegung des Regulators zu verfolgen. Die zugehörige Differentialgleichung für den Fall konstanter Winkelgeschwindigkeit der Regulatorachse laute, wie schon oben bemerkt:

$$m\frac{d^2\Delta z}{dt^2} + b\frac{d\Delta z}{dt} + c\Delta z = 0.$$

Der Regulator verharre während des Beharrungszustandes W_0 in vollkommener Ruhe:
$$\Delta z = \frac{P_m - W_0}{P} \Delta^0 z; \quad \frac{d\Delta z}{dt} = 0.$$

Bei Eintritt der Störung $W_0 - W$ wird nun auch der Regulator aus seiner Ruhelage gebracht. Diese Störung wird in der Differentialgleichung dadurch zum Ausdruck gebracht, daß man schreibt:

$$m\frac{d^2\Delta z}{dt^2} + b\frac{d\Delta z}{dt} + c(\Delta z - \Delta_\omega z) = 0. \tag{4}$$

Man erhält hierdurch sämtliche Regulatordifferentialgleichungen für die verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten ω, wenn man
$$\Delta_\omega z = \frac{P_m}{a\delta\omega_m}\Delta\omega$$
setzt. Ist nun $\Delta\omega$ mit der Zeit veränderlich, so hat man in (4) eine Differentialgleichung mit „Störungsfunktion“, die den Verlauf der Regulatorbewegung bei veränderlicher Winkelgeschwindigkeit liefert. Diese Veränderlichkeit von ω berechnen wir aus Gleichung (2), die wir schreiben:

$$\omega = \omega_m + \Delta\omega = \omega_m + \Delta_0\omega + \frac{r}{\Theta}\{a(\Delta^0 z - \Delta_0 z) - W\}t \tag{2c}$$
$$\Delta\omega = \omega_m\delta\frac{P_m - W_0}{P_m} + \frac{r}{\Theta}\{P_m - W - a\Delta_0 z\}t$$

oder, indem wir zum $k+1$ Schlußpunkt übergehen:

$$\Delta\omega_{k+1} = \Delta_k\omega + \frac{r}{\Theta}\{P_m - W - a\Delta z_k\}T_{k+1} \tag{2d}$$

und für die Zeit vom $k$ten bis zum $(k+1)$ten Schlußpunkt:

$$\Delta\omega = \Delta\omega_k + \frac{r}{\Theta}\{P_m - W - a\Delta_k z\}t. \tag{2e}$$

Die Regulatorgleichung für dieses Intervall geht dann über in:

$$m\frac{d^2\Delta z}{dt^2} + b\frac{d\Delta z}{dt} + c\Delta z = \frac{cP_m}{a\delta\omega_m}\Delta_k\omega + \frac{crP_m}{a\delta\omega_m\Theta}\{P_m - W - a\Delta_k z\}t \tag{4a}$$

und mit
$$\frac{P_m\Delta_k\omega}{a\delta\omega_m} = p_k; \quad \frac{rP_m}{a\delta\omega_m\Theta}\{P_m - W - a\Delta_k z\} = q_k$$
in:

$$m\frac{d^2\Delta z}{dt^2} + b\frac{d\Delta z}{dt} + c\Delta z = c\cdot p_k + c\cdot q_k t. \tag{4b}$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist:

$$\Delta z = A_k e^{\alpha_1 t} + B_k e^{\alpha_2 t} + q_k t + \left(p_k - q_k\frac{b}{c}\right), \tag{5}$$

wo α_1 und α_2 die Wurzeln der Gleichung
$$m\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$
sind.

Die Integrationskonstanten ergeben sich aus den Bedingungen für $t = 0$

$$\Delta z = \Delta z_k; \quad \Delta' z = \Delta' z_k,$$

d. h. aus den Gleichungen:

$$(6) \qquad \begin{cases} \Delta z_k = A_k + B_k + p_k - q_k \dfrac{b}{c} \\ \Delta' z_k = \alpha_1 A_k + \alpha_2 B_k + q_k, \end{cases}$$

aus denen man findet:

$$(7) \qquad \begin{cases} A_k = \dfrac{\Delta' z_k - q_k - \alpha_2 \Delta z_k - \alpha_2 q_k \dfrac{b}{c} + \alpha_2 p_k}{\alpha_1 - \alpha_2} \\ B_k - \dfrac{-\Delta' z_k + q_k + \alpha_1 \Delta z_k + \alpha_1 q_k \dfrac{b}{c} - \alpha_1 p_k}{\alpha_1 - \alpha_2} \end{cases}.$$

Führt man nun noch folgende Abkürzungen ein:

$$\gamma = \frac{P_m r}{\omega_m \delta \Theta}; \quad \varrho = \frac{P_m (P_m - W) r}{a \delta \omega_m \Theta}; \quad \sigma = \frac{P_m}{a \delta \omega_m},$$

wodurch man erhält:

$$p_k = \sigma \Delta \omega_k; \quad q_k = \varrho - \gamma \Delta z_k,$$

so findet man schließlich:

$$(8) \begin{cases} A_k = \dfrac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left\{ \Delta z_k \left(\gamma + \gamma \dfrac{b}{c} \alpha_2 - \alpha_2 \right) + \Delta \omega_k \alpha_2 \sigma + \Delta' z_k - \varrho \left(1 + \alpha_2 \dfrac{b}{c} \right) \right\} \\ B_k = \dfrac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left\{ \Delta z_k \left(-\gamma - \gamma \dfrac{b}{c} \alpha_1 + \alpha_1 \right) - \Delta \omega_k \alpha_1 \sigma + \Delta' z_k + \varrho \left(1 + \alpha_1 \dfrac{b}{c} \right) \right\}. \end{cases}$$

Wir haben jetzt aus den Differentialgleichungen der Maschinen- und Regulatorbewegung je zwei Integrale abgeleitet, von denen das eine die Geschwindigkeit, das andere den Weg als Funktion der Zeit liefert. Diese 4 Integrale berechnen wir nun für die Steuerungsschlußpunkte, indem wir in ihnen die Zeit t gleich den Hubzeiten T setzen. Um T zu finden, nehmen wir noch die Steuerungsgleichung hinzu, sodaß wir für den $k$ten Hub folgende 5 Gleichungen haben:

$$(9a) \begin{cases} \Delta z_{k+1} = \Delta z_k \Big[\dfrac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \Big\{ \left(\gamma + \gamma \dfrac{b}{c} \alpha_2 - \alpha_2 \right) e^{\alpha_1 T_{k+1}} \\ \qquad - \left(\gamma + \gamma \dfrac{b}{c} \alpha_1 - \alpha_1 \right) e^{\alpha_2 T_{k+1}} \Big\} - \gamma T_{k+1} + \gamma \dfrac{b}{c} \Big] \\ \qquad + \Delta \omega_k \Big[\dfrac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \sigma \left(\alpha_2 e^{\alpha_1 T_{k+1}} - \alpha_1 e^{\alpha_2 T_{k+1}} + \alpha_1 - \alpha_2 \right) \Big] \\ \qquad + \Delta' z_k \dfrac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left(e^{\alpha_1 T_{k+1}} - e^{\alpha_2 T_{k+1}} \right) \\ \qquad + \dfrac{\varrho}{\alpha_1 - \alpha_2} \Big[(\alpha_1 - \alpha_2) \left(T_{k+1} - \dfrac{b}{c} \right) - \left(1 + \alpha_2 \dfrac{b}{c} \right) e^{\alpha_1 T_{k+1}} \\ \qquad + \left(1 + \alpha_1 \dfrac{b}{c} \right) e^{\alpha_2 T_{k+1}} \Big]. \end{cases}$$

Durch Differentiation der Gleichung (6) findet man:

$$\Delta' z = \alpha_1 A_k e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 B_k e^{\alpha_2 t} + \varrho - \gamma \Delta z_k$$

und hieraus

$$(9\text{b})\left\{\begin{aligned} \Delta' z_{k+1} = \Delta z_k \Big[\frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)}\Big\{\alpha_1\left(\gamma + \gamma\frac{b}{c}\alpha_2 - \alpha_2\right)e^{\alpha_1 T_{k+1}} \\ - \alpha_2\left(\gamma + \gamma\frac{b}{c}\alpha_1 - \alpha_1\right)e^{\alpha_2 T_{k+1}}\Big\} - \gamma\Big] \\ + \Delta' z_k \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\alpha_1 e^{\alpha_1 T_{k+1}} - \alpha_2 e^{\alpha_2 T_{k+1}}\right) \\ + \Delta\omega_k \cdot \frac{\sigma\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(e^{\alpha_1 T_{k+1}} - e^{\alpha_2 T_{k+1}}\right) \\ + \frac{\varrho}{\alpha_1 - \alpha_2}\Big[\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_1\left(1 + \alpha_2\frac{b}{c}\right)e^{\alpha_1 T_{k+1}} \\ + \alpha_2\left(1 + \alpha_1\frac{b}{c}\right)e^{\alpha_2 T_{k+1}}\Big]. \end{aligned}\right.$$

Hierzu kommen noch die bereits früher abgeleiteten Gleichungen

$$(9\text{c}) \qquad \Delta\omega_{k+1} = \Delta\omega_k + \frac{r}{\Theta}(P_m - W)T_{k+1} - \Delta z_k \frac{ar}{\Theta}T_{k+1}$$

und

$$(9\text{d}) \qquad \begin{aligned} \vartheta_{k+1} - \vartheta_k = \omega_m T_{k+1} + \Delta\omega_k T_{k+1} \\ + \frac{r}{2\Theta}(P_m - W)T_{k+1}^2 - \Delta z_k \frac{ar}{2\Theta}T_{k+1}^2, \end{aligned}$$

nebst der Steuerungsgleichung

$$(9\text{e}) \qquad \vartheta_{k+1} = (k+1)\pi + \alpha_m - \alpha_m \frac{a\Delta z_{k+1}}{P_m}.$$

Stellt man diese Gleichungen für alle $k = 1, 2 \cdots n$ auf, so ist offenbar formal die Möglichkeit gegeben, rekurrierend die Reihe der Hubzeiten T, der Schlußpunkte ϑ, der Regulatorstellungen Δz, der Regulatorgeschwindigkeiten $\Delta' z$ und der Winkelgeschwindigkeiten $\Delta\omega$ zu berechnen. Jede der so erhaltenen Wertreihen kann nun der Beurteilung der Stabilitätsbedingungen zugrunde gelegt werden. Soll nämlich die Störung nach Verlauf einer gewissen Zeit zu einem neuen (der nunmehrigen Belastung W entsprechenden) Beharrungszustand übergehen, d. h. soll die Verbindung von Regler und Maschine sich gegenüber der Störung stabil verhalten, so werden jene Wertreihen resp. gewisse andere aus ihnen abgeleitete gegen bestimmte Grenzen konvergieren müssen. Wir sind demnach berechtigt, die Stabilitätsbedingungen der Maschinenbewegung mit den Konvergenzkriterien jener Reihen gleichzusetzen.

Im vorliegenden Falle gestaltet sich die Berechnung jener Wertfolgen sehr kompliziert, da die Gleichungen in bezug auf T transzen-

dent sind. Doch gestattet uns die Natur des vorliegenden Problems eine Vereinfachung in sofern, als wir statt der wechselnden Größen T_k ein- und dieselbe mittlere Hubzeit T einführen dürfen. In der Tat variiert ja bei Dampfmaschinen während einer Beharrungszustandsstörung die Hubzeit nur sehr wenig und nähert sich bei stabiler Regulierung rasch ihrem dem neuen Belastungszustande entsprechenden Werte.

Unter dieser Voraussetzung brauchen wir auf die Gleichungen (9d) und (9e) keine Rücksicht zu nehmen; die Gleichungen 9a, b, c aber schreiben sich dann folgendermaßen:

$$(10) \qquad \begin{cases} \Delta z_{k+1} = \alpha_1 \Delta z_k + \beta_1 \Delta \omega_k + \gamma_1 \Delta' z_k + \delta_1 \\ \Delta \omega_{k+1} = \alpha_2 \Delta z_k + \beta_2 \Delta \omega_k + \gamma_2 \Delta' z_k + \delta_2 \\ \Delta' z_{k+1} = \alpha_3 \Delta z_k + \beta_3 \Delta \omega_k + \gamma_3 \Delta' z_k + \delta_3 \end{cases}$$

Hier sind die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ für den ganzen Störungsvorgang konstant und haben folgende Werte:

$$(11) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\left\{\left(\gamma + \gamma \frac{b}{c}\alpha_2 - \alpha_2\right)e^{\alpha_1 T} - \left(\gamma + \gamma \frac{b}{c}\alpha_1 - \alpha_1\right)e^{\alpha_2 T}\right\} - \gamma T + \gamma \frac{b}{c} \\ \beta_1 = \frac{\sigma}{\alpha_1 - \alpha_2}\left\{\alpha_2 e^{\alpha_1 T} - \alpha_1 e^{\alpha_2 T}\right\} + \sigma \\ \gamma_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\left\{e^{\alpha_1 T} - e^{\alpha_2 T}\right\} \\ \delta_3 = \frac{\varrho}{\alpha_1 - \alpha_2}\left\{(\alpha_1 - \alpha_2)\left(T - \frac{b}{c}\right) - \left(1 + \alpha_2 \frac{b}{c}\right)e^{\alpha_1 T} + \left(1 + \alpha_1 \frac{b}{c}\right)e^{\alpha_2 T}\right\} \\ \alpha_2 = -\frac{ar}{\Theta} T \\ \beta_2 = 1 \\ \gamma_2 = 0 \\ \delta_2 = \frac{r}{\Theta}(P_m - W)\, T \\ \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\left\{\alpha_1\left(\gamma + \gamma \frac{b}{c}\alpha_2 - \alpha_2\right)e^{\alpha_1 T} - \alpha_2\left(\gamma + \gamma \frac{b}{c}\alpha_1 - \alpha_1\right)e^{\alpha_2 T}\right\} - \gamma \\ \beta_3 = \frac{\sigma\,\alpha_1\,\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\left\{e^{\alpha_1 T} - e^{\alpha_2 T}\right\} \\ \gamma_3 = \frac{1}{\alpha_1 = \alpha_2}\left\{\alpha_1 e^{\alpha_1 T} - \alpha_2 e^{\alpha_2 T}\right\} \\ \delta_3 = \frac{\varrho}{\alpha_1 - \alpha_2}\left\{\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_1\left(1 + \alpha_2 \frac{b}{c}\right)e^{\alpha_1 T} + \alpha_2\left(1 + \alpha_1 \frac{b}{c}\right)e^{\alpha_2 T}\right\} \end{cases}$$

Für das Weitere ist es zweckmäßig, die Gleichung (10) so umzuformen, daß sowohl die Unbekannten, als auch die Konstanten

dimensionslose Größen werden. Es resultiert dann ein neues Gleichungssystem:

$$(10a)\quad \begin{cases} x_{k+1} = a_1 x_k + b_1 y_k + c_1 z_k + d_1 \\ y_{k+1} = a_2 x_k + b_2 y_k + c_2 z_k + d_2 \\ z_{k+1} = a_3 x_k + b_3 y_k + c_3 z_k + d_3 . \end{cases}$$

Hier ist:

$$(12)\quad \begin{cases} x_{k+1} = \frac{a}{P_m} \Delta z_{k+1}; \quad y_{k+1} = \frac{1}{\omega_m} \Delta \omega_{k+1}; \quad z_{k+1} = \frac{a}{P_m \omega_m} \Delta' z_{k+1} \\ x_k \;\; = \frac{a}{P_m} \Delta z_k \;\;; \quad y_k \;\; = \frac{1}{\omega_m} \Delta \omega_k \;\;; \quad z_k \;\; = \frac{a}{P_m \omega_m} \Delta' z \end{cases}$$

und:

$$(11a)\quad \begin{cases} a_1 = \alpha_1; & b_1 = \frac{a\omega_m}{P_m} \beta_1; & c_1 = \omega_m \gamma_1; & d_1 = \frac{a}{P_m} \delta_1 \\ a_2 = \frac{P_m}{a\omega_m} \alpha_2; & b_2 = \beta_2; & c_2 = \frac{P_m}{a} \gamma_2; & d_2 = \frac{1}{\omega_m} \delta_2 \\ a_3 = \frac{1}{\omega_m} \alpha_3; & b_3 = \frac{a}{P_m} \beta_3; & c_3 = \gamma_3; & d_3 = \frac{a}{P_m \omega_m} \delta_3 . \end{cases}$$

Aus dem Gleichungssystem (10a) leiten wir nun für die x_{k+1}; y_{k+1}; z_{k+1} drei mehrgliedrige Rekursionsformeln ab, die bezüglich x_k, x_{k-1}, x_{k-2}; y_k, y_{k-1}, y_{k-2}; z_k, z_{k-1}, z_{k-2} enthalten. Die hierzu erforderliche etwas umständliche Elimination ergibt folgendes:

$$(13)\quad \begin{cases} x_{k+1} = P\, x_k + Q\, x_{k-1} + R\, x_{k-2} + S \\ y_{k+1} = P' y_k + Q' y_{k-1} + R' y_{k-2} + S' \\ z_{k+1} = P'' z_k + Q'' z_{k-1} + R'' z_{k-2} + S'' \end{cases}$$

wo die Größen $PQRS$ rationale Funktionen der Koeffizienten a, b, c, d bezw. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind.

Setzen wir für die Koeffizienten die entsprechenden Werte aus (11a) bezw. (11) ein, so ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$(14)\quad \begin{cases} P = P' = P'' \\ \quad = \gamma \left\{ \frac{e_1 - e_2}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{b}{c} \left(\frac{\alpha_2 e_1 - \alpha_1 e_2}{\alpha_1 - \alpha_2} + 1 \right) - T \right\} + e_1 + e_2 + 1 \\ Q = Q' = Q'' \\ \quad = \gamma \left\{ -2 \frac{e_1 - e_2}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{b}{c} \left(e_1 \cdot e_2 - \frac{\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2}{\alpha_1 - \alpha_2} - \frac{\alpha_2 e_1 - \alpha_1 e_2}{\alpha_1 - \alpha_2} - 1 \right) \right. \\ \quad \left. + T(e_1 + e_2) \right\} - (e_1 e_2 + e_1 + e_2) \\ R = R' = R'' \\ \quad = - e_1 e_2 \gamma T + \gamma \left\{ \frac{e_1 - e_2}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{b}{c} \left(- e_1 e_2 + \frac{\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \right) \right\} + e_1 e_2 \\ S = \frac{r(P_m - W)}{\omega_m \Theta \delta} T(e_1 e_2 - e_1 - e_2 + 1) \\ S' = \frac{r(P_m - W)}{\omega_m \Theta} T(e_1 e_2 - e_1 - e_2 + 1) \\ S'' = 0. \end{cases}$$

In diesen Formeln ist:

$$e_1 = e^{\alpha_1 T};$$
$$e_2 = e^{\alpha_2 T}.$$

Die oben erhaltenen Rekursionsformeln (13) sind inhomogen. Um sie homogen zu machen, verbinden wir jede von ihnen mit der um eine Ordnung niedrigeren und erhalten so:

$$(13a)\begin{cases} x_{k+1} = (P\ \ +1)x_k + (Q\ \ -P\ )x_{k-1} + (R\ \ -Q\ )x_{k-2} - R\ x_{k-3} \\ y_{k+1} = (P' \ +1)y_k + (Q' \ -P')y_{k-1} + (R' -Q')y_{k-2} - R' y_{k-3} \\ z_{k+1} = (P'' +1)z_k + (Q'' -P'')z_{k-1} + (R'' -Q'')z_{k-2} - R'' z_{k-3}. \end{cases}$$

Die Betrachtung der Formeln (13) ergibt nun sogleich folgendes: Sind überhaupt Grenzen für die Werte $x_k y_k z_k$ vorhanden, so muß sein:

$$(14a)\quad \begin{cases} \lim x_k = \dfrac{S}{1-(P+Q+R)} \\ \lim y_k = \dfrac{S'}{1-(P'+Q'+R')} \\ \lim z_k = 0 \end{cases}$$

und wegen:

$$P + Q + R = P' + Q' + R' = 1 - (e_1 e_2 - e_1 - e_2 + 1)\,T\gamma$$

$$(15a)\quad \begin{cases} \lim x_k = \dfrac{P_m - W}{\omega_m \Theta \delta} \\ \lim y_k = \dfrac{r(P_m - W)}{\omega_m \Theta} \end{cases}$$

und mit Rücksicht auf (12)

$$(16a)\quad \begin{cases} \lim \Delta_k z\ = \dfrac{P_m - W}{a} \\ \lim \Delta \omega_k = \dfrac{P_m - W}{P_m}\,\omega_m \delta \\ \lim \Delta' z_k = 0, \end{cases}$$

d. h. reguliert die Maschine stabil, so gehen in der Tat Regulatorstellung und Maschinengeschwindigkeit in die dem neuen Belastungszustand entsprechenden Werte über.

Schreiten wir nun zur Aufsuchung der Bedingungen der stabilen Regulierung, so handelt es sich wesentlich um die Konvergenz des durch (13a) beschriebenen unendlichen Prozesses. Zur Weiterbehandlung der Frage setzen wir $k = n + 3$ und schreiben statt (13a):

$$(13b)\quad \begin{cases} x_{n+4} = a_1 x_{n+3} + a_2 x_{n+2} + a_3 x_{n+1} + a_4 x_n \\ y_{n+4} = b_1 y_{n+3} + b_2 y_{n+2} + b_3 y_{n+1} + b_4 y_n \\ z_{n+4} = c_1 z_{n+3} + c_2 z_{n+2} + c_3 z_{n+1} + c_4 z_n \end{cases}$$

wo die Bedeutung der $a_i b_i c_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ aus (13a) leicht zu ersehen ist. Die Theorie dieser Rekursionsformeln[1]) und ihre Konvergenzkriterien hängen nun eng zusammen mit der Theorie der Gleichungen vierten Grades. Wir können uns auf die erste der Gleichungen (13b) beschränken. Vermöge eines bekannten Theorems kann man dann schreiben:

$$x_n = C_1 z_1^{n-1} + C_2 z_2^{n-1} + C_3 z_3^{n-1} + C_4 z_4^{n-1}, \tag{15}$$

wo die C_i aus den Anfangsbedingungen zu bestimmende Konstante, die z_i die nach den Absolutwerten geordneten Wurzeln der Gleichung vierten Grades

$$z^4 - a_1 z^3 - a_2 z^2 - a_3 z - a_4 = 0 \tag{16}$$

sind, falls die Wurzeln von einander verschieden sind. Bei genauerer Betrachtung dieser Gleichung findet man sofort, daß sie eine Wurzel $z_1 = 1$ hat, sodaß $z_2 z_3 z_4$ als Wurzeln einer Gleichung nur dritten Grades

$$z^3 - Pz^2 - Qz - R = 0 \tag{16a}$$

zu bestimmen sind. Die Koeffizienten PQR derselben sind reell und oben unter (14) angegeben. Für die y- und z-Rekursionsformeln ergeben sich ganz analoge Lösungen, die sich nur hinsichtlich der Werte der Konstanten C_1 von dem Ansatze (15) unterscheiden. Wir können also schließen, daß die Konvergenzbedingung des Ansatzes (15) das gesuchte Stabilitätskriterium liefert.

Zunächst wollen wir die Konstanten C_i berechnen. Wir setzen zu dem Zwecke folgendes Gleichungssystem an:

$$\tag{17} \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = x_1 \\ z_1 C_1 + z_2 C_2 + z_3 C_3 + z_4 C_4 = x_2 \\ z_1^2 C_1 + z_2^2 C_2 + z_3^2 C_3 + z_4^2 C_4 = x_3 \\ z_1^3 C_1 + z_2^3 C_2 + z_3^3 C_3 + z_4^3 C_4 = x_4, \end{cases}$$

aus welchem man findet:

$$\tag{18} \begin{cases} C_1 = \dfrac{x_4 - x_3(z_2 + z_3 + z_4) + x_2(z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4) - x_1 z_2 z_3 z_4}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} \\ C_2 = \dfrac{x_4 - x_3(z_1 + z_3 + z_4) + x_2(z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_3 z_4) - x_1 z_1 z_3 z_4}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)} \\ C_3 = \dfrac{x_4 - x_3(z_1 + z_2 + z_4) + x_2(z_1 z_2 + z_1 z_4 + z_2 z_4) - x_1 z_1 z_2 z_4}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)} \\ C_4 = \dfrac{x_4 - x_3(z_1 + z_2 + z_3) + x_2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) - x_1 z_1 z_2 z_3}{(z_4 - z_1)(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)}. \end{cases}$$

1) Vgl. F. Cohn, Math. Annalen 44, S. 473.

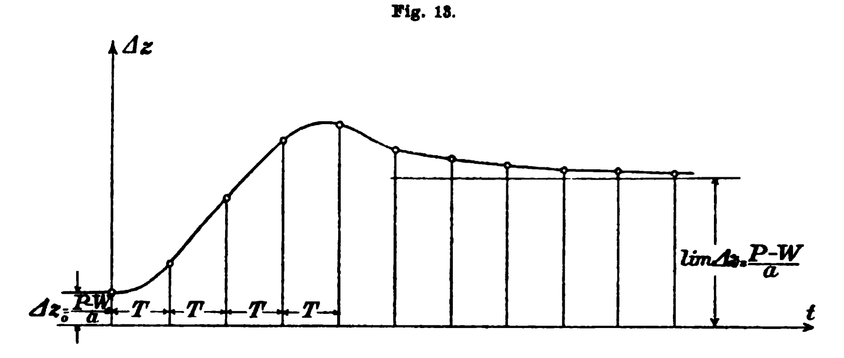
Wir nehmen nun an, daß z_2, z_3, z_4 reell und verschieden sowie den Absolutwerten nach < 1 seien. In diesem Falle liefert der Ansatz (15) konvergente Werte, und zwar findet der Regulierungsvorgang „aperiodisch“ statt, wenn alle z positiv sind, da dann von einem bestimmten x ab alle folgenden Regulatorausschläge kleiner und kleiner werden. Dabei wird schließlich

$$\lim x_k = C_1 = \frac{x_4 - Px_3 - Rx_2 - Rx_1}{1-(P+Q+R)} = \frac{S}{1-(P+Q+R)}$$

wie oben S. 274.

Graphisch stellt sich ein derartiger Vorgang wie untenstehend (s. Fig. 13) dar. Als Abszissen sind hier die Zeiten, als Ordinaten die

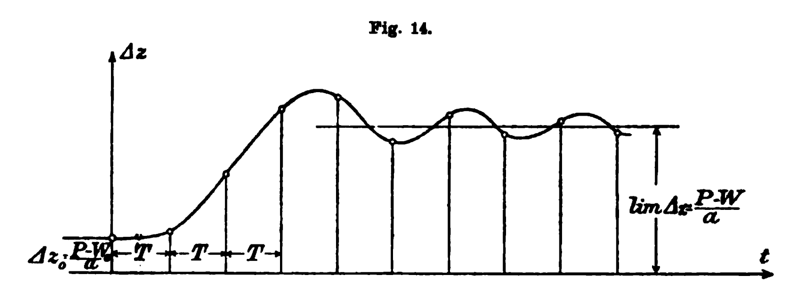
Fig. 13.



Regulatorstellungen in den Steuerungsabschlußpunkten aufgetragen. Der Regulator würde also ohne erhebliche Geschwindigkeitsschwankungen die Maschine in den neuen Beharrungszustand überführen.

Ist dagegen eine oder mehrere Wurzeln z_2, z_3, z_4 negativ, so verläuft das Regulierungsdiagramm nach Fig. 14. Der Regulator führt zwar

Fig. 14.



ebenfalls rasch einen neuen Beharrungszustand herbei, aber nicht ohne einige Schwankungen um die neue Gleichgewichtslage.

Ist dagegen eine der Wurzeln $= -1$, so wird kein neuer Beharrungszustand erzielt, da dann der Regulatorausschlag sowie die

Maschinengeschwindigkeit zwischen zwei Grenzlagen hin- und herschwankt.

Sind $z_2, z_3, z_4 < +1$, so geht die Maschine durch, wenn $W < W_0$, oder bleibt stehen, wenn $W > W_0$ ist. Im Falle $z_2 z_3 z_4 < -1$ dagegen werden die Amplituden der Geschwindigkeit und die Regulatorschwankungen größer und größer, falls dies die Hubbegrenzung der Regulatorbewegung zuließe. Die zuletzt besprochenen Fälle liefern daher unbrauchbare Reguliereinrichtungen.

Der Fall mehrerer gleicher Wurzeln für die Gleichung dritter Ordnung (16a) erfordert noch eingehendere Behandlung, da hier die Koeffizienten C zum Teil unendlich werden. Es seien zunächst zwei Wurzeln gleich und zwar $z_3 = z_4$. Alsdann geht Gleichung über in:

$$(15\text{a})\qquad x_n = C_1 z_1^{n-1} + C_2 z_2^{n-1} + z_3^{n-2}\left\{C_3 z_3 + \binom{n-1}{1} C_4\right\}.$$

Die Herleitung dieser Formel ist leicht und kann z. B. bei Cohn, a. a. O., nachgesehen werden. Die Berechnung der Konstanten C erfolgt in analoger Weise wie oben S. 275, wobei sich ergibt, daß dieselben auch in diesem Falle endliche Werte annehmen. Das gleiche Ergebnis liefert die Betrachtung des Falles $z_2 = z_3 = z_4$, wo sich für C_1 findet:

$$C_1 = \frac{x_4 - 3x_3 z_2 + 3x_2 z_2^2 - x \cdot z_2^3}{(z_1 - z_2)^3}.$$

Jetzt kann auch die Möglichkeit $z_2 = z_3 = z_4 = 0$ erledigt werden: Man hat in diesem Falle, wegen $z_1 = 1$

$$x_n = C_1 = x_4,$$

d. h. liefert die charakteristische Gleichung (16a) drei verschwindende Wurzeln $z_2 z_3 z_4$, was nur möglich ist, wenn PQR gleichzeitig Null sind, so ist nach vier Hüben der neue Beharrungszustand der Maschine hergestellt und zwar aperiodisch, d. h. ohne Pendelung um die neue Gleichgewichtslage.

Es erübrigt nun nur noch, die Möglichkeit zweier konjugiert komplexer Lösungen ins Auge zu fassen, etwa $z_3 = \alpha + \beta i$, $z_4 = \alpha - \beta i$. Die Nachrechnung zeigt, daß auch in diesem Falle die Regulatorausschläge x_k und die Winkelgeschwindigkeit y_k reell sind, da die beiden letzten Terme des Ansatzes (15) $C_3 z_3^{n-1}$, $C_4 z_4^{n-1}$ konjugiert komplex werden, ihre Summe also etwas Reelles liefert. Es wird mithin in diesem Falle

$$(15\text{c})\quad x_n = e_1 + e_2 z_2^{n-2} + [A\cos(n-1)\varphi + B\sin(n-1)\varphi]\,(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Damit hier x_n endlich bleibt, ist neben der schon oben aufgestellten Bedingung $(z_2) < 1$, nur noch erforderlich, daß auch $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, d. h. der

absolute Betrag der imaginären Wurzeln z_3 und z_4, kleiner als die Einheit ist.

Als Resultat der vorstehenden Untersuchung ergibt sich demnach folgendes:

Die Stabilitätskriterien des Reguliervorganges einer Maschine mit unstetiger Regelung lassen sich durch Untersuchung einer „charakteristischen" Gleichung dritter Ordnung finden. Für das Zustandekommen einer stabilen Regulierung ist es dabei nur erforderlich, daß die absoluten Beträge der Wurzeln dieser Gleichung kleiner als 1 sind. Bei Vorhandensein nur positiver Wurzeln findet der Übergang zum neuen Beharrungszustand ohne Pendelung um die neue Gleichgewichtslage (aperiodisch) statt, und zwar um so rascher, je näher die Wurzeln der Null liegen. Sind die Wurzeln teilweise negativ, so tritt erst nach einigen Schwankungen um die neue Gleichgewichtslage der neue Beharrungszustand wieder ein.

Auf Grund dieses Kriteriums ist man in der Lage, für eine gegebene Verbindung von Maschine und Regulator vorauszusagen, wie eine Störung des Beharrungszustandes verlaufen wird, ohne daß man gezwungen ist, nach Kargl oder Rülf umständliche Diagramme zu zeichnen; übrigens dürfte sich die Konstruktion der letzteren unter Zuhilfenahme des Ansatzes (15) wesentlich vereinfachen. Zur Berechnung von Regulatoren sind dagegen die abgeleiteten Formeln nicht in einfacher Weise brauchbar und zwar wegen des verwickelten Baues der Koeffizienten PQR. Man muß hier so vorgehen, daß ein fertiger Regulator an Hand des Stabilitätskriteriums auf seine Brauchbarkeit geprüft wird, wobei man je nach dem Ergebnis der Prüfung die zugrunde gelegten Konstanten des Reglers solange abändern kann, bis er die gewünschten Eigenschaften erhält.

Schlußbemerkung.

Auf Grund der vorliegenden Erörterungen kann wohl behauptet werden, daß nunmehr die theoretische Untersuchung der Reguliervorgänge im wesentlichen als abgeschlossen zu betrachten ist. Dagegen läßt die experimentelle Seite der Regulierungsfragen noch fast alles zu wünschen übrig. Es eröffnet sich hier ein weites Tätigkeitsfeld, auf dem nur wenige bis jetzt gearbeitet haben. Es ist dies um so erstaunlicher, als die verschiedenartigen Regulatortheorien zu einem Vergleich mit der Wirklichkeit geradezu herausfordern. Hoffen wir daher, daß dieser Zweig der technischen Experimentaldynamik demnächst eine eingehendere Beachtung erfährt als bisher.

Literaturangaben..

Außer der im Text angegebenen Originalliteratur kommen noch folgende mehr referierende und zusammenfassende Veröffentlichungen ergänzend in Betracht:

1. A. Föppl, Technische Mechanik IV.
2. E. J. Routh, Mechanik starrer Körper II.
3. L. Lecornu, Régularisation du Mouvement dans les Machines. Paris 1898.
4. W. Lynen, Berechnung der Zentrifugalpendelregulatoren. Berlin 1895.
5. J. Bartl, Berechnung der Zentrifugalpendelregulatoren. Leipzig 1900.
6. A. Laskus und H. Lang, Schwungräder und Zentrifugalregulatoren. Leipzig 1884.
7. C. Leist, Steuerungen der Dampfmaschinen. Berlin 1900.
8. W. Proell, Praktische Beurteilung von Regulierungsfragen. Leipzig 1902.
9. B. Stauffer, Der Bußsche Regulator. Zivilingenieur 1872, S. 1.
10. R. Proell, Die Mechanik der Zentrifugalregulatoren und deren pseudoastatische Aufhängung. Zivilingenieur 1872, S. 323.
11. Dr. Camerer, Versuche über die Regulierung der Ridersteuerung. Z. d. V. d. I. 1899, S. 1449f.
12. A. Seideler, Versuche an Dampfmaschinen mit Flachreglern. Z. d. V. d. I. 1898, S. 545.
13. V. Dwelshauvers-Dery, Étude Experimentale Dynamique de la Machine à Vapeur. Paris, (vor 1898).
14. P. Minel, Régularisation des Moteurs des Maschines Électriques. Paris, (vor 1898).
15. A. Föppl, Das Pendeln parallel geschalteter Maschinen. E. T. Z. 1903, Heft 4.
16. M. Leblanc, L.-E.-F. David, A. Cornu, P. Boucherot, Étude du mouvement des Machines à vapeur et accouplement des alternateurs en parallèle. Bull. de la Soc. Int. des Élektriciens, 1901. Tome I. (2e Série) No. 9.
17. G. Marié, Etude comparée des Regulateurs des Vitesse, de Pression, de Température et de Toutes Sortes. Ann. des Mines, 1878. Sér. 7. T. 14, p. 450.
18. G. Marié, Régulateurs, Organes de Réglage et Volants des Machines. Ann. des Mines, 1896. Sér. 9. T. 10. p. 391.
19. L. Lecornu, Les Régulateurs des Machines à Vapeur (Noch nicht abgeschlossen). Revue de mécanique T. 4. 5. 6. 7. 8.
20. J. Richardson, The Mechanical and Electrical Regulation of Steam-Engines. Minutes of Proc. of the Inst. of Civ. Eng. Vol. 120.
21. H. de la Goupillière, Théorie du Régulateur Duvoir. Ann. des Mines, 1860. Série 5. T. 18. pg. 575.
22. M. de Tcshebycheff, Du régulateur centrifuge. Les Mondes 1873. T. 31. p. 27.

3. 4. 5. 6. 7. 14. sind Lehrbücher.

17. 18. 19. 20. enthalten Beschreibungen der zur Zeit der Abfassung vorhandenen Regulatortypen nebst Besprechung ihrer praktischen Brauchbarkeit.

9. 21. 22. behandeln spezielle Typen vom statischen Standpunkt.

10. ist eine Statik der Zentrifugalregulatoren.

11. 12. 13. berichten über Versuche an Kraftmaschinen mit Regulator.

15. 16. gehören in die Nachbargebiete der Regulierung parallel geschalteter Maschinen.

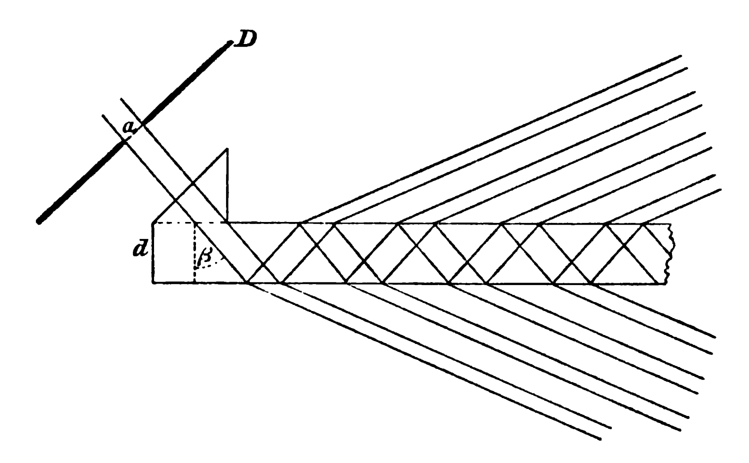


Über eine Beugungserscheinung, welche bei den Interferenzen an planparallelen Platten auftritt.

Von M. Laue in Straßburg i. E.[1])

Bei der Versuchsanordnung, welche die Herren Lummer und Gehrcke benutzten[2]), um die Interferenzerscheinungen an planparallelen Platten hervorzurufen, muß die Theorie der Vollständigkeit wegen, und um nicht mit dem Energieprinzip in Konflikt zu geraten, ein Beugungsphänomen berücksichtigen, welches bei früheren Versuchsanordnungen nicht auftrat.

Wir wollen zuerst die in Rede stehende Versuchsanordnung, soweit sie uns hier interessiert, beschreiben. Auf die planparallele Glas-



platte ist ein rechtwinkliges Prisma aus gleichem Material mit einer Kathetenfläche aufgekittet, durch dessen Hypotenusenfläche das Licht ungefähr senkrecht eintritt. Vorher hat es, ebenfalls etwa senkrecht, die Blende D passiert, deren Öffnung ein Spalt von der Breite a ist. In der Platte wird das eintretende Lichtbündel vielmals hin und her reflektiert, bei jeder Reflexion tritt ein Teil des Lichtes aus. Ein Fernrohr vereinigt die aus den Flächen der Platte austretenden Strahlen-

1) Die Abhandlung ist der zweite Teil der Dissertation (Berlin) des Verfassers in veränderter Form.

2) O. Lummer nnd E. Gehrcke Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, S. 11—17, 1902. Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 4 S. 337—346, 1902. Ann. d. Phys. 10 S. 459—477. 1903. E. Gehrcke, Arch. d. Mathem. u. Phys. 3 S. 216—228, 1903.

bündel in je einem Punkt seiner Brennebene und bringt sie dort zur Interferenz. Die Helligkeit dieser Punkte ist durch die Airy-Lummersche Formel gegeben.

Vernachlässigt man nun die Beugung an der Blende D, so wird man zu folgender Schlußreihe gezwungen: Es trete eine einzige ebene Welle in die Platte ein, bei welcher man Intensität, Wellenlänge und innerhalb gewisser Grenzen auch die Richtung unabhängig voneinander variieren kann. Die Energie, welche in die Platte gelangt, erhellt zum Teil zwei Punkte des Gesichtsfeldes mit (nahezu) gleicher Helligkeit, welche nicht nur von der Intensität des einfallenden Lichtes abhängt, sondern mit der Wellenlänge und Richtung außerordentlich schnell variiert. Ein anderer Teil der Energie verbleibt in der Platte und wird an ihrem anderen Ende absorbiert; dieser Teil hängt von der Wellenlänge und Richtung nur insofern ab, als er durch die Zahl der austretenden Wellen und der Reflexionskoeffizienten der Flächen der Platte bestimmt ist. Er ist also sehr viel weniger schnell veränderlich als der erstgenannte Teil. Trotzdem soll nach dem Energieprinzip die Energie des einfallenden Lichtes, vermindert um diesen zweiten Teil, gleich dem erstgenannten Teil sein. Man sieht, daß eine solche Gleichung unmöglich ist.

Diesen Konflikt mit dem Energieprinzip vermeidet man durch Berücksichtigung der Beugung an der Blende D.[1]) Es treten eben infolge dieser Einengung neben der ursprünglichen Welle solche auf, welche in der Richtung ein wenig von ihr abweichen; sodaß nicht nur zwei Punkte, sondern zwei kleine, von Interferenzstreifen durchzogene Bereiche des Gesichtsfeldes erhellt werden. Darum ist obige Schlußweise nicht zutreffend.

Im folgenden wollen wir nun den quantitativen Beweis führen, daß das Energieprinzip erfüllt wird, wenn wir die Beugung in Betracht ziehen. Zunächst kann man zwar einwenden, daß es durch Vergrößerung der Spaltbreite a möglich sein muß, ihren Einfluß beliebig klein zu machen. Man überzeugt sich aber leicht an der Figur, daß falls der Querschnitt des einfallenden Strahlenbündels, der mit der Spaltbreite identisch ist, eine gewisse Grenze überschreitet, ein Teil des eintretenden Lichts nach einmaliger Reflexion wieder aus der Platte in das Prisma übertritt und an den Interferenzen nicht teilnimmt. Diese Grenze ist,

1) In der Dissertation war angenommen, daß die Fläche, mit welcher das Prisma auf der Glasplatte aufsitzt, die stärkste Einschnürung des einfallenden Strahlenbündels darstellt. Man erhält aber nicht nur eine größere Übereinstimmung mit der wirklichen Versuchsanordnung, sondern auch einen höheren Grad der Annäherung, wenn man so verfährt, wie hier geschieht.

wenn d die Plattendicke, β die Neigung der Strahlen in der Platte gegen die Plattennormale bezeichnet, gleich $2d \sin\beta$. Also muß

$$a < 2d \sin\beta \tag{1}$$

sein. Läßt man aber a und d im gleichen Verhältnis wachsen, so schrumpfen zwar die Dimensionen der dem Spalt zugehörigen Beugungsfigur immer mehr zusammen, zugleich genügen aber um so kleinere Richtungsänderungen dazu, um nach der Airy-Lummerschen Formel wesentliche Änderungen der Helligkeit hervorzurufen.

Eine andere Folge der Ungleichung (1) ist, daß die austretenden Strahlenbündel räumlich getrennt sind, die Interferenzen kommen also erst im Fernrohr zustande. Wir können deshalb die Untersuchung so führen, daß wir zuerst die Energie berechnen, welche von den p aus jeder Fläche der Platte austretenden Strahlenbündeln mitgeführt wird, und zwar als Summe der Energiemengen, welche jedes einzelne Strahlenbündel mitführt; dann berechnen wir die Energie, welche man in der Brennebene des Fernrohrobjektivs auffangen kann und setzen beide Ausdrücke einander gleich.

Für die Intensität des Lichtes, welches durch Beugung aus seiner ursprünglichen Richtung um den Winkel φ abgelenkt ist, gibt die Theorie den Wert

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi a}{\lambda}\varphi}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\varphi\right)^2}.$$

Dieser Ausdruck ist nur genähert richtig. Wir müssen also von vornherein darauf verzichten, für die zu berechnenden Energiemengen streng gültige Ausdrücke zu finden; dies berechtigt uns, dauernd Näherungsmethoden zu benutzen.

Der obige Ausdruck setzt zunächst voraus, daß a groß ist gegen die Wellenlänge λ. In Übereinstimmung mit der tatsächlichen Versuchsanordnung erweitern wir diese Annahme dahin, daß a groß genug sein soll, um es zu rechtfertigen, daß wir für alle Richtungen, in denen Licht von merklicher Intensität fortschreitet, den Reflexionskoeffizienten σ^2 und den Koeffizienten δ^2, welcher das Verhältnis der Intensität des gebrochenen Strahles zu der Intensität des einfallenden angibt, als konstant ansehen. Denn je größer a wird, um so kleiner werden die Unterschiede der Richtungen, für welche der Ausdruck $\frac{\sin^2 \frac{\pi a}{\lambda}\varphi}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\varphi\right)^2}$ merklich ist. Ist ferner die Differenz $2d \sin\beta - a$ sehr klein, so tritt ein Teil

des gebeugten Lichts wieder aus der Platte aus; auch diesen Fall wollen wir ausschließen.

Jede von dem Spalt ausgehende Welle erfährt zunächst eine Brechung beim Eintritt in das Glasprisma. Da wir angenommen hatten, daß die ursprüngliche, durch $\varphi = 0$ charakterisierte Richtung auf der Prismenfläche nahezu senkrecht steht, so sind alle in Betracht kommenden Einfalls- und Brechungswinkel so klein, daß man für ihren Sinus sie selbst setzen kann. Gehört zu $\varphi = 0$ der Einfallswinkel ψ, so gehört zur Richtung φ der Einfallswinkel $\psi + \varphi$ und nach dem Brechungsgesetz der Brechungswinkel $\frac{\psi + \varphi}{n}$. Alle Abweichungen von der Richtung des ungebeugt durch den Spalt hindurchgehenden Lichtes werden also auf den $n$ten Teil herabgesetzt, gerade so, wie wenn die Blende D sich nicht in Luft, sondern in Glas befände. Verstehen wir also von nun an unter φ die Abweichung von der Richtung des ungebeugten Lichtes im Glas, so ist die Intensität des Lichtes, welches in der durch φ angegebenen Richtung fortschreitet

(2) $$\frac{\sin^2 \alpha\varphi}{\alpha^2\varphi^2}; \quad \alpha = \frac{n\pi a}{\lambda}.$$

Nach diesen Vorbereitungen berechnen wir die Energie, welche die p aus der hinteren Fläche der Platte austretenden Strahlenbündel mit sich führen, zunächst für eine einzige Fortpflanzungsrichtung φ. Sie ist in einer passend gewählten Einheit gleich:

$$\delta^2(1 + \sigma^4 + \sigma^8 + \cdots \sigma^{2(2p-2)}).$$

Die Energie der p Strahlenbündel, welche aus der Vorderfläche austreten, ist dann gleich

$$\delta^2(\sigma^2 + \sigma^6 + \sigma^{10} + \cdots \sigma^{2(2p-1)}).$$

Die Summe beider Energiemengen ist, wenn man zugleich alle Richtungen φ in Betracht zieht:

(3) $$\delta^2 \frac{1-\sigma^{4p}}{1-\sigma^2} \int \frac{\sin^2 \alpha\varphi}{\alpha^2\varphi^2} d\varphi.$$

Lichtstrahlen, die aus ihrer Richtung um φ abgelenkt sind, bilden mit der Plattennormalen den Winkel $\beta + \varphi$. Von ihnen rühren p aus der Hinterfläche austretende Strahlen her, welche im Fernrohr zur Interferenz gebracht, nach der Airy-Lummerschen Formel eine Helligkeit geben proportional zu:

(4) $$\delta^2 \frac{1 + \sigma^{4p} - 2\sigma^{2p}\cos p[\gamma\cos(\varphi+\beta)]}{1 + \sigma^4 - 2\sigma^2\cos[\gamma\cos(\varphi+\beta)]}; \quad \gamma = \frac{4\pi n d}{\lambda}.$$

Die aus der Vorderfläche austretenden Strahlen geben entsprechend die Helligkeit

$$\delta^2\sigma^2 \frac{1+\sigma^{4p}-2\sigma^{2p}\cos p[\gamma\cos(\varphi+\beta)]}{1+\sigma^4-2\sigma^2\cos[\gamma\cos(\varphi+\beta)]}.$$

Addiert man und berücksichtigt alle Richtungen φ, so findet man

$$(5)\qquad \delta^2(1+\sigma^2)\int\frac{1+\sigma^{4p}-2\sigma^{2p}\cos p[\gamma\cos(\varphi+\beta)]}{1+\sigma^4-2\sigma^2\cos[\gamma\cos(\varphi+\beta)]}\cdot\frac{\sin^2\alpha\varphi}{\alpha^2\varphi^2}\,d\varphi$$

als Ausdruck für die Energie, welche man in der Brennebene des Fernrohres auffangen kann.

Das Energieprinzip verlangt die Gleichheit von (3) und (5). Wir müssen also zeigen, daß

$$(6)\qquad \frac{1-\sigma^{4p}}{1-\sigma^4}\int\frac{\sin^2\alpha\pi}{\varphi^2}\,d\varphi$$
$$=\int\frac{\sin^2\alpha\varphi}{\varphi^2}\cdot\frac{1+\sigma^{4p}-2\sigma^{2p}\cos p[\gamma\cos(\varphi+\beta)]}{1+\sigma^4-2\sigma^2\cos[\gamma\cos(\varphi+\beta)]}\,d\varphi$$

ist. Dabei ist über alle Werte von φ zu integrieren, für welche der Ausdruck $\frac{\sin^2\alpha\varphi}{\alpha^2\varphi^2}$ merkliche Werte hat. Da nach unserer Annahme die Grenzen, zwischen denen dies stattfindet, sehr eng sind, dürfen wir einerseits $-\infty$ und $+\infty$ als Integrationsgrenzen einführen, andererseits

$$(7)\qquad \cos(\varphi+\beta)=\cos\beta-\varphi\sin\beta$$

setzen.

Um die Richtigkeit der Gleichung (6) nachzuweisen, wollen wir die Funktion

$$\frac{1+\sigma^{4p}-2\sigma^{2p}\cos pz}{1+\sigma^4-2\sigma^2\cos z}$$

in eine Fouriersche Reihe zerlegen. Aus der Theorie des Poissonschen Integrales entnehmen wir die Gleichung:[1])

$$\frac{1}{1+\sigma^4-2\sigma^2\cos z}=\frac{1}{1-\sigma^4}\left(1+2\sum_1^\infty\sigma^{2m}\cos mz\right),$$

welche lehrt, daß

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos mz\,dz}{1+\sigma^4-2\sigma^2\cos z}=\frac{2\sigma^{2m}}{1-\sigma^4}$$

ist. Allgemeiner lautet diese Gleichung:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos mz\,dz}{1+\sigma^4-2\sigma^2\cos z}=\frac{2\sigma^{2|m|}}{1-\sigma^4};$$

1) Encyklopädie der mathem. Wissensch. II A; 7b, § 19 u. 20.

denn in dieser Form ist sie auch für negative m anwendbar. Bei der gesuchten Entwicklung ist der Koeffizient von $\sin mz$ gleich Null. Der von $\cos mz$ hat den Wert

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{1+\sigma^{4p}-2\sigma^{2p}\cos pz}{1+\sigma^4-2\sigma^2\cos z}\cos mz\,dz$$

$$=\frac{1+\sigma^{4p}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos mz\,dz}{1+\sigma^4-2\sigma^2\cos z}-\frac{\sigma^{2p}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos(p+m)z+\cos(p-m)z}{1+\sigma^4-2\sigma^2\cos z}dz$$

$$=2\frac{\sigma^{2m}-\sigma^{2|p-m|+2p}}{1-\sigma^4}=0,\quad \text{wenn}\quad m\geqq p$$

$$=2\frac{\sigma^{2m}-\sigma^{4p-2m}}{1-\sigma^4},\quad \text{wenn}\quad m<p.$$

Demnach ist

$$\frac{1+\sigma^{4p}-2\sigma^{2p}\cos pz}{1+\sigma^4-2\sigma^2\cos z}=\frac{1-\sigma^{4p}+2\sum\limits_{1}^{p-1}\left(\sigma^{2m}-\sigma^{4p-2m}\right)\cos mz}{1-\sigma^4} \tag{8}$$

Durch die Substitution (8) geht (6) über in:

$$\sum_{1}^{p-1}\left(\sigma^{2m}-\sigma^{4p-2m}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha\varphi}{\varphi^2}\cos m[\gamma\cos(\varphi+\beta)]\,d\varphi=0. \tag{9}$$

Nun ist, wenn man Gleichung (7) benutzt:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha\varphi}{\varphi^2}\cos m[\gamma\cos(\varphi+\beta)]\,d\varphi$$

$$=\cos(m\gamma\cos\beta)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha\varphi}{\varphi^2}\cos(m\gamma\sin\beta\cdot\varphi)\,d\varphi$$

$$+\sin(m\gamma\cos\beta)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha\varphi}{\varphi^2}\sin(m\gamma\sin\beta\cdot\varphi)\,d\varphi.$$

Das letztere Integral verschwindet, weil die zu integrierende Funktion mit φ ihr Zeichen wechselt. Im ersten Integral setzen wir zunächst zur Abkürzung

$$m\gamma\sin\beta=\nu;$$

dann beachten wir, daß

$$\sin^2\alpha\varphi\cos\nu\varphi=\tfrac{1}{2}\cos\nu\varphi\,(1-\cos 2\alpha\varphi)$$
$$=\tfrac{1}{4}[2\cos\nu\varphi-\cos(\nu-2\alpha)\varphi-\cos(\nu+2\alpha)\varphi]$$

ist; ferner findet man durch Transformation der Integrationsvariablen wenn ε und μ zwei positive Zahlen sind,

$$\frac{\mu}{\nu}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\cos\nu\varphi}{\varphi^2}\,d\varphi=\int_{\frac{\nu}{\mu}\varepsilon}^{\infty}\frac{\cos\mu\varphi}{\varphi^2}\,d\varphi.$$

Ist

$$2\alpha<\nu=m\gamma\sin\beta, \tag{10}$$

so kann man in dieser Gleichung das eine Mal

$$\mu=\nu-2\alpha,$$

das andere Mal

$$\mu=\nu+2\alpha.$$

setzen. Addiert man die so entstehenden Resultate, so findet man

$$2\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\cos\nu\varphi}{\varphi^2}\,d\varphi=\int_{\frac{\nu\varepsilon}{\nu-2\alpha}}^{\infty}\frac{\cos(\nu-2\alpha)\varphi}{\varphi^2}\,d\varphi+\int_{\frac{\nu\varepsilon}{\nu+2\alpha}}^{\infty}\frac{\cos(\nu+2\alpha)\varphi}{\varphi^2}\,d\varphi,$$

oder

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}[2\cos\nu\varphi-\cos(\nu-2\alpha)\varphi-\cos(\nu+2\alpha)\varphi]\frac{d\varphi}{\varphi^2} \tag{11}$$

$$=4\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin^2\alpha\varphi}{\varphi^2}\cos\nu\varphi\,d\varphi=\int_{\frac{\nu\varepsilon}{\nu-2\alpha}}^{\varepsilon}\frac{\cos(\nu-2\alpha)\varphi}{\varphi^2}\,d\varphi+\int_{\frac{\nu\varepsilon}{\nu+2\alpha}}^{\varepsilon}\frac{\cos(\nu+2\alpha)\varphi}{\varphi^2}\,d\varphi.$$

Nun ist, wenn wir mit a_n, b_n, c_n Konstanten bezeichnen, deren Werte uns nicht interessieren,

$$\frac{\cos(\nu-2\alpha)\varphi}{\varphi^2}=\frac{1}{\varphi^2}+a_0+a_1\varphi^2+a_2\varphi^4+\cdots;$$

$$\int_{\frac{\nu\varepsilon}{\nu-2\alpha}}^{\varepsilon}\frac{\cos(\nu-2\alpha)\varphi}{\varphi^2}\,d\varphi=-\frac{2\alpha}{\varepsilon\nu}+b_0\varepsilon+b_1\varepsilon^3+b_2\varepsilon^5+\cdots.$$

Ebenso ist

$$\int_{\frac{\nu\varepsilon}{\nu+2\alpha}}^{\varepsilon}\frac{\cos(\nu+2\alpha)\varphi}{\varphi^2}\,d\varphi=\frac{2\alpha}{\varepsilon\nu}+c_0\varepsilon+c_1\varepsilon^3+c_2\varepsilon^5+\cdots.$$

Mithin gilt die Reihenentwicklung (nach (11))

$$4\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin^2\alpha\varphi}{\varphi^2}\cos\nu\varphi\,d\varphi=(b_0+c_0)\varepsilon+(b_1+c_1)\varepsilon^3+(b_2+c_2)\varepsilon^5+\cdots$$

Aus ihr folgt unmittelbar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha \varphi}{\varphi^2} \cos \nu \varphi \, d\varphi = 2 \int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha \varphi}{\varphi^2} \cos \nu \varphi \, d\varphi = 0,$$

unter Voraussetzung von (10).

Da in (10) m alle Werte von 1 bis $p-1$ annehmen kann, müssen wir

$$2\alpha < \gamma \sin \beta$$

voraussetzen. Nach (2) und (4) ist diese Forderung aber identisch mit Ungleichung (1)

$$\alpha < 2d \sin \beta.$$

Also ist bewiesen, daß die in (9) auftretenden Integrale einzeln verschwinden, daß also Gleichung (6), welche das Energieprinzip ausspricht, richtig ist.

Die ersten Nullstellen der Funktion $\frac{\sin^2 \alpha \varphi}{\alpha^2 \varphi^2}$ liegen dort, wo

$$\alpha \varphi = \pm \pi$$

ist. Ihr Winkelabstand beträgt also $\frac{2\lambda}{n a}$ nach (2). Zwei Maxima der Funktion $\frac{1 + \sigma^{4p} - 2\sigma^{2p} \cos p[\gamma \cos(\varphi + \beta)]}{1 + \sigma^4 - 2\sigma^2 \cos[\gamma \cos(\varphi + \beta)]}$ haben aber nach (4) und (7) den Winkelabstand $\frac{\lambda}{2nd \sin \beta}$. Nach (1) ist nun

$$\frac{\lambda}{n a} > \frac{\lambda}{2nd \sin \beta}.$$

Also treten stets mindestens zwei Interferenzstreifen im Gesichtsfeld auf, auch wenn nur eine einzige ebene Welle auf den Apparat auftrifft.

In Wirklichkeit hat man nie eine einzige solche Welle, sondern immer unendlich viele, deren Richtungen in einem gewissen Intervall stetig aufeinanderfolgen. Deshalb sieht man im Fernrohr die Helligkeitsverteilung

$$\frac{1 + \sigma^{4p} - 2\sigma^{2p} \cos p[\gamma \cos \psi]}{1 + \sigma^2 - 2\sigma^2 \cos[\gamma \cos \psi]} \cdot \int \frac{\sin^2 \alpha(\psi - \beta)}{\alpha^2(\psi - \beta)^2} \, d\beta;$$

(dabei ist $\varphi + \beta = \psi$ gesetzt). Da dies Integral bei dem raschen Abfall der zu integrierenden Funktion von ihrem Maximalwert 1, den sie für $\beta = \psi$ annimmt, von ψ nahezu unabhängig ist, solange ψ den Integrationsgrenzen nicht zu nahe kommt, hat die Beugung auf das Aussehen der Interferenzstreifen, die nicht an den Rändern des erleuchteten Gesichtsfeldes liegen, keinen Einfluß.

Straßburg i. E., den 12. Oktober 1903.

Theorie der Störungen der Stützlinien.

Von † JOSEF PETZVAL.

Vorwort.

Dr. Josef Petzval, der in den Jahren 1837—1877 als Professor der Mathematik an der Wiener Universität gewirkt und sich hauptsächlich auf dem Gebiete der angewandten Mathematik den Ruf eines bedeutenden Gelehrten erworben hat, ist zunächst berühmt geworden durch seine scharfsinnigen Berechnungen, mit welchen er im Jahre 1840 und später die sogenannten lichtstarken Doppelobjektive schuf, durch die er zum Bahnbrecher in der praktischen Photographie geworden war. Sein Bestreben war, die Mathematik nicht als Selbstzweck, sondern hauptsächlich als Mittel zur Erkenntnis der Naturgesetze zu betrachten und die gewonnenen Resultate für das Leben nutzbringend anzuwenden. Und hierin trat er durchaus selbständig schöpferisch auf und wußte namentlich in seinen Vorträgen, in denen er sowohl durch die Wahl der Stoffe, wie auch durch die fesselnde Art der Behandlung hervorragte, selbst bei den trockensten Gegenständen das lebendigste Interesse zu erwecken.

So trug er außer den in das Gebiet der reinen Mathematik fallenden Gegenständen und zwar: Integration der linearen Differentialgleichungen, Theorie der algebraischen und höheren Gleichungen, vornehmlich einzelne Kapitel aus dem Gebiete der *Akustik*, *Ballistik*, *Mechanik des Himmels*, *Optik* usw. vor, die in jedem Semester ein wohlabgerundetes Ganzes bildeten, und bei denen er durch seine meisterhaften, stets frei gehaltenen Vorträge eine besondere Gestaltungskraft zu entfalten wußte.

Groß angelegt waren auch seine Vorträge über *analytische Mechanik*, in deren deduktiver und mathematischer Behandlung er ein Meister ohne Gleichen war. Nicht nur, daß er hierbei durchaus moderne Grundlagen eingeführt hatte, so wußte er auch, zumal er vor seiner Professur ursprünglich ausübender Bauingenieur gewesen war, die praktische Nutzanwendung durch eingeflochtene Kapitel insbesondere aus der Baumechanik, namentlich Probleme des Hoch- und Brücken-

baues, hochinteressant zu gestalten. Als ein Kapitel gehörte hierzu auch seine *Theorie der Störungen der Stützlinien*, zu deren Aufstellung er schon vor dem Jahre 1850, als noch der Bau von Kettenbrücken im Schwunge war, veranlaßt wurde.

Leider hat er seine Arbeiten nicht veröffentlicht, sondern nur in den Vorträgen zu Gunsten seiner Schüler verwendet. Mit Ausnahme seiner *„Integration der linearen Differentialgleichungen mit konstanten und variablen Koeffizienten"*, welche die kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien herausgegeben hat, ist von ihm nichts von Bedeutung gedruckt worden. Ein auf drei Bände berechnetes Werk über Optik, dessen Veröffentlichung gleichfalls die Akademie übernommen hatte, hat das Licht der Welt nicht erblickt, weil das bereits druckfertige Manuskript von Dieben, die in seine Sommerwohnung eingedrungen waren und nach Wertpapieren suchten, mit anderen, gleichfalls wertvollen handschriftlichen Aufzeichnungen teils verbrannt, teils sonst zerstört worden ist.

Als ihm im Jahre 1901 in der Ruhmeshalle der Wiener Universität ein Denkmal gesetzt worden und damit sein Name wieder in Erinnerung gekommen war, hat sein Biograph[1]) bei der Suche nach Daten über seine persönlichen Verhältnisse, über die bisher so gut wie gar nichts bekannt war, auf dem Dachboden des Hauses, in welchem Petzval gewohnt hat, einen Wust von Papieren gefunden, aus denen er auch die für seine Vorträge bestimmten Aufzeichnungen über die Theorie der Störungen der Stützlinien herauslesen konnte; leider fand sich nur der erste, theoretische Teil, während der zweite, in welchem er die praktische Nutzanwendung erläuterte, verloren gegangen ist, ein Schicksal, welches auch andere Arbeiten von ihm getroffen hat.

Daß diese Theorie zur Zeit ihrer Aufstellung nicht die ihrer Bedeutung entsprechende Würdigung fand, erklärt sich einerseits aus dem Umstande, daß Petzval sie an einer Hochschule vortrug, deren Schüler nicht in die technische Praxis eintraten, die also keine Gelegenheit zu deren Anwendung oder weiteren Ausbildung fanden. Andererseits war wohl auch Petzvals Bescheidenheit Ursache, daß er sowohl diese, wie manche andere wertvolle Arbeit der Öffentlichkeit nicht übergab, die bei dem damaligen Stande der betreffenden Disziplinen in Fachkreisen wohl ebenso berechtigtes Aufsehen erregt hätten.

Wenn nun auch diese Theorie in einer Zeit, die mit Recht auf die hohe Entwickelung der Theorie der Gewölbe und der Hängebrücken

1) Dr. Erményi, *Dr. Josef Petzvals Leben und Verdienste.* Zweite, wesentlich vermehrte Aufgabe mit 11 Bildern und 3 Figuren. W. Knapp, Halle a. d. S. 1903.



hinweisen darf, eine volle aktuelle Bedeutung nicht mehr beanspruchen kann, so ist es doch unzweifelhaft von großem Interesse, zu erfahren, wie gründlich und klar dieser Gelehrte schon in der Mitte des vorigen Jahrhunderts über die hier in Betracht kommenden schwierigen Fragen dachte, mit welch' originellen und eleganten Methoden er diese Fragen zu lösen bestrebt war, und zu welch' bedeutsamen Ergebnissen er dabei gelangt war. In dieser Beziehung sei hier beispielsweise nur auf die im VI. und VII. Abschnitte enthaltenen Untersuchungen über die Stützlinien elastischer Bögen und über den Einfluß von Temperaturveränderungen besonders hingewiesen. Eine nachträgliche Veröffentlichung dieser Theorie, wenn auch nur als Fragment, erschien daher nicht nur aus Gründen der Pietät für den dahingeschiedenen Gelehrten und des historischen Interesses an seinen bahnbrechenden Arbeiten, sondern mehr noch vom Standpunkte der reinen Wissenschaft überaus wünschenswert. Denn von diesem Standpunkte aus gewinnen neben den erzielten Erkenntnissen ganz besonders auch die Methoden Bedeutung, welche zu denselben führen, sowie die diesen Methoden zugrunde liegenden Gedanken, und die Fälle sind gar nicht selten, wo solche Gedanken auch auf anderen Gebieten als jenen, auf welchen ihre Wirksamkeit zuerst erprobt wurde, sich als fruchtbringend erweisen.

Dies waren die Gründe, welche den Finder der Handschrift sowie den Unterzeichneten in Übereinstimmung mit hervorragenden Fachgelehrten bewogen, eine Veröffentlichung dieser Theorie anzustreben.

Dank dem Entgegenkommen der Leitung dieser Zeitschrift liegt dieselbe nunmehr vor und wird, so hoffen wir, nicht nur das Andenken an einen großen Forscher neu beleben, sondern auch vielen kundigen Lesern geistigen Genuß und wertvolle Anregung bieten.

Wien, im Oktober 1903. Baurat F. PFEUFFER.

Einleitung.

Um über den Inhalt dieser Abhandlung einen vorläufigen Begriff zu erlangen, denke man sich einen elastischen Körper, dessen eine Dimension, z. B. die nach der Länge, vorwiegt und dessen Bestandteile von beschleunigenden Kräften getrieben werden, so gestaltet, daß eine Ebene, z. B. eine Vertikale, denselben der Länge nach in zwei symmetrische Hälften teilt, symmetrisch sowohl in Anbetracht der materiellen Bestandteile, als auch der daran angebrachten Kräfte. Halten sich nun diese das Gleichgewicht, so entstehen daraus innere Spannungen, und denkt man sich dieses elastische System durch einen auf die

Mittelebene senkrechten Querschnitt in zwei Stücke zerlegt, so wird eines dieser beiden Stücke auf das andere in eben diesem Querschnitte vermöge der vorhandenen Spannungen mit Kräften wirken, die eine einzige in die Mittelebene fallende bestimmte Resultante zulassen, weil sich leicht zeigen läßt, daß in einem solchen Falle die bekannte Bedingungsgleichung der Existenz einer einzigen Resultante erfüllt ist. Diese Resultante schneidet nun den ihr zugehörigen Querschnitt in einem Punkte, welcher nach der für denselben bereits üblichen Benennung *Stützpunkt* heißt. Die den verschiedenen Querschnitten zugehörigen Stützpunkte aber geben verbunden eine in die Mittelebene fallende Linie, welche wir *Stützlinie* nennen wollen, ebenfalls eine für diese Kurve bereits im Gebrauche stehende Benennung.

Sind nun die beschleunigenden Kräfte stetige Funktionen der Koordinaten und gilt dasselbe auch von den sämtlichen Eigenschaften des elastischen Körpers, so wird auch die Stützlinie eine stetige krumme Linie sein, gegeben durch eine einzige für die ganze Ausdehnung des Körpers gültige Koordinatengleichung. Besteht hingegen der Körper aus mehreren Teilen von verschiedener Beschaffenheit, oder die belebt werden von Kräften, die andere und andere Funktionen der Koordinaten sind, so zerfällt auch die Stützlinie in mehrere verschiedene, anderen und anderen Koordinatengleichungen gehorchende Kurven.

Eine ähnliche Zusammensetzung der Stützlinie aus mehreren Teilen in unstetiger Weise findet aber auch noch in einem anderen Falle statt; wenn nämlich der elastische Körper zwar stetigen Baues und auch von stetigen beschleunigenden Kräften affiziert ist, wenn aber zu diesen Kräften noch eine oder mehrere andere hinzutreten, die nicht das ganze System, sondern nur einen oder einige Punkte desselben, oder auch einen oder einige Querschnitte besonders belasten, auch in diesem Falle, welcher hier besonders ins Auge gefaßt werden soll, erleidet die Stützlinie durch das Hinzutreten der letzterwähnten Belastungen gewisse Veränderungen unstetiger Art, welche wir *unstetige Störungen der Stützlinie* nennen wollen. Mit ihnen sind zugleich Veränderungen in den inneren Spannungen verknüpft, die wir mit dem Namen *Störungen der Spannungen* belegen. Endlich treten noch infolge der besonderen Belastungen Verschiebungen der kleinsten Teile des elastischen Körpers und Änderungen seiner Gestalt auf, die hier *Störungen der Position und der Gestalt* heißen sollen.

Die gegenwärtige Abhandlung nun hat zum Zwecke Methoden aufzustellen, die zu mathematischen Ausdrücken für alle diese Störungen

führen, und dieselben durch Beispiele an Stützlinien von hervorragender Wichtigkeit zu erläutern.[1])

Das erste Problem dieser Art ist von Bernoulli in der Theorie der elastischen Linie gelöst worden. Es erscheint hier in seiner allereinfachsten Art: Die Urform der elastischen Feder geradlinig; von beschleunigenden Kräften wird ganz abgesehen, und die Zahl der störenden, einzelne Punkte belastenden Kräfte ist auf eine einzige zurückgeführt. Gleichwohl erscheinen bei der Integration der Differentialgleichung der elastischen Linie elliptische Funktionen, und man gelangt zu Ausdrücken von praktischer Geschmeidigkeit nur in dem Falle, wenn man die der Feder erteilte Krümmung sehr klein voraussetzt, mithin versteht es sich beinahe von selbst, daß in komplizierteren Fällen die Voraussetzung der Kleinheit der Störungen nicht nur rätlich, sondern auch unerläßlich sei, was sich übrigens schon aus dem in der Mechanik des Himmels üblichen Ausdrucke „Störungen“ zu ergeben scheint, welcher dort ebenfalls zur Bezeichnung kleiner Veränderungen gebraucht wird.

Sind aber die Störungen klein, so sind es, wenn auch nicht immer, so doch im allgemeinen, die störenden Ursachen auch. Wir werden daher von der Voraussetzung ausgehen, daß die störenden Kräfte gegen die Resultanten der inneren Spannungen klein seien. Dies bringt den doppelten Vorteil, daß man erstens nur Gleichungen von linearer Form begegnet, deren Behandlung bekanntlich die einfachste ist, und daß man zweitens von der Annahme einer einzigen störenden Ursache auszugehen das Recht hat, und dann nach dem Prinzipe der Koexistenz der kleinsten Wirkungen durch einfache Aggregation der letzteren zu den Gesamtwirkungen mehrerer sich aufhäufender störenden Ursachen übergehen kann.

Der Methoden, zu den analytischen Ausdrücken der in Rede stehenden unstetigen Störungen zu gelangen, bringt die vorliegende Abhandlung zwei, deren jede in verschiedenen Fällen ihre vorzugsweise Berechtigung haben dürfte. Die erste ist mit der bekannten Methode der Variation der Konstanten verwandt, hier namentlich derjenigen Konstanten, die in der allgemeinen Urgleichung der Stützlinien vorkommen. Die zweite hingegen fängt damit an, den Differentialgleichungen der Stützlinie selbst die Störungen der Position abzufragen, und entwickelt daraus die übrigen Störungen der Stützlinie, der Gestalt und der Spannungen.

---

1) Der zweite Teil, in welchem Petzval die praktische Anwendung seiner Theorie erläutert hat, ist verloren gegangen.

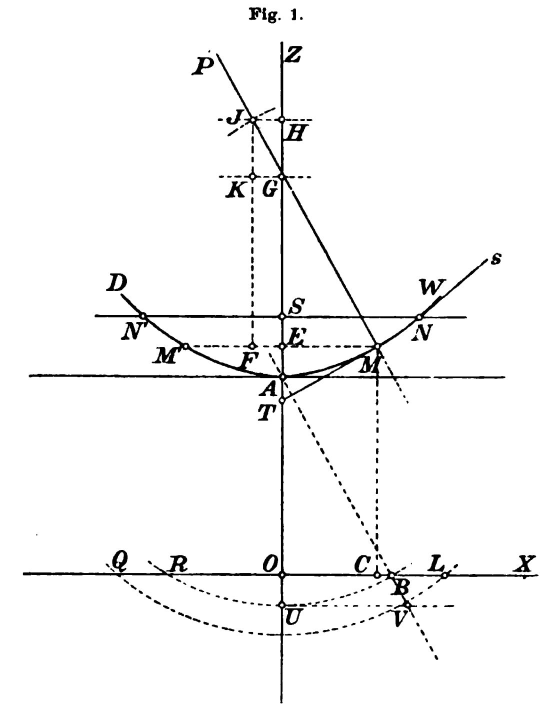


Erster Teil.

I. Theorie der Stützlinie. Kettenlinie und Linie des gleichen Widerstandes.

Es lassen sich materielle Systeme denken, die durch ihre Gestalt auch diejenige der ihnen entsprechenden Stützlinie wiedergeben. Ein solches Gebilde ist ein vollkommen biegsamer Faden von beliebig nach einem gewissen Gesetze veränderlichem spezifischen Gewichte, affiziert von gleichfalls beliebigen beschleunigenden Kräften. Dies ist zwar nur eine mathematische Fiktion, aber eine zulässige.

Ferner läßt sich zu einer jeden gegebenen Stützlinie eine unendliche Menge von elastischen Massensystemen denken, welche gerade diese Stützlinie besitzen. Man geht somit den kürzesten Weg und wird zugleich der mathematischen Allgemeinheit am besten gerecht, wenn man von der Theorie der Stützlinie als Form eines biegsamen, mit Masse begabten Fadens ausgeht.



Es sei also $DAMW$ Fig. 1 ein solcher Faden, OX und OZ seien die Koordinatenachsen der x und z, O ihr Anfangspunkt, der Bogen $AM = s$. Man denkt sich den Faden eingeteilt in sehr kleine Elemente von der Länge ds; MN sei ein solches. Die Koordinaten von M seien x und z, die von N aber $x + dx$, $z + dz$. Das entweder konstante oder mit den Koordinaten wie immer veränderliche Gewicht einer Längeneinheit des Fadens sei μ, mithin μds das Gewicht eines Elementes desselben in der Länge $MN = ds$. Ferner sei die Schwere die einzige hier tätige Kraft, parallel zur Achse der Z wirkend; die durch dieselbe dem Faden mitgeteilte Spannung, als Wirkung betrachtet, die durch ein gewisses Gewicht hervorgebracht werden kann, welches

den Faden der Länge nach belastet, und deshalb durch eben dieses Gewicht ausgedrückt, heiße λ im Punkte M, also $\lambda + d\lambda$ im Punkte N. Die beiden zur Achse der x und z parallelen Komponenten der an dem einen Ende M des Elementes MN tätigen Spannung λ sind $-\lambda\frac{dx}{ds}$ und $-\lambda\frac{dz}{ds}$, negativ genommen deshalb, weil sie eine Verkürzung der Koordinaten x und z zu bewerkstelligen streben. Die Komponenten hingegen der Spannung $\lambda + d\lambda$, die dem anderen Ende N desselben Elementes entspricht, sind

$$\lambda\frac{dx}{ds} + d\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right) \quad \text{und} \quad \lambda\frac{dz}{ds} + d\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right),$$

positiv genommen, weil sie eine Vergrößerung der Koordinaten x und z des Elementes MN anstreben; hierzu kommt noch das Gewicht μds des in Rede stehenden Massenteilchens als fünfte der aufgezählten Kräfte, von welchen zwei parallel sind zur Achse der x, nämlich:

$$-\lambda\frac{dx}{ds} \quad \text{und} \quad \lambda\frac{dx}{ds} + d\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right),$$

und drei parallel zur Achse des Z nämlich:

$$-\lambda\frac{dz}{ds}, \quad -\mu ds \quad \text{und} \quad \lambda\frac{dz}{ds} + d\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right).$$

Soll nun unter dem Gebahren dieser Kräfte das Teilchen μds im Gleichgewichte bleiben, so muß sowohl die Summe der einen, wie auch die der anderen Kräfte für sich Null geben. Dies führt zu folgenden Gleichungen:

$$(1) \qquad d\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \mu ds = d\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right).$$

Von ihnen ist die erste der unmittelbaren Integration fähig und gibt

$$(2) \qquad \lambda\frac{dx}{ds} = c,$$

besagend, daß die zur Achse der x parallele, d. h. horizontale Komponente der Spannung im ganzen Bereiche des Fadens konstant sei. Den daraus hervorgehenden Wert von λ, nämlich

$$(3) \qquad \lambda = c\frac{ds}{dx},$$

substituieren wir in die zweite der Gleichungen (1) und erhalten:

$$(4) \qquad \mu ds = d\left(c\frac{dz}{dx}\right) = c\frac{d^2 z}{dx}.$$

Diese Gleichung gibt nun entweder, wenn μ, d. h. die Belastung gegeben wird, die Koordinate z als Funktion von x, mithin die Gleichung der Stützlinie auf dem Wege der Integration; oder, wenn man die Stützlinie willkürlich annimmt, die zu derselben gehörige Belastung μ ohne alle Integration. Z. B. man wünscht, der biegsame Faden soll die Gestalt einer Parabel annehmen, deren Gleichung $2hz = x^2$ ist, so erhält man, diese Gleichung zweimal differenzierend, wobei dx als konstant angesehen werden kann, und das so gefundene d^2z in die Gleichung (4) eingeführt wird,

$$\mu ds = \frac{c}{h} dx.$$

Dies besagt: wenn man die Parabel als Stützlinie haben will, so muß man die Koordinatenachse der x gleichförmig mit dem Gewichte $\frac{c}{h}$ auf die Längeneinheit belasten.

Und so hat es keine Schwierigkeit zu einer jeden, durch ihre Gleichung gegebenen Kurve die zugehörige Belastung zu finden, die dieselbe in eine Stützlinie verwandelt. Schwerer ist es zu einer gegebenen Belastung μ das z in Funktion von x, d. h. die Stützlinie zu finden, weil die Gleichung (4), welcher z zu entnehmen ist, eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung nach z ist, mithin zwei Integrationen erfordert.

Hier ist zunächst der Fall von Interesse, wo $\mu = m$ konstant ist. Die Gleichung (4) kann da sogleich integriert werden und liefert

$$ms = c\frac{dz}{dx}. \tag{5}$$

Sie gibt s, wenn z bekannt ist; die Integrationskonstante ist $= 0$, wenn man die Achse der z durch den tiefsten Punkt der Kurve führt, in welchem $dz = 0$ ist. Um nun auch z zu erhalten, setzen wir in (4)

$$\frac{dz}{dx} = p \quad \text{also} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + p^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2z}{dx} = dp,$$

so entsteht die Differentialgleichung

$$m dx\sqrt{1 + p^2} = c dp,$$

welche integriert

$$\frac{mx}{c} = \log\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) + C$$

liefert, allwo C die Integrationskonstante bedeutet, die aber vermöge der durch den tiefsten Punkt der Kurve gelegten Achse der Z ebenfalls verschwindet.



Vom Logarithmus zu Exponentialen übergehend und der Kürze wegen $\frac{c}{m} = h$ setzend, erhalten wir

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right] = \frac{ms}{c} = \frac{s}{h}. \tag{6}$$

Und durch abermaliges Integrieren

$$z = \frac{h}{2}\left[e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right]. \tag{7}$$

Wir gestatten uns auch hier, um der Gleichung der Kurve die einfachste Gestalt zu erteilen, die Integrationskonstante zu ersetzen durch Null. Dies geht darauf hinaus, den Anfangspunkt der Koordinaten unter dem tiefsten Punkte der Kurve so zu wählen, daß für $x = 0$, $z = h$ wird, wie die Gleichung (7) lehrt; diese Kurve ist die wohlbekannte *Kettenlinie.*

Sie zeichnet sich durch die äußerste Einfachheit im analytischen Ausdrucke aller zu ihr gehörigen Größen, wie Bogenlänge, Spannung, Krümmungshalbmesser usw. vorteilhaft aus, enthalten in folgender Formelgruppe:

$$z^2 = s^2 + h^2 \tag{8}$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{z}{h} \quad \text{mithin} \quad \frac{dx}{ds} = \frac{h}{z} \quad \text{und} \tag{9}$$

$$\lambda = c\frac{ds}{dx} = \frac{c}{h}z = mz \tag{10}$$

$$r = \frac{ds^3}{d^2z\,dx} = \frac{z^2}{h}. \tag{11}$$

Die erste von ihnen lehrt, daß der Bogen AM (Fig. 1) der Kettenlinie in eine Gerade ausgestreckt werden könne durch die folgende sehr einfache Konstruktion.

Man fasse die Ordinate $z = MC$ des Endpunktes des Bogens mit dem Zirkel ab, setze die eine Spitze in A und durchschneide mit der anderen die Achse der x in B, sodaß $AB = z$ ausfällt, so ist die Gerade OB gleich dem Bogen $AM = s$.

Die dritte dieser Gleichungen (10) besagt, daß die Spannung in jedem Punkte der Kette durch die Ordinate z dieses Punktes gegeben sei. Das Gewicht nämlich eines Kettenstückes von der Länge dieser Ordinate ist gleich der Spannung im Punkte, zu welchem diese Ordinate gehört.

Die vierte bestimmt den Krümmungshalbmesser r und besagt, daß derselbe gewonnen werde durch die Hilfskonstruktion einer Parabel mit dem Parameter h, in welcher die zu den Ordinaten z gehörigen

Abszissen die Krümmungshalbmesser sind. Wir werden später noch ein bequemeres Mittel kennen lernen, diese in der Theorie der Störungen hochwichtige Linie zu konstruieren.

Nach der Kettenlinie wollen wir noch eine zweite Stützlinie kennen lernen entsprechend der praktisch wohlbegründeten Forderung, daß die Stärke des Fadens in allen Punkten der Spannung proportional gemacht wird.

Die krumme Linie, welche ein biegsamer Faden unter dieser Bedingung beschreibt, kann füglich *Kurve des gleichen Widerstandes* genannt werden. Die geforderte, allenthalben gleiche Stärke wird nun erreicht, wenn das Gewicht der Kurrenteinheit des Fadens μ der Spannung λ proportional gewählt, also etwa:

$$\mu = \frac{\lambda}{h} \tag{12}$$

gesetzt wird, unter h eine Linie von konstanter Länge verstanden. Führt man diesen Wert von μ in die Gleichung (4) ein und ersetzt sodann λ durch seinen Wert aus (3), so gelangt man zur Differentialgleichung:

$$ds^2 = h d^2 z, \tag{13}$$

die mit Hilfe der Annahme $\frac{dz}{dx} = p$ übergeht in

$$dx = \frac{h dp}{1+p^2}, \quad \text{integriert} \quad p = \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}\frac{x}{h}. \tag{14}$$

Die Annahme, daß die x vom tiefsten Punkte der Kurve gezählt werden, wo $p = 0$ ist, macht auch hier die Integrationskonstante wegfallen; abermals integrierend erhalten wir

$$z = -h \log \cos \frac{x}{h}.$$

Wenn wir auch hier, um die einfachste mögliche Gleichung zu erzielen, die Konstante $= 0$ gewählt haben, so geschieht dies offenbar in der Voraussetzung, daß wir den Anfangspunkt der Koordinaten in den tiefsten Punkt der Kurve und nicht außerhalb, wie bei der Kettenlinie, verlegt haben. Nun kommen noch der Bogen s, die Spannung λ und der Krümmungshalbmesser r zu berechnen. Anlangend den Bogen s hat man:

$$ds = dx\sqrt{1+p2} = \frac{dx}{\cos\frac{x}{h}} = \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2h} - \sin^2\frac{x}{2h}} = \frac{dx\sec^2\frac{x}{2h}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2h}},$$

oder

$$ds = \frac{2h\cdot d\operatorname{tg}\frac{x}{2h}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2h}} = \frac{h\cdot d\operatorname{tg}\frac{x}{2h}}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2h}} + \frac{h\cdot d\operatorname{tg}\frac{x}{2h}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2h}}.$$

Dies gibt integriert

$$(16)\qquad s = h \log \frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2h}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2h}} = h \log \frac{\cos\frac{x}{2h}+\sin\frac{x}{2h}}{\cos\frac{x}{2h}-\sin\frac{x}{2h}} = h \log \frac{1+\sin\frac{x}{h}}{\cos\frac{x}{h}}.$$

Eine Konstante wird auch hier nicht angefügt unter der Voraussetzung, daß mit x auch s verschwindet.

Ferner ist:

$$(17)\qquad \lambda = c\frac{ds}{dx} = \frac{c}{\cos\frac{x}{h}} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\lambda}{h} = \frac{c}{h\cos\frac{x}{h}}.$$

Nennen wir das Gewicht der Längeneinheit des Fadens im Scheitel der Kurve wie bei der Kettenlinie m, so ist $m = \frac{c}{h}$, und, da der Krümmungshalbmesser

$$(18)\qquad r = \frac{ds^3}{d^2z\,dx} = \frac{h}{\cos\frac{x}{h}}$$

ist, auch

$$\lambda = mr.$$

Dies besagt, daß die Spannung in einem jeden Punkte der Kurve durch den Krümmungshalbmesser in ähnlicher Weise dargestellt werde, wie in der Kettenlinie durch die Ordinate. Sie ist nämlich gleich dem Gewichte eines Fadenstückes von allenthalben gleichem Querschnitte, demjenigen nämlich, welcher der Kurve am Scheitel für $x = 0$ entspricht und von der Länge des Krümmungshalbmessers ist.

Durch andere und stets andere Annahmen von Werten für μ kann man zu einer reichen Mannigfaltigkeit von verschiedenen Stützlinien gelangen. Wir beschränken uns aber vorderhand auf die drei angeführten Individuen, nämlich die Parabel, die Kettenlinie und die Kurve des gleichen Widerstandes, denen beziehentlich die Gleichungen

$$(19)\qquad 2hz = x^2, \quad z = \frac{h}{2}\left[e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right], \quad z = -h\log\cos\frac{x}{h}$$

angehören, weil sie als passende Beispiele zu unseren Zwecken hinreichen.

Sie stehen zu einander in einer gewissen Verwandtschaft; alle drei besitzen den gemeinschaftlichen Krümmungshalbmesser h am Scheitel, d. h. im tiefsten ihrer Punkte, und stehen alldort, wenn man sie alle mit gemeinsamem Scheitel verzeichnet denkt, sowohl unter sich als auch mit einem Kreise vom Halbmesser h in einer Berührung der 3ten Ordnung, und zwar ist die Parabel dann die äußerste dieser Linien, zunächst folgt nach jenen die Kettenlinie, dann die Kurve des gleichen Widerstandes, und endlich der Kreis.

Jede von diesen drei Stützlinien besitzt zwei vertikale zur Achse der z parallele Asymptoten, die bei der Parabel bekanntlich in eine unendliche Entfernung fallen; bei der Kettenlinie auch, weil vermöge der Gleichung (6) $\frac{dz}{dx} = \pm \infty$ nur dann wird, wenn auch $x = \pm \infty$ ist. Anders ist es bei der Kurve des gleichen Widerstandes; denn hier wird infolge der Gleichung (14) $\frac{dz}{dx} = \pm \infty$, wenn $x = \frac{h\pi}{2}$ ausfällt. Die zwei ersten nehmen daher in der Richtung der Achse der x einen unendlichen Raum ein, die dritte hingegen überspannt nur die Strecke $h\pi$; unter π die Ludolphsche Zahl verstanden, weil $h\pi$ die Entfernung der zwei vertikalen Asymptoten ist.

Es wäre, um die mechanische Kenntnis dieser drei Stützlinien zu vervollständigen, noch wünschenswert, das Gewicht eines Bogenstückes s dieser drei Kurven zu kennen, welches vom Scheitel bis zum Punkt xz reicht. Es heiße G; so ist in der Parabel, wo die Achse der x als belastet angesehen ist, mit dem konstanten Gewicht $\frac{c}{h} = m$ auf die Längeneinheit: $G = mx$. In der Kettenlinie, in welcher die gleichförmige Belastung den Bogen trifft, ist ebenso $G = ms$. In der Kurve des gleichen Widerstandes endlich ist die auf die Einheit der Länge bezügliche Belastung die veränderliche $\mu = \frac{\lambda}{h}$. Mithin hat man infolge der Gleichungen (4) und (14)

$$G = \int_0^s \mu\, ds = c\frac{dz}{dx} = mh \operatorname{tg} \frac{x}{h}. \tag{20}$$

Es schließt sich hieran noch die wichtige Bemerkung, daß die besprochenen drei Linien nicht aufhören Stützlinien zu sein, wenn durch eine Drehung um die Achse der x um 180° die hängenden Bogen in aufrecht stehende verwandelt werden. Sie repräsentieren in dieser Lage abermals eine Position des Gleichgewichtes eines linearen Massensystems, das nur in der Längenrichtung elastisch ist, und mithin der Längenveränderung in seinen kleinsten Elementen durch den inneren Druck widersteht, obwohl diese Position keine des stabilen, sondern nur eine des labilen Gleichgewichts ist. Dies benimmt ihr übrigens die Brauchbarkeit durchaus nicht, weil wir Mittel besitzen, die fehlende Stabilität in beliebigem Maße dem Systeme zurückzuerstatten. Daß der stehende Bogen auch eine Form des Gleichgewichts sei, davon überzeugt man sich leicht, indem man von demselben mit denselben Betrachtungen, wie beim hängenden, ausgeht, die positive Koordinate Z nach unten zählt, anstatt von Spannung λ vom Drucke λ spricht, und hiermit zu genau denselben Gleichungen gelangt, wie beim Hängebogen.

II.

Graphische Konstruktion der Kettenlinie und der Linie des gleichen Widerstandes.

Wenn man eine klare anschauliche Kenntnis der Störungen, die der Gegenstand der vorliegenden Untersuchung sind, gewinnen will, so begnügt man sich nicht mit der Vorlage mehr oder weniger verwickelter mathematischer Ausdrücke für die zahlreichen Variationen derjenigen Elemente, welche eine Veränderung erleiden, und die man dann, erst einzeln für sich, und dann in ihrem Einflusse auf das in bezug genommene materielle System einer mühsamen Analyse zu unterwerfen hätte. Vielmehr wünscht man den ganzen geänderten Zustand mit dem alten ungestörten gleichzeitig sich womöglich geometrisch konstruiert vor Augen legen zu können, um dann unter ihnen einen Vergleich anzustellen, und zwar soll eine solche Konstruktion der notwendigen Genauigkeit nicht entbehren, weil die etwaigen Fehler derselben bei der vergleichenden Beurteilung zweier nur wenig von einander verschiedenen Zustände sehr störend einwirken könnten.

Ebensowenig soll ihr aber die nicht minder wünschenswerte größtmögliche Einfachheit fehlen. Endlich fordert die Wissenschaft bei einem jeden Approximative, sowohl Kalkul als auch graphischem Verfahren, die Angabe der geeigneten Mittel, den Grad der erzielten Genauigkeit zu beurteilen. Wir legen uns also hier die Frage vor: Wie kann die Kettenlinie und die Kurve des gleichen Widerstandes, die wir im vorigen Abschnitte kennen gelernt haben, am besten graphisch konstruiert werden?

Die Parabel können wir als wohlbekannte krumme Linie hier füglich außer Acht lassen. Was aber die übrige große Mannigfaltigkeit der gar oft in der Baupraxis vorkommenden Stützlinien anbetrifft, zu welchen man die Vergleichung entweder gar nicht finden, oder ihrer Komplikation wegen gar nicht brauchen kann, so wäre auch für diese eine allgemeine, auf alle sich erstreckende Konstruktionsmethode offenbar wünschenswert.

An das gebräuchliche orthogonale Koordinatensystem schließt sich natürlich eine Methode der geometrischen Konstruktion der Kurven an, durch gewählte Abszissen x, und dazu gerechnete Ordinaten z. Diese geben dann aufgetragen nach irgend einem Maßstabe Punkte in der Kurve selbst, durch deren gerad- oder krummlinige Verbindung ein Gebilde erhalten wird, welches zwar nicht die Kurve selbst ist, jedoch aber von der echten Kurve so wenig als man will verschieden gemacht werden kann. Dies muß genügen auf einem Felde, wo der Natur der Sache nach absolute Genauigkeit ohnehin unerreichbar ist.

Einer solchen Berechnung zusammengehöriger Abszissen und Ordinaten widerstreben nun unsere Formeln für die Kettenlinie und die Kurve des gleichen Widerstandes nicht, wenn man von Tabellen natürlicher Logarithmen Gebrauch macht. Man setzt namentlich in der Kettenlinie zu diesem Zwecke $e^{\frac{x}{h}} = N$, so wird $e^{-\frac{x}{h}} = \frac{1}{N}$, mithin die Ordinate $z = \frac{N^2+1}{2N}h$, der Pfeil der Kurve $z - h = \frac{(N-1)^2}{2N}h$, und die Abszisse $x = h \log \text{nat}\, N$. Wählt man nun für N solche ganze oder gebrochene Zahlen, deren Logarithmus entweder unmittelbar aus der Tafel abzulesen, oder durch Subtraktion zweier Logarithmen zu erhalten ist, so kommt man unschwer zu folgenden Gruppen zusammengehöriger Werte für N, x, z, $z - h$.

(21)

$N =$	$x = h \log N =$	$z = \frac{N^2+1}{2N}h =$	$s = \frac{N^2-1}{2N}h =$	$z - h = \frac{(N-1)^2}{2N}h =$
$\frac{8}{7}$	$0{\cdot}1334314\,h$	$\frac{113}{112}h$	$\frac{15}{112}h$	$\frac{h}{112}$
$\frac{5}{4}$	$0{\cdot}2231435\,h$	$\frac{41}{40}h$	$\frac{9}{40}h$	$\frac{h}{40}$
$\frac{4}{3}$	$0{\cdot}2876821\,h$	$\frac{25}{24}h$	$\frac{7}{24}h$	$\frac{h}{24}$
$\frac{3}{2}$	$0{\cdot}4054651\,h$	$\frac{13}{12}h$	$\frac{5}{12}h$	$\frac{h}{12}$
$\frac{5}{3}$	$0{\cdot}5108256\,h$	$\frac{17}{15}h$	$\frac{8}{15}h$	$\frac{2}{15}h$
2	$0{\cdot}6931472\,h$	$\frac{5}{4}h$	$\frac{3}{4}h$	$\frac{1}{4}h$
$\frac{5}{2}$	$0{\cdot}9162907\,h$	$\frac{29}{20}h$	$\frac{21}{20}h$	$\frac{9}{20}h$
3	$1{\cdot}0986123\,h$	$\frac{5}{3}h$	$\frac{3}{4}h$	$\frac{2}{3}h$
$\frac{15}{4}$	$1{\cdot}3217558\,h$	$\frac{241}{120}h$	$\frac{209}{120}h$	$\frac{121}{120}h$
4	$1{\cdot}3862944\,h$	$\frac{17}{9}h$	$\frac{15}{8}h$	$\frac{9}{8}h$
5	$1{\cdot}6094379\,h$	$\frac{13}{5}h$	$\frac{12}{5}h$	$\frac{8}{5}h$
6	$1.7917595\,h$	$\frac{37}{12}h$	$\frac{35}{12}h$	$\frac{25}{12}h$

Auch bei der Kurve des gleichen Widerstandes ist es nicht schwer sich ähnliche Gruppen zusammengehöriger Werte von x und z zu verschaffen. Man bezweckt dies mit dem mindesten Aufwande numerischer

Rechnungen, wenn man den Quadranten des mit dem Halbmesser h beschriebenen Krümmungskreises am Scheitel in solche aliquote Teile einteilt, deren trigonometrische Funktionen im geschlossenen Ausdrucke vorhanden sind (am besten in 6), die so erhaltenen Bögen von den bekannten Längen $\frac{\pi h}{12}$, $\frac{\pi h}{6}$, $\frac{\pi h}{4}$, $\frac{\pi h}{3}$, $\frac{5\pi h}{6}$, $\frac{\pi h}{2}$, in eine gerade Abszisse x ausdrückt und die ihr entsprechende Ordinate den Tafeln der natürlichen Logarithmen entnimmt.

Man erhält so:

(22)

$= x$	$\cos\frac{x}{h} =$	$z = -h \log\cos\frac{x}{h} =$
$\frac{\pi h}{24} = 0\cdot1308997\,h$	$0\cdot9914449$	$0\cdot0085919\,h$
$\frac{\pi h}{12} = 0\cdot2617994\,h$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$	$0\cdot0346683\,h$
$\frac{\pi h}{8} = 0\cdot3926991\,h$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$0\cdot0791736\,h$
$\frac{\pi h}{6} = 0\cdot5235988\,h$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$0\cdot1438410\,h$
$\frac{\pi h}{4} = 0\cdot7853982\,h$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$0\cdot3465736\,h$
$\frac{\pi h}{3} = 1\cdot0471975\,h$	$\frac{1}{2}$	$0\cdot6931472\,h$
$1\cdot1939778\,h$	$\frac{1}{e} = \frac{1}{2\cdot7182818}$	$1\cdot0000000\,h$
$\frac{5\pi h}{6} = 1\cdot3089969\,h$	$0\cdot2588190$	$1\cdot3516265\,h$
$\frac{\pi h}{2} = 1\cdot5707963\,h$	0	∞

Die zwei kleinen Tabellen (21) und (22) geben nun mit Hilfe eines verläßlichen, nach dem Dezimalsysteme eingeteilten Maßstabes eine Reihe zur Kurve zugehöriger Punkte, gewissermaßen das Skelett derselben. Es handelt sich nun darum, diese Punkte in zweckmäßiger Weise unter einander zu verbinden zu einem Gebilde, welches sich von der echten Kurve nur unmerklich unterscheidet. Bedient man sich hierzu gerader Linien, so erhält man ein Polygon, welches nur sehr unvollkommen die Kurve wiedergibt. Vorzuziehen wäre die Verbindung durch solche Kreisbögen, welche in den bereits aufgetragenen Punkten mit der krummen Linie einerlei Krümmung, d. h. eine Berührung der zweiten Ordnung besitzen. Hierzu gehört aber die Kenntnis des jedesmaligen Krümmungshalbmessers und des Krümmungsmittel-

punktes. Da aber dieser auf der Normalen liegt, so bietet sich zunächst die Frage, wie zieht man zu einem bereits ermittelten Punkte von irgend einer der beiden in Rede stehenden Kurven die Normale?

Allgemein bestimmt der Differential-Quotient $\frac{dz}{dx}$ den Winkel, welchen die Tangente zu einem gegebenen Punkte der Krummen mit der Achse der x, oder was dasselbe ist, die Normale mit der Achse der z einschließt; er bedeutet nämlich die trigonometrische Tangente dieses Winkels. Nun ist in der Kettenlinie $\frac{dz}{dx} = \frac{s}{h}$, und zudem $z^2 = h^2 + s^2$. Hieraus folgt, daß mit einer und derselben Konstruktion der Bogen s graphisch rektifiziert und die Richtung der Normale bestimmt werde; faßt man nämlich die Ordinate Z des gegebenen Punktes M mit dem Zirkel ab, durchschneidet mit der einen Zirkelspitze im Scheitel A der Kettenlinie, Fig. 1, mit der anderen die Achse der x in B, so hat man ein Dreieck OAB, in welchem $AB = z$, $OB = s$, $OA = h$ ist, mithin $\operatorname{tg} OAB = \frac{s}{h} = \frac{dz}{dx}$.

Die Normale zum Punkte M ist daher parallel zu AB. Zieht man daher durch M die zu AB parallele MP, so hat man die gesuchte Normale. Trägt man auf dieselbe von M aus den Krümmungshalbmesser auf, so hat man den Krümmungsmittelpunkt.

In Abschnitt I. ist bereits bemerkt worden, daß vermöge der Gleichung $r = \frac{z^2}{h}$ der Krümmungshalbmesser r gewonnen werden könne durch die Hilfskonstruktion einer Parabel mit dem Parameter h, in welcher die Abszissen die Krümmungshalbmesser vorstellen, die Ordinaten aber zugleich Ordinaten der Kettenlinie sind, die zu diesen Halbmessern gehören.

Man erreicht jedoch diesen Zweck viel einfacher und auch mit mehr Genauigkeit ohne Hilfskonstruktion auf folgende Weise: Man trägt vom Scheitel A aus auf die Achse der z zuvörderst eine Linie $AG = AO = h$, so daß G der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel A wird; sodann zieht man MEM' parallel zur Achse der x, und hat so den Pfeil AE des Bogens MAM'. Den trägt man zweimal von G aus auf die Achse der z nach H, durch H zieht man wieder eine Parallele zur Achse der x; der Punkt J, in welchem diese die Normale MP schneidet, ist der Krümmungsmittelpunkt und $MJ = r$ der Krümmungshalbmesser.

Um dies zu begründen, ziehen wir JKF parallel zur Achse der z, so ist $JK + KF = OH - MC$, d. h. wenn man JK mit ζ bezeichnet, $JF = 2h - z + \zeta$. In dem Dreiecke MJF nun ist, wie aus dem kurz

zuvor Gesagten erhellt, die trigonometrische Tangente des Winkels $MJF = \frac{dz}{dx}$, mithin die des Winkels $JMF = \frac{dx}{dz}$, also der sinus $= \frac{dx}{ds}$. Es ist also $JF = 2h - z + \zeta = r\frac{dx}{ds} = r\frac{h}{z} = z$ vermöge der Gleichungen (9) und (11), also $\zeta = 2(z - h)$ oder $JK = 2AE$, was zu zeigen war.

Es ist nicht ohne Nutzen hier zu bemerken, daß dieselbe Normale auch durch die folgende geometrische Konstruktion gewonnen werden kann. Nachdem man die Ordinate $z = MC$ mit dem Zirkel abgefaßt und damit aus dem tiefsten Punkte der Kurve A als Mittelpunkt einen Kreisbogen BUR beschrieben, damit $OB = OR = s$ gewonnen, also den Kettenbogen $AM = s$ graphisch rektifiziert hat, zieht man durch den Punkt U, in welchem dieser Kreisbogen die nach unten verlängerte Achse der z schneidet, eine Parallele UV zur Achse der x, so ist $AV = r$ der zum Punkte M gehörige Krümmungshalbmesser. Denn in den zwei ähnlichen Dreiecken AOB und AUV hat man: $AO : AB = AU : AV$, oder $h : z = z : AV = \frac{z^2}{h} = r$.

Legt man nun durch M eine zur AV parallele und mit ihr gleich lange Linie MJ, so ist J der zu M zugehörige Krümmungsmittelpunkt, sohin vermöge der zwei gleichen und ähnlichen Dreiecke AUV und JFM auch $AU = JF = z$, woraus wieder $HG = 2AE$ folgt.

Derselben Konstruktion kann man sich auch bedienen, um die Kettenlinie, wenn von derselben ein Stück MAM', welches vom Scheitel bis zu einer horizontalen Linie MM' reicht, bereits vorgezeichnet ist, bis zu einer weiteren Horizontalen NSN' fortzusetzen, d. h. die Punkte N und N' anzugeben, in welchen die letztgenannte Horizontale von der fortgesetzten Kettenlinie geschnitten wird; vorausgesetzt jedoch, daß MM' und NN' nahe genug an einander liegen, so daß man die dazwischen eingeschlossenen Bögen der Kettenlinie MN und $M'N'$ von ihren Chorden als nicht wesentlich der Länge nach verschieden betrachten kann.

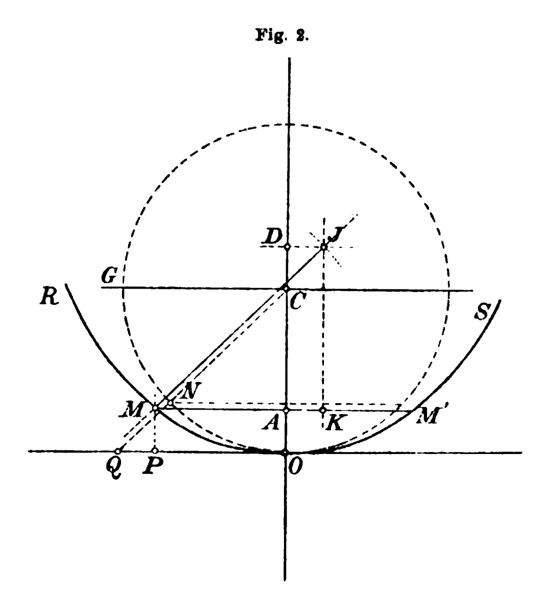
Unter dieser Bedingung erhält man nämlich die Punkte N und N' ohne Berechnung einer Abszisse oder anderen Hilfslinie durch bloße geometrische Konstruktion wie folgt: Man faßt das gegebene $z = OS$ der Punkte N und N' ab mit dem Zirkel und beschreibt mit demselben aus dem Scheitel A der Kettenlinie als Mittelpunkt den Bogen LQ, welcher die Achse der x in L und Q schneidet; es ist dann $OL = OQ$ der rektifizierte Bogen AMN der Kettenlinie, also $OL = OB + BL = AMN = AM + MN$; da aber $AM = OB$ besteht, so ist auch $MN = BL$. Man nimmt also, um die Punkte N und N' aufzufinden, BL ab mit dem Zirkel und trägt dasselbe von M aus nach N und

von M' aus nach N'. Es versteht sich von selbst, daß durch dieselbe einfache Konstruktion, durch welche sich zu den zwei Punkten M und M' in der Nähe zwei andere N und N' gefunden haben, man auch fernere zwei Nachbarpunkte zu N und N', zu diesen Nachbarpunkten wieder zwei weitere usw. bestimmen kann.

Wer also gegen solche angenäherte Konstruktionen, in welchen der Bogen für die Chorde genommen wird, kein Vorurteil hegt, kann sich beliebig viele Punkte der Kettenlinie auf rein graphischem Wege verschaffen, und wird von der oben angeführten Tabelle nur zur Kontrolle Gebrauch machen, um zu erhärten, ob die unvermeidlichen Fehler solcher geometrischer Konstruktionen nicht zufälliger Weise sich ungebührlich angehäuft haben.

In der Kurve des gleichen Widerstandes $RMOS$ Fig. 2, teilten wir den Quadranten ONG des mit dem Halbmesser h aus dem Mittelpunkte C beschriebenen, zum Scheitel O gehörigen Krümmungskreises in aliquote Teile. ON sei ein solcher. Er wird in die geradlinige Abszisse $OP = ON$ ausgereckt und dazu die Ordinate MP gerechnet resp. der Tabelle (22) entnommen und aufgetragen, was den Punkt M der Kurve ergibt. Die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Normale zu M mit der Achse der z einschließt, ist $\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \frac{x}{h}$ vermöge (14), also $\frac{x}{h}$ der Winkel selbst,

Fig. 2.



d. h. OCN ist dieser Winkel, also die Normale zu CN parallel. Man ziehe also durch den Punkt M die Parallele MJ zu CN, so ist sie die gesuchte Normale, hierauf den Krümmungshalbmesser $r = h \sec \frac{x}{h}$ vermöge (18), der offenbar gleich der Linie CQ ist, auftragend erhält man den Krümmungsmittelpunkt J, vorausgesetzt, daß $MJ = CQ$ ist. Derselbe Punkt J kann aber auch durch eine ähnliche Konstruktion, wie bei der Kettenlinie, gefunden werden; nämlich man trägt den Pfeil $OA = z$ des Bogens MOM' von C aus nach D auf die Achse

der z und zieht durch D eine Parallele zur Achse der x. Der Durchschnitt derselben mit der Normalen J ist dann der zu M gehörige Krümmungsmittelpunkt.

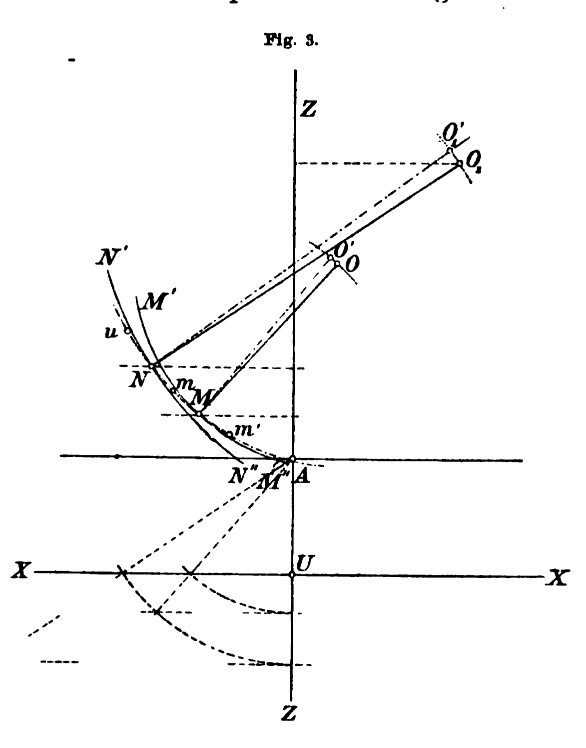
Daß dies richtig sei, wird auf gleiche Weise, wie bei der Kettenlinie, dargetan. Man zieht nämlich JK zur Achse der Z parallel und hat das rechtwinklige Dreieck MJK, in welchem $\operatorname{tg} MJK = \frac{dz}{dx}$; also hier $JMK = \frac{dx}{ds}$ ist. Heißt nun CD ζ, so sind $JK = CD + CO - AO = \zeta + h - z$, ferner $JK = r \sin JMK = r\frac{dx}{ds} = h$, mithin $\zeta = z$, was zu beweisen war. Man hat also bei der Kurve des gleichen Widerstandes zwei ungefähr gleich gute Methoden zu einem jeden Punkte den Krümmungsmittelpunkt zu finden, deren eine die andere zu kontrollieren vermag.

Wiewohl man nun aber Kreisbögen hat, die in einzelnen Punkten der echten Kurve möglichst nahe kommen, so kann doch aus ihnen, wie sie sind, keineswegs dasjenige graphische Gebilde zusammengesetzt werden, welches in möglichst vorteilhafter Weise der wirklichen krummen Linie am nächsten kommend das treueste Bild derselben darstellt. Ja, die aus diesen Mittelpunkten gezogenen Kreisbögen sind, so wie sie sind, zu diesem Zwecke sogar ganz untauglich. Um dies einzusehen, bedenke man, daß ein jeder dieser Kreisbögen mit der Kurve nur den Berührungspunkt, und in der Nähe desselben sonst keinen anderen gemeinschaftlich habe; daß ferner in diesen gemeinschaftlichen Punkten nur eine Berührung der zweiten Ordnung stattfinde, was nur am Scheitel der Kurve eine Ausnahme erleidet, wo die Berührung sich zur dritten Ordnung erhebt. Man bedenke endlich, daß eine jede Berührung der zweiten Ordnung eigentlich ein Schnitt sei, der berührende Kreisbogen mithin durch die Kurve im Punkte der Berührung durchgehe, so daß die zwei durch den Berührungspunkt von einander verschiedenen Bestandteile dieses Bogens einer innerhalb der Kurve, der andere außerhalb derselben fortlauft.

Hieraus folgt nun unmittelbar, daß die Berührungskreise, die zu zwei Nachbarpunkten der Kurve gehören, sich zwischen diesen Nachbarpunkten gar nicht schneiden, sondern die Kurve zu verschiedenen Seiten, einer von innen, der andere von außen begleiten. Ja, sie schneiden sich überhaupt nicht, sondern bleiben gewissermaßen in einander eingeschachtelt. Diesen Sachverhalt illustriert in etwas grotesker Weise die Fig. 3, in welcher M und N zwei Nachbarpunkte der Kurve, und $M'MM''$ und $N'NN''$ Bögen der zu ihnen gehörigen Krümmungskreise sind. Es ist mithin offenbar nicht gut abzusehen, wie schick-

licher Weise eine stetige Kurve durch Kreisbögen wiedergegeben werden mag, die in gar keinem Zusammenhange stehen.

Wiewohl nun aber diese Krümmungskreise, so wie sie sind, d. h. gezogen aus den ihnen zugehörigen, durch die erwähnte Konstruktion erhaltenen Mittelpunkten zur Darstellung der wirklichen Kurve nicht tauglich sind, so werden sie es doch allsobald und zwar in sehr vorzüglicher Weise, wenn man diese Mittelpunkte ein wenig aus der Normalen, in welcher sie liegen, nach derjenigen Seite herausrückt, nach welcher die Krümmungshalbmesser wachsen, ohne hierbei diese letzteren zu verändern. Auch dieses ersieht man in Fig. 3. Man braucht sich nur den in M berührenden Kreisbogen $M' M M''$ mit seinem Krümmungshalbmesser $M O$ im Punkte M in fester, starrer Verbindung zu denken und sodann das Ganze um diesen Punkt M als Mittelpunkt herum zu drehen um einen sehr kleinen Winkel OMO', so rückt der Bogen in die Lage mMm', und bekommt nebst M noch zwei andere Punkte m und m', die in nahezu gleichen Entfernungen von M stehen, mit der Kurve gemeinschaftlich.



Die Berührung in M hat nun zwar aufgehört und ist in einen Schnitt unter dem sehr kleinen Winkel OMO' übergangen; dagegen sind aber die zwischen den gemeinschaftlichen Punkten m und M, M und m' fallenden Stücke des Kreisbogens möglichst nahe an die Kurve getreten, und entfernen sich das eine nach innen, das andere nach außen nur unmerklich von derselben. In ähnlicher Weise verfährt man aber auch mit dem in N berührenden Nachbarkreise. Man dreht ihn, ohne an seiner Krümmung etwas zu ändern, um den Mittelpunkt N, bis er durch m durchgeht und setzt ihn dadurch nicht nur in m

mit der Kurve und dem nachbarlichen Kreise zugleich in Verbindung sondern verschafft ihm noch überdies einen neuen Durchschnittspunkt u mit der Kurve, welcher in die Entfernung Nu nahe $= mN$ fällt. Und auf diese Weise fortfahrend ist man imstande, die Kurve schlangenartig mit einem Systeme von Kreisbögen zu umschlingen, welches von derselben sich so wenig, als man nur wünscht, unterscheidet.

Es kommt jetzt nur mehr darauf an, die zu diesem Zwecke notwendigen Verrückungen der Mittelpunkte OO' $O_1 O_1'$ usw. durch Rechnung zu bestimmen und bei dieser Gelegenheit auch die zur Beurteilung des Maßes der Genauigkeit des Verfahrens nötigen Daten zu gewinnen.

Die allgemein, nicht auf die hier besprochenen Stützlinien beschränkte, sondern auf beliebige Kurven, deren graphische Konstruktion gewünscht wird, bezogene Aufgabe, die hier vorliegt, ist also: Man soll den zu irgend einem Punkte M einer beliebigen Kurve gehörigen Krümmungskreis ohne Änderung seines Halbmessers, wenn dies möglich ist, durch bloße Verrückung seines Mittelpunktes zwingen, die Kurve in drei nahe an einander liegenden Punkten zu schneiden, von welchen einer der frühere Berührungspunkt M selber ist, die zwei anderen aber zu verschiedenen Seiten von M in beinahe gleichen Entfernungen liegen. Sollte jedoch ein solches Schneiden in drei Punkten durch bloße Verschiebung des Kreismittelpunktes nicht zu bewerkstelligen sein, wie z. B. an denjenigen Orten, wo der Krümmungshalbmesser ein Maximum oder Minimum ist, so möge derselbe Zweck d. h. drei gemeinschaftliche Punkte durch eine kleine Veränderung des Krümmungshalbmessers erreicht werden. Sollte noch eine andere Bedingung hinzugefügt werden, z. B. daß die Durchschnittspunkte äquidistant, oder daß die Maxima und Minima der Abstände der Kurve vom Kreise numerisch gleich ausfallen, so hätte man beides, nämlich sowohl eine Verschiebung des Kreismittelpunktes, als auch eine kleine Veränderung des Halbmessers, vorzunehmen.

Hat man sich durch Berechnung rechtwinkliger Koordinaten etwa mittelst einer Tabelle eine Reihe zur Kurve gehöriger Punkte verschafft, so ist es leicht, je drei auf einander folgende derselben durch einen Kreisbogen zu verbinden, und man braucht dazu gar keine Analysis, als höchstens zu dem Zwecke, um über den Grad der Genauigkeit Aufschluß zu geben, mit welcher eine solche Folge von Kreisbögen die Kurve selbst wiedergibt, d. h. zur Berechnung des zwischen Kreis und Kurve, von einem der Punkte zum nächst folgenden vorhandenen größten Abstandes. In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle jedoch kann man sich rechtwinklige Koordinaten nicht einmal verschaffen, ist daher gänzlich außer stande, die Kurve polygonartig aus geraden Linien zusammen-

zusetzen. Man verfügt jedoch ganz gewöhnlich über solche graphische Elemente, welche die direkte Zusammensetzung aus Kreisbögen, welche offenbar auch die naturgemäße ist, ermöglichen.

Der allgemeine, auf die größte Mehrzahl der mechanischen Kurven sich erstreckende Tatbestand ist nämlich der folgende: Sie werden insgesamt erhalten aus Differentialgleichungen, und zwar aus solchen, in denen zweite Differentialquotienten rechtwinkliger Koordinaten erscheinen, dieselben, welche auch in die bekannte Formel für den Krümmungshalbmesser eingehen. Dies hat zur Folge, daß man schon aus den Differentialgleichungen der Kurve als solchen, und ohne vorgängige Integration meist brauchbare Formeln für den Krümmungshalbmesser ableitet. Hierzu kommt, daß in einer ziemlich großen Anzahl von Fällen von den in Rede stehenden Differentialgleichungen erste Integrale erhalten werden können, die den Wert irgend eines ersten Differentialquotienten, wie etwa $\frac{dz}{dx} = p$ bestimmen, der die Bedeutung einer trigonometrischen Funktion eines Winkels hat, welcher die Richtung der Tangente oder der Normale feststellt, mit Hilfe einer Koordinate x oder eines Bogens der Kurve s.

Eine fernere Integration jedoch, die zur Urgleichung der gesuchten Kurve zwischen den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z führen sollte, überschreitet gewöhnlich die Kräfte der Analysis, und läßt sich in gar keiner auch nur halbwegs brauchbaren Form bewerkstelligen. Alle diese Umstände treten auch bei den Stützlinien in der Regel auf. Namentlich zieht man aus den allgemeinen Differentialgleichungen derselben:

$$\lambda \frac{dx}{ds} = c \text{ und } \mu ds = c \frac{d^2 z}{dx}$$

allsogleich eine Formel für den Krümmungshalbmesser:

$$r = \frac{ds^3}{dx d^2 z} = \frac{\mu}{c} \frac{ds^2}{dx^2},$$

die für den Scheitelpunkt der Kurve, für welchen $dx = ds$ besteht, in Anwendung gebracht

$$c = mR$$

liefert, wo m und R die diesem Scheitel entsprechenden Werte von μ und r bedeuten.

Diese letzte Gleichung enthält in sich das allgemeine, für wie immer gestaltete Gewölbebögen gültige und wohlbekannte Gesetz: Die Spannung im Scheitel eines Bogengewölbes ist gleich dem Gewichte einer Säule aus dem Materiale desselben, die den Querschnitt des Ge-

wölbes samt Belastung am Scheitel zur Basis, und den Krümmungshalbmesser zur Höhe hat.

Hinzugefügt kann noch werden, daß, wenn man

$$\int_0^x \mu ds = c \frac{dz}{dx} = G$$

setzt, G das Gesamtgewicht des vom Scheitel bis zum Punkte x, z reichenden Bogens bedeute, und daß durch Quadrieren dieser Gleichung und Addition von c^2 allsogleich:

$$c^2 + G^2 = \lambda^2$$

erhalten werde. Also: Die Hypotenuse des Dreieckes, dessen eine horizontal gestellte Kathete die Spannung am Scheitel, die andere das Bogengewicht ist, stellt auch die Spannung an einem beliebigen Punkte dar, nicht nur der Größe, sondern auch der Richtung nach, die bekanntlich mit der Richtung der Tangente zusammenfällt. Hiermit ergibt sich aber ein Mittel, aus dem Bogengewichte die Spannung sowohl wie auch die Richtung der Tangente oder Normale auf graphischem Wege und ohne Rechnung abzuleiten für den Punkt der Kurve, in welchem diese Spannung besteht, und auch umgekehrt, aus der Richtung der Tangente das Bogengewicht zu erschließen.

Die Differentialgleichungen als solche ohne vorgängige Integration sind also, sowie in anderen mechanischen Theorien, auch in der der Stützlinien reich an wichtigen Aufschlüssen. Die Integration hingegen nach welcher der Rechner gewöhnlich schmachtet, täuscht nur gar zu oft seine Erwartungen entweder dadurch, daß sie überhaupt ein Resultat verweigert, oder daß sie zwar ein solches bietet, jedoch in einer unbrauchbaren oder wenigstens äußerst unbequemen Form. Dies geschieht nicht nur in komplizierten, der Phantasie des Mathematikers entsprungenen Fällen. Es geschieht vielmehr auch in Fällen, die in der ausübenden Praxis hervorragende Wichtigkeit besitzen, z. B. in dem folgenden:

Eine Kette soll von einem Ufer eines Flusses zu dem anderen gespannt werden, aber nicht ohne Zweck, sondern damit sie eine Brückenbahn trage. Das Gewicht eines Bogenelementes, welches in den Differentialgleichungen der Stützlinien durch μds dargestellt wird, besteht hier aus zwei Teilen: einem von der Form μds, wo μ das Gewicht einer Kurrenteinheit der tragenden Ketten andeutet, und einem anderen, wie Mdx, wo M das Gewicht ist einer Kurrenteinheit der angehängten Brückenbahn.

Mithin sehen die Differentialgleichungen der von der Kette beschriebenen Kurve folgendermaßen aus:

$$\lambda \frac{dx}{ds} = c, \quad Mdx + \mu ds = c \frac{d^2 z}{dx} = c dp$$

und gehören in dieser Gestalt und für konstant gedachte M und μ wesentlich der mit einer Brückenbahn belasteten Kettenlinie an. Wie gewöhnlich, so steht auch hier der Krümmungshalbmesser r gleich zur Verfügung, nämlich:

$$r = \frac{c(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{M + \mu\sqrt{1+p^2}},$$

zudem hat man

$$cp = Mx + \mu s.$$

Auch läßt sich noch ein erstes Integral der zweiten Differentialgleichung beschaffen, wenn selbe die Form erhält

$$dx = \frac{c\,dp}{M + \mu\sqrt{1+p^2}},$$

und man kann, um diesen Zweck zu erreichen, z. B. folgenden Weg einschlagen.

Man führt eine neue Veränderliche behufs der Rationalmachung ein, vielleicht durch die Substitution

$$\sqrt{1+p^2} = p + u,\ p = \frac{1-u^2}{2u},\ \sqrt{1+p^2} = \frac{1+u^2}{2u},\ dp = -\frac{du\,(1+u^2)}{2u^2},$$

womit

$$dx = -\frac{c}{u}\,\frac{(1+u^2)\,du}{u\left(u^2 + \frac{2M}{\mu}u + 1\right)}$$

erhalten wird. Durch Zerlegung in Partialbrüche und Integration ergibt sich dann:

$$ue^{\frac{x}{h}} = \left(\frac{1-u_1}{1-u_2}\right)^n \left[\frac{u-u_2}{u-u_1}\right]^n, \text{ oder } e^{-\frac{x}{h}} = u\left[\frac{1-u_2}{1-u_1}\right]^n \left(\frac{u-u_1}{u-u_2}\right)^n,$$

allwo $h = \frac{c}{\mu}$, $n = \frac{M}{\sqrt{M^2-\mu^2}}$ ist, u_1 und u_2 aber die zwei Wurzeln der algebraischen Gleichung:

$$u^2 + \frac{2M}{\mu}u + 1 = 0, \text{ also:}$$

$$u_1 = -\frac{M}{\mu} + \sqrt{\frac{M^2}{\mu^2} - 1}, \quad \mu_1 + u_2 = -\frac{2M}{\mu}$$

$$u_2 = -\frac{M}{\mu} - \sqrt{\frac{M^2}{\mu^2} - 1}, \quad u_1 u_2 = 1$$

bedeuten. Mithin besteht:

$$\frac{1-u_2}{1-u_1} = \frac{u_1 u_2 - u_2}{1-u_1} = -u_2 = \frac{M}{\mu} + \sqrt{\frac{M^2}{\mu^2} - 1}$$

$$\frac{1-u_1}{1-u_2} = \frac{M}{\mu} - \sqrt{\frac{M^2}{\mu^2} - 1} = -u_1,$$

und da nebstdem

$$u = -p + \sqrt{p^2+1}$$

ist, so kann die eben gewonnene Integralgleichung auch so geschrieben werden:

$$(-p+\sqrt{1+p^2})e^{\frac{x}{k}} = \left[\frac{M}{\mu} - \sqrt{\frac{M^2}{\mu^2}-1}\right]^n \left[\frac{-p+\sqrt{1+p^2}+\frac{M}{\mu}+\sqrt{\frac{M^2}{\mu^2}-1}}{-p+\sqrt{1+p^2}+\frac{M}{\mu}-\sqrt{\frac{M^2}{\mu^2}-1}}\right]^n$$

oder:

$$e^{\frac{x}{k}} = (p+\sqrt{1+p^2})\left[\frac{M}{\mu} - \sqrt{\frac{M^2}{\mu^2}-1}\right]^n \left[\frac{-p+\sqrt{1+p^2}+\frac{M}{\mu}+\sqrt{\frac{M^2}{\mu^2}-1}}{-p+\sqrt{1+p^2}+\frac{M}{\mu}-\sqrt{\frac{M^2}{\mu^2}-1}}\right]^n,$$

oder auch:

$$e^{-\frac{x}{k}} = (-p+\sqrt{1+p^2})\left[\frac{M}{\mu} + \sqrt{\frac{M^2}{\mu^2}-1}\right]^n \left[\frac{-p+\sqrt{1+p^2}+\frac{M}{\mu}-\sqrt{\frac{M^2}{\mu^2}-1}}{-p+\sqrt{1+p^2}+\frac{M}{\mu}+\sqrt{\frac{M^2}{\mu^2}-1}}\right]^n.$$

Eine dieser beiden letzten Gleichungen sollte man jetzt nach $p = \frac{dz}{dx}$ auflösen, und dann abermals integrieren und zwar für beliebige Werte von n. Da hört doch wohl alle Gemütlichkeit auf!

Da solchergestalt die Vergleichung der Kurve in, wenn auch nur nominell geschlossener Form, nicht zu beschaffen ist, nimmt man notgedrungen, aber mit Widerstreben zu Reihen seine Zuflucht, die stets zu haben sind, und erhält auch ohne Schwierigkeit, aber erst nach einer längeren Rechnung:

$$\begin{aligned} z = C &+ \frac{\mu+M}{2c}x^2 + \frac{\mu(\mu+M)^2}{2\cdot 3\cdot 4 c^3}x^4 - \frac{\mu(\mu+M)^3(3M-\mu)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 c^5}x^6 \\ &+ \frac{\mu(\mu+M)^4(45M^2+12\mu M+\mu^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot c^7}x^8 \\ &- \frac{\mu(\mu+M)^5(1575M^3+1341\mu M^2+261\mu^2 M-\mu^3)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot c^9}x^{10} \\ &+ \frac{\mu(\mu+M)^6(99225M^4+151930\mu M^3+61434\mu^2M^2+7684\mu^3M+\mu^4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot c^{11}}x^{12} \\ &- \cdots \end{aligned}$$

Man sieht allsogleich, daß, wie selbstverständlich für $\mu = 0$, das heißt Ketten ohne Gewicht, die Reihe abbricht, und in

$$z = C + \frac{Mx^2}{2c},$$

welches die Gleichung einer Parabel mit dem Parameter $\frac{2c}{M}$ ist, übergeht. Desgleichen sieht man, daß für $M = 0$ die Gleichung für die

unbelastete Kettenlinie in Reihengestalt zum Vorschein kommt. Sonst sieht man aber nichts, als das, was sich eben von selbst versteht. Nicht das Gesetz, nach welchem die Glieder der Reihe gebildet werden, und auch nicht die Bedingungen ihrer Konvergenz, nur daß diese keine besonders scharfe sein kann; das erkennt man auf den ersten Blick aus den namhaft großen und im Zeichen übereinstimmenden Zahlenkoeffizienten.

Unter so bewandten Umständen brächte auch der Beweis der Konvergenz, wenn er geführt würde, nur geringen Trost. Denn wenn man, um ein genügend angenähertes z zu erhalten, z. B. 12 Glieder der Reihe zusammen nehmen müßte, und hat deren nur sechs, und diese haben so viel Mühe gekostet, daß man von der Berechnung der folgenden absteht, so ist von der mühsamen Integration in Reihenform eben kein großer Nutzen abzusehen, weder was die Erkenntnis der Eigenschaften noch was die graphische Darstellung der in dieser Form gesuchten Größe betrifft.

Erwägt man zudem noch, daß es sich hier um die belastete Kettenlinie, also um eine Kurve handelt, welche zwischen die Parabel und die unbelastete Kettenlinie, mithin zwischen zwei durch sehr einfache Gleichungen gegebene, und sehr nahe aneinander verlaufende krumme Linien fällt, von jeder derselben sehr wenig verschieden — so glaubt man, einer besonderen Eigentümlichkeit der mathematischen Analysis gegenüber zu stehen. Sie scheint nämlich mit Vorliebe kleine, wenig bedeutende Differenzen zu ungeheueren und Grauen erregenden Formelungetümen aufzublähen, um dem armen konstruktionsbedürftigen Rechenkünstler mit diesen Schreckpopanzen das Leben ein wenig sauer zu machen.

Da dies aber keineswegs eine bloße mathematische Fiktion, sondern vielmehr der gewöhnliche, in der Baupraxis vorkommende Fall ist, so ist es dem Ingenieur auch nicht übel zu nehmen, wenn er sagt: Der Ingenieur braucht eigentlich keine Mathematik. Er hat dazu dasselbe Recht, wie der Fuchs in der Fabel, der die Trauben zu sauer fand.

Allein ist diese kleine Misère nicht vielleicht eine selbst verschuldete? Daher rührend, daß der Rechner etwas aus unpassenden Elementen zusammengefügt und in unpassender Form der Mathematik abverlangt, während ihm diese die geeigneten Elemente und die schickliche Form bereitwillig entgegenträgt? Sie gibt ihm den Krümmungshalbmesser und etwa noch die Richtung der Normale und hiermit die aus Kreisbögen zusammengesetzte Kurve; er aber besteht auf rechtwinkligen Koordinaten und der eckigen Polygonalform.

Der Grund dieser Vorliebe für das Eckige dürfte leicht zu erraten sein: Es ist nämlich leicht vermittelst orthogonaler Koordinaten

sich Punkte der Kurve zu verschaffen. Aber durch welche mathematisch korrekte Konstruktion erhält man denn die Kurve aus den Krümmungshalbmessern und den diesen entsprechenden Richtungen der Normalen ohne vorhergängige Kenntnis der Punkte, zu welchen beide gehörig sind? Hier liegt offenbar eine Schwierigkeit, die nur dadurch behoben wird, daß man einem freieren, etwas erweiterten Begriff der geometrischen Konstruktion in der Wissenschaft einen Platz einräumt.

Es gab bekanntlich eine eigene Epoche der geometrischen Konstruktionen, in welcher die ganze mathematische Wissenschaft beinahe nur aus solchen bestand. Allein sie mußten, vielleicht weil der große Meister Euklides mit seinem Beispiele voranging, folgenden Bedingungen entsprechen: 1. Mit keinen anderen graphischen Hilfsmitteln zu stande gebracht sein, als mit Zirkel und Lineal, oder mit der geraden Linie und dem Kreise. 2. Mathematisch vollkommen korrekt sein und keine nur approximativ richtigen Annahmen enthalten; etwa die Chorde mit dem Bogen verwechseln. So wäre z. B. die oben angeführte Konstruktionsweise der Kettenlinie, bei welcher der Bogen für seine Chorde genommen wird, nicht Euklidisch, und deshalb aus dem Bereiche der Wissenschaft ausgeschlossen. 3. Sie durften auch nicht tentativ sein, d. h. die wahrscheinliche Lage des zu findenden Punktes zuvörderst erraten und dann durch Verbesserungen berichtigen.

Man trieb mithin Wissenschaft unter selbstgeschaffenen erschwerenden Bedingungen, die selbstverständlich dem Fortschritte nicht wenig hinderlich sein mußten und unter andern die sonderbare Erscheinung zu Tage brachten, daß das, was man im Leben spielend vollzog, alle Kräfte der Wissenschaft oft weit überstieg. Kein Zeichner hielt es für eine schwierige Aufgabe, einen gegeben Winkel in drei gleiche Teile zu teilen. Er tat dies auf tentativem Wege in der kürzesten Zeit, und mit aller wünschenswerten Genauigkeit. Wogegen die Gelehrten vieler Jahrhunderte sich vergebens bemühten das berühmte Problem der Trisektion des Winkels durch eine Euklidische Konstruktion zu lösen. Unstreitig eine bedauerliche Verschwendung geistigen Kapitals.

Mittlerweile fing man aber an den Kalkül zu entwickeln, jedoch völlig frei von Fesseln, in welche das Altertum die Geometrie schlug. Man beschränkte denselben nicht auf einige wenige, etwa Pythagoräische Rechnungsoperationen, sondern nahm vielmehr jede neu erfundene bereitwillig auf, wenn sie einen Nutzen versprach, und bildete sie aus zur höchsten Vollkommenheit, wenn sie ihre Unentbehrlichkeit betätigte. Man schloß auch die approximativen Rechnungsoperationen

keineswegs aus, suchte vielmehr ihren Gang zu sichern und zu beschleunigen und den Grad ihrer Genauigkeit festzustellen.

Auch das tentative Rechnen wurde nicht ausgeschlossen, sondern auf bestimmte, Kürze und Bequemlichkeit bezweckende Regeln gebracht. So gewissermaßen in Freiheit aufgezogen stieg der Kalkül zu gigantischer Macht empor, nahm Besitz beinahe von allen ihm erreichbaren Zweigen der mathematischen Tätigkeit, schuf sich eine neue Geometrie, die analytische nämlich, und verdrängte die konstruktive, an der das Altertum so lange gearbeitet hatte, beinahe gänzlich, sodaß ein berühmter Gelehrter nicht ohne Grund sagen konnte: La meilleure construction c'est le calcul.

Diese Superiorität ist dem Kalkül für jetzt und für alle kommenden Zeiten gesichert. Aber auch die geometrische Konstruktion hat ihre Berechtigung. Namentlich, wenn der Endzweck der Bemühungen eine Zeichnung ist, z. B. die einer Kurve, so ist nicht abzusehen, warum man nicht so bald wie möglich, und wenn dies angeht, gleich zu zeichnen anfangen soll. Wer eines gezeichneten Kreises benötigt, wird wohl nicht nach dem Rechenstifte greifen, um Abszissen und Ordinaten zu rechnen, sondern nach dem Zirkel. Wenn der Kalkül so spröde tut, wie in dem angeführten Beispiele der belasteten Kettenlinie oder noch spröder, und den Rechner mit ungestalteten Formelungeheuern in Schrecken setzt, so sieht man nicht ein, warum er seine Zuflucht nicht zur geometrischen Konstruktion nehmen sollte, falls diese gefügiger ist.

Wenn endlich die Mathematik in der dunklen und vieldeutigen Sprache der Differentialgleichungen ihre Geheimnisse mehr verbirgt als ausspricht, so ist wieder nicht abzusehen, warum man des hellen Lichtes der räumlichen Anschauung entbehren soll. Damit aber die geometrische Konstruktion die hier angedeuteten Zwecke erreichen könne, muß man ihr dieselbe Freiheit der Entwickelung gönnen, die die Macht des Kalküls begründet hat.

Und man sieht absolut nicht ein, warum die geometrische Konstruktion auf Zirkel und Lineal beschränkt bleiben soll, wenn sie sich einen viel größeren Reichtum an nützlichen Konstruktionsmitteln leicht verschaffen kann, ja sogar bereits im Besitze hält; noch weniger aber sieht man ein, warum sie von diesen letzteren nicht den möglichst ausgedehnten Gebrauch machen soll. Man sieht ferner nicht ein, warum die approximative Konstruktion ausgeschlossen bleiben soll, nachdem der Kalkül in approximativen Rechnungen förmlich schwelgt und beinahe keine anderen enthält. Am allerwenigsten begreift man aber die Mißachtung der tentativen Konstruktion, die doch in der Regel und

in ihrer Art einfacher, direkter und wirksamer ist, als die zugelassene und geachtete tentative Rechnung, und die sich deshalb auch in der Praxis der Zeichner als unentbehrlich erwiesen und erhalten hat.

Mit einem Worte: So wie im Kalkül alles erlaubt ist, wenn der Rechner nur nachweisen kann, daß sein Rechnungsresultat genügende Genauigkeit hat, so soll auch in der geometrischen Konstruktion alles gestattet sein, wenn nur der Zeichner imstande ist, darzutun, daß sich in seinem Endresultate z. B. seiner fertigen Kurvenabbildung kein Fehler befinden könne, der mit den gewöhnlichen Konstruktionsbehelfen: Zirkel, Lineal, Maßstab usw. und mit unbewaffneten Augen entdeckt werden kann.

Es ist jedoch nicht genug, daß man sich alle diese Lizenzen gestattet, denn sie waren ja ohnehin niemand verwehrt. Die Wissenschaft muß sie förmlich akkreditieren. Man muß ihren Nutzen im allgemeinen und besonderen zeigen, und muß auch bestimmen, wie weit man zu gehen wagen darf, ohne den beabsichtigten Grad der Genauigkeit des Resultates zu gefährden. Dieses letztere zu leisten ist jedoch nur der Kalkül berufen, dem es obliegt, den Grad der Genauigkeit des approximativen Zeichenverfahrens durch allgemeine Formeln festzustellen, deren Gültigkeit sich nicht nur auf den vorliegenden speziellen Fall, sondern wo möglich auf die ganze Gesamtheit aller möglichen ähnlichen Zeichenprobleme zu erstrecken haben wird. Auf diese Weise soll der Kalkül seine hohe Verläßlichkeit auf die geometrische Konstruktion übertragen, während die zeichnende Geometrie ihrerseits die oft dunkle, geheimnisvolle Sprache der Analysis zu illustrieren berufen ist.

Es ist nun freilich wahr, daß der Kalkül nicht immer und überall so spröde tut, wie in dem letzterwähnten Falle der belasteten Kettenlinie. Fügt man z. B. eine ähnliche tote Belastung durch eine horizontale Brückenbahn der Kurve des gleichen Widerstandes hinzu, so nehmen alle Rechnungen einen glatten Verlauf, und alle Endformeln erhalten eine leidlich einfache Form.

Da dies aber gerade derjenige Fall ist, der die eminenteste praktische Wichtigkeit besitzt, indem es offenbar rationell ist, gerade im Zustande der größten, möglichen Belastung die tragfähigen Elemente am zweckmäßigsten, d. h. so zu disponieren, daß sie an allen Punkten dieselbe notwendige Widerstandsfähigkeit, nirgends mehr und auch nirgends weniger betätigen, so möge auch dieser Fall der möglichst schwer belasteten Stützlinie des gleichen Widerstandes hier eine eingehende Würdigung finden.

Nehmen wir also an, die Belastung unserer Kurve bestehe aus

zwei Teilen, nämlich erstens der toten Last der horizontalen Brückenbahn samt der größtmöglichen zufälligen Belastung z. B. durch Menschengedränge, und zweitens dem Eigengewichte des eigentlichen Tragbogens, der sich eben unter dieser größten Belastung als Kurve des gleichen Widerstandes betätigen soll. Die Kurrenteinheit der toten Last besitze das Gewicht M, die Kurrenteinheit des Tragbogens aber das Gewicht μ, so ist in den Differentialgleichungen (1) das Bogenelementsgewicht μds durch das Binom:

$$Mdx + \mu ds$$

zu ersetzen. Weil der Widerstand überall der gleiche sein soll, so muß der Querschnitt des Tragbogens, mithin auch das Gewicht μ desselben in allen Punkten der Spannung λ proportioniert sein; man setze daher $\mu = \frac{\lambda}{h}$, unter h eine erst später zu bestimmende Konstante verstanden. Es gehen dann die allgemeinen Differentialgleichungen (1) über in

$$d\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad Mdx + \frac{\lambda}{h} ds = d\left(\lambda \frac{dz}{ds}\right). \tag{23}$$

Die erste kann unmittelbar integriert werden und gibt

$$\lambda \frac{dx}{ds} = c, \text{ also } \lambda = c \frac{ds}{dx}. \tag{24}$$

c bedeutet auch hier denjenigen Wert von λ, der für $dx = ds$ gilt, also die Spannung im tiefsten Punkte der Kurve. Diesen Wert von λ in die zweite der Gleichungen (23) einführend erhält man

$$M + \frac{c}{h} \frac{ds^2}{dx^2} = c \frac{d^2 z}{dx^2}, \tag{25}$$

und wird hier $\frac{dz}{dx} = p$, also

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dp}{dx}, \quad \frac{ds^2}{dx^2} = \frac{dx^2 + dz^2}{dx^2} = 1 + p^2$$

geschrieben, so hat man

$$M + \frac{c}{h}(1 + p^2) = c \frac{dp}{dx} \tag{26}$$

Wenn man den speziellen Wert des Gewichtes μ der Längeneinheit des Tragbogens, welcher dem tiefsten Punkte entspricht, wo $\lambda = c$ waltet, mit m bezeichnet, so wird

$$m = \frac{c}{h}, \quad c = mh; \tag{27}$$

setzt man noch überdies

$$\frac{M + m}{m} = k^2, \tag{28}$$

so wird sofort aus der vorliegenden Gleichung (26)

$$k^2 + p^2 = h\frac{dp}{dx}, \text{ also } \frac{dx}{h} = \frac{dp}{k^2 + p^2}.$$

Da dies aber folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\frac{dx}{h} = \frac{1}{k}\frac{\frac{dp}{k}}{1 + \frac{p^2}{k^2}},$$

so gibt dies integriert:

$$\frac{kx}{h} = \operatorname{arc\,tg}\frac{p}{k}, \text{ und } \frac{p}{k} = \operatorname{tg}\frac{kx}{h},$$

also

$$p = k\operatorname{tg}\frac{kx}{h} = \frac{dz}{dx}, \tag{29}$$

ohne Konstante, weil im tiefsten Punkte der Kurve x und dz zugleich verschwinden. Durch abermaliges Integrieren erhält man die Urgleichung der gesuchten Kurve:

$$z = -h\log\cos\frac{kx}{h}. \tag{30}$$

Es wird wieder keine Konstante angefügt, was voraussetzt, daß im tiefsten Punkte der Kurve $x = z = 0$ besteht; dieser tiefste Punkt ist also der Anfangspunkt unserer Koordinaten x, z.

Jetzt hat man noch Formeln für die Bogenlänge s, das Bogengewicht G, die Spannung λ, und den Krümmungshalbmesser r zu eruieren. Es besteht zu diesem Zwecke:

$$1 + p^2 = 1 + \frac{dz^2}{dx^2} = \frac{dx^2 + dz^2}{dx^2} = \frac{ds^2}{dx^2},$$

mithin vermöge Gl. (29)

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + p^2} = \sqrt{1 + k^2\operatorname{tg}^2\frac{kx}{h}},$$

mithin vermöge Gl. (24)

$$\lambda = c\sqrt{1 + k^2\operatorname{tg}^2\frac{kx}{h}}, \tag{31}$$

$$s = \int dx\sqrt{1 + k^2\operatorname{tg}^2\frac{kx}{h}},$$

und

$$G = \int \mu\, ds = \int\frac{\lambda}{h}\, ds = \frac{c}{h}\int dx\left(1 + k^2\operatorname{tg}^2\frac{kx}{h}\right).$$

Diese beiden trigonometrischen Differential-Funktionen sind nun in beliebiger Weise der Integration zu unterwerfen. Man kann z. B. damit anfangen, sie algebraisch zu machen. Durch die Substitution

$$u = \operatorname{tg}\frac{kx}{h}, \quad du = \frac{k}{h}dx\sec^2\frac{kx}{h} = \frac{k}{h}dx(1 + u^2), \quad dx = \frac{h}{k}\frac{du}{1 + u^2},$$

also

$$(32)\qquad s=\frac{h}{k}\int\frac{du\sqrt{1+k^2u^2}}{1+u^2},\quad G=\frac{c}{k}\int\frac{du(1+k^2u^2)}{1+u^2},$$

$$G=\frac{c}{k}\int du\left[k^2-\frac{k^2-1}{1+u^2}\right]=cku-\frac{c(k^2-1)}{k}\operatorname{arc\,tg}u,$$

oder die Variable x wieder einführend, und mit Rücksicht auf Gleichung (27) und (28)

$$(33)\qquad G=h\sqrt{m(M+m)}\operatorname{tg}\frac{kx}{h}-Mx.$$

Um auch eine Formel für s zu gewinnen, kann man allenfalls die irrationale Differentialfunktion in der ersten der Gleichungen (32) rational machen durch Einführung einer neuen Veränderlichen v mit Hilfe der Substitution:

$$\sqrt{1+k^2u^2}=v+ku,\quad u=\frac{1-v^2}{2kv},\quad 1+u^2=\frac{2k^2v^2+(v^2-1)^2}{4k^2v^2}$$

$$\sqrt{1+k^2u^2}=\frac{v^2+1}{2v},\quad \text{und}\quad du=-\frac{1+v^2}{2kv^2},\quad \text{also}$$

$$s=-h\int\frac{vdv(v^2+1)^2}{v^2[(v^2-1)^2+4k^2v^2]},$$

oder, wenn für einen Augenblick

$$v^2=y,\ vdv=\tfrac{1}{2}dy\quad \text{gesetzt wird,}$$

$$(34)\qquad s=-\frac{h}{2}\int\frac{dy(y+1)^2}{y[y^2+(4k^2-2)y+1]}.$$

Nun zerlege man das im Nenner vorfindliche Trinom $y^2+2(2k^2-1)y+1$ in seine zwei Faktoren des ersten Grades $y-y_1$ und $y-y_2$, so daß

$$y_1+y_2=-2(2k^2-1),\quad y_1y_2=1,\quad y_1=1-2k^2+2k\sqrt{k^2-1},$$

$$y_2=1-2k^2-2k\sqrt{k^2-1}\quad \text{wird.}$$

Man zerlege ferner den algebraischen und rationalen Bruch in seine drei Partialbrüche:

$$(35)\qquad \frac{(y+1)^2}{y(y-y_1)(y-y_2)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y-y_1}+\frac{C}{y-y_2},$$

so finden sich sofort für die Koeffizienten A, B, C die folgenden Werte:

$$A=1=\frac{1}{y_1y_2},\quad B=\frac{(y_1+1)^2}{y_1(y_1-y_2)},\quad C=\frac{(y_2+1)^2}{y_2(y_2-y_1)}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß $C=-B$ sei; man braucht nur Zähler und Nenner des gebrochenen Wertes von B mit y_2, des C hingegen mit y_1 zu multiplizieren, und auf $y_2y_1=1$ Rücksicht zu nehmen. Man erhält dann:

$$B=-C=\frac{y_1+y_2+2}{y_1-y_2}=-\frac{2\sqrt{k^2-1}}{k}=-2\sqrt{\frac{M}{M+m}}.$$

Jetzt ergibt sich durch Multiplikation der Gleichung (35) mit dy und Integration:

$$\int \frac{dy(y+1)^2}{y(y-y_1)(y-y_2)} = A\int\frac{dy}{y} + B\int\frac{dy}{y-y_1} + C\int\frac{dy}{y-y_2}$$

$$= A\log y + B\log\frac{y-y_1}{y_1-y_2}$$

$$= \log y - 2\sqrt{\frac{M}{M+m}}\log\frac{y-y_1}{y-y_2}. \tag{36}$$

Nun kommen noch anstatt y die früheren Variablen v, u und endlich x wieder einzuführen, und den so ermittelten Integralwert in die Formel für s (34) zu substituieren. Es ergibt sich dann die gesuchte Bogenlänge:

$$s = -h\log\left[-ku + \sqrt{1+k^2u^2}\right]$$
$$+ h\sqrt{\frac{M}{M+m}}\log\frac{2k^2(u^2+1) - 2k\left[u\sqrt{1+k^2u^2} + \sqrt{k^2-1}\right]}{2k^2(u^2+1) - 2k\left[u\sqrt{1+k^2u^2} - \sqrt{k^2-1}\right]} + \text{const.}$$
$$= -h\log\frac{-k\sin\frac{kx}{h} + \sqrt{1+(k^2-1)\sin^2\frac{kx}{h}}}{\cos\frac{kx}{h}} + \text{const.} +$$
$$+ h\sqrt{\frac{M}{M+m}}\log\frac{M+m-\sqrt{M+m}\left[\sin\frac{kx}{h}\sqrt{m+M\sin^2\frac{kx}{h}} - \sqrt{M}\cos^2\frac{kx}{h}\right]}{M+m-\sqrt{M+m}\left[\sin\frac{kx}{h}\sqrt{m+M\sin^2\frac{kx}{h}} + \sqrt{M}\cos^2\frac{kx}{h}\right]}.$$

Die Integrationskonstante ist hier nicht gleich Null. Wünscht man nämlich, wie dies bisher als Sitte gegolten hat, auch hier den Bogen s vom Scheitel der Kurve aus, wo $x = 0$ ist, zu zählen, so muß für $x = 0$ auch $s = 0$ sein, mithin in der vorliegenden Gleichung

$$0 = \text{const.} + h\sqrt{\frac{M}{M+m}}\log\frac{M+m+\sqrt{M(M+m)}}{M+m-\sqrt{M(M+m)}}, \text{ also}$$
$$\text{const.} = h\sqrt{\frac{M}{M+m}}\log\frac{M+m-\sqrt{M(M+m)}}{M+m+\sqrt{M(M+m)}}$$

bestehen. Fügen wir diesen Wert der Konstante der vorliegenden Gleichung an, so ergibt sich die definitive Formel für die Bogenlänge s in der folgenden sehr weitläufigen Gestalt:

$$(37)\left\{\begin{aligned} s &= -h\log\frac{-\sqrt{M+m}\sin\frac{kx}{h} + \sqrt{m+M\sin^2\frac{kx}{h}}}{\sqrt{m}\cos\frac{kx}{h}} \\ &+ h\sqrt{\frac{M}{M+m}}\log\frac{\left[M+m-\sqrt{M(M+m)}\right]\left[M+m-\sqrt{M+m}\left(\sin\frac{kx}{h}\sqrt{m+M\sin^2\frac{kx}{h}} - \sqrt{M}\cos^2\frac{kx}{h}\right)\right]}{\left[M+m+\sqrt{M(M+m)}\right]\left[M+m-\sqrt{M+m}\left(\sin\frac{kx}{h}\sqrt{m+M\sin^2\frac{kx}{h}} + \sqrt{M}\cos^2\frac{kx}{h}\right)\right]}.\end{aligned}\right.$$

Schließlich ist noch der Wert des Krümmungshalbmessers r der Berechnung zu unterwerfen. Man entnimmt ihn der Differentialgleichung (18) selbst mit der Gleichung (24), nämlich:

$$r = \frac{ds^3}{dx\,d^2z} = \frac{\left[1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \frac{kx}{h}\right]^{3/2}}{\frac{M}{c} + \frac{1}{h}\left[1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \frac{kx}{h}\right]} = \frac{h\left[1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \frac{kx}{h}\right]^{3/2}}{k^2\left[1 + \operatorname{tg}^2 \frac{kx}{h}\right]}$$

$$= \frac{h}{k^2} \cos^2 \frac{kx}{h}\left[1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \frac{kx}{h}\right]^{3/2}.$$

Bezeichnet man den speziellen Krümmungshalbmesser am Scheitel, für welchen $x = 0$ gilt, mit R, so ist

$$(38) \qquad R = \frac{h}{k^2}, \; h = k^2 R, \text{ und } r = R \cos^2 \frac{kx}{h}\left[1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \frac{kx}{h}\right]^{\frac{3}{2}} h;$$

h ist also in der belasteten Kurve des gleichen Widerstandes nicht mehr der Krümmungshalbmesser im Scheitel, wie in der unbelasteten, sondern $k^2 R$, welches sich aber allsogleich auf $h = R$ zurückzieht, wenn $M = 0$ vorausgesetzt wird, weil dann k in die Einheit übergeht.

Hiermit hätten wir eine umfassende Kenntnis des in Rede stehenden Gebildes, d. h. der belasteten Kurve des gleichen Widerstandes gewonnen. Sämtliche Rechnungen haben sich ziemlich glatt abgewickelt, und haben auch zu Endformeln von anerkennenswerter Einfachheit geführt mit alleiniger Ausnahme der Bogenlänge s, die die Analysis durch ein greuliches Formelungetüm widergibt, welches weder zur Berechnung noch zu einer ferneren Untersuchung einen erheblichen Nutzen verspricht.

Es bleibt mithin auch hier nichts anderes übrig, als von den geschlossenen Formen, wiewohl man sich im Besitze derselben befindet, abzusehen, und zu dem allgemeinen Mittel der Reihenentwickelung zu greifen.

Wir benützen zu diesem Zwecke jedoch nicht die weitläufige Gleichung für s, sondern die viel kompendiösere für ds, nämlich (24), und beginnen damit, eine Reihe aufzustellen für:

$$\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 w} = 1 + \frac{k^2}{2} w^2 + \left(\frac{k^2}{3} - \frac{k^4}{8}\right) w^4 + \left(\frac{17 k^2}{2 \cdot 5 \cdot 9} - \frac{k^4}{6} + \frac{k^6}{16}\right) w^6$$
$$+ \left(\frac{31 k^2}{5 \cdot 7 \cdot 9} - \frac{3 k^4}{4 . 5} + \frac{k^6}{8} - \frac{5 k^8}{128}\right) w^8 + \cdots$$

Diese Reihe verschafft man sich nach Belieben, auf welchem Wege immer, am kürzesten vielleicht durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten, die wohl jedem Rechner geläufig ist. Setzt man hier

$w = \frac{kx}{h} = \frac{x}{kR}$, multipliziert mit dx und integriert, so erhält man eine andere Formel für die Bogenlänge s in Reihenform:

$$(39)\quad s = x + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{x^3}{R^2} + \left(\frac{1}{15k^2} - \frac{1}{40}\right)\frac{x^5}{R^4} + \left(\frac{17}{2\cdot 5\cdot 7\cdot 9k^4} - \frac{1}{6\cdot 7\cdot k^2} + \frac{1}{7\cdot 16}\right)\frac{x^7}{R^6}$$
$$+ \left(\frac{31}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdot k^6} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5k^4} + \frac{1}{8\cdot 9k^2} - \frac{5}{9\cdot 128}\right)\frac{x^9}{R^8} + \cdots$$

Dies ist nun allerdings eine handsamere Form, die man aber nur mit entsprechender Vorsicht zu verwenden das Recht hat; man darf dabei nie außer acht lassen, daß die nach steigenden Potenzen geordnete Reihe eigentlich nur höchst selten die Funktion, die sie darzustellen berufen ist, in ihrer ganzen Ausdehnung auch wirklich vorstelle. Die Reihe ist nämlich ein stetiges Gebilde, und es widerstrebt ihrer Natur, unstetige Sprünge von $+\infty$ zu $-\infty$, oder von einem unendlichen in einen imaginären Wert, wie solche häufig vorkommen, mitzumachen. Selbst Periodizität ist ihr immer sehr unsympathisch. Sie hat aber kein Mittel, sich gegen solche widernatürliche Zumutungen zu wehren, als maßlose Divergenz.

Dies alles ist gegenwärtig der Fall. Die Werte von z sowohl in der Formel (30), als auch die von s in der Formel (37) nehmen an der Periodizität der darin vorkommenden trigonometrischen Funktionen $\sin\frac{kx}{h} = \sin\frac{x}{kR}$ und $\cos\frac{kx}{h} = \cos\frac{x}{kR}$ teil, und erhalten jedesmal wieder genau dieselben Werte, so oft x um $2\pi kR$ zunimmt. Ferner werden z sowohl, wie auch s unendlich für $x = \pm\frac{1}{2}\pi kR,\ \pm(2\pm\frac{1}{2})\pi kR\ldots$ Die Kurve besitzt daher für diese x vertikale Asymptoten. Von $x = \frac{1}{2}\pi kR$ bis $x = \frac{3}{2}\pi kR$ erweisen sich z sowohl wie auch s imaginär, in dieser Strecke also von der Ausdehnung πkR gibt es keine Punkte der Kurve.

Dies alles zusammengenommen führt zur Überzeugung, daß unsere Linie des gleichen Widerstandes aus unendlich vielen Kurvenästen zusammengesetzt sei, von welchen der eine mittelste und Musterast zwischen zwei vertikale Asymptoten bei $x = \pm\frac{1}{2}\pi kR$ eingeschlossen ist, die anderen aber nur treue Spiegelbilder desselben sind, beiderseits in der gegenseitigen Entfernung πkR angeordnet. Daß einen solchen, wenn auch scheinbar einfachen Sachverhalt die stetige Form der aufsteigenden Reihe getreu wiederzugeben nimmer imstande ist, liegt wohl auf der Hand. Diese Reihe wird vielmehr nur für kleine Werte von x ein angenähert richtiges s geben; für $x = \frac{1}{2}\pi kR$ geht sie bereits in eine divergente über, weil die exakte Formel für dieses x bereits ein unendliches s in Aussicht stellt. Für ferner wachsende x lehnt sie es aber entschieden ab, die sämtlichen folgenden Spiegelbilder der

Kurve darzustellen, und dies durch maßlose Divergenz, mithin wird man die Reihe (39) nur verwenden können für so kleine Werte von x, für welche sie so rasch konvergiert, daß einige wenige, z. B. drei oder höchstens vier Anfangsglieder zur angenäherten Bestimmung des Funktionswertes hinreichen.

Der Gebrauch der unendlichen Reihen ist also hier notwendig ein wesentlich beschränkter; man tut gut, wenn man die etwa noch fehlende Übersicht durch eine möglichst genaue Zeichnung zu gewinnen sucht, und dies umsomehr, als jede Anwendung der vorliegenden Störungstheorie das Zeichnen, wenn auch nicht gerade unumgänglich erheischt, so doch wenigstens wünschenswert macht.

Im gegenwärtigen Falle z. B. sieht man ein, daß man die Bogenlänge s gar nicht durch Rechnung zu bestimmen braucht; denn ist die Kurve genau gezeichnet, so kann man ja offenbar diese Bogenlänge aus der Zeichnung mit vollkommen zureichender Genauigkeit abnehmen.

Um mit dem möglichst geringen Aufwande von Rechnungsentwickelungen die näheren Eigenschaften eines Kreises zu erforschen, welcher an einer beliebigen Stelle drei in nahezu gleiche Entfernungen voneinander fallende Punkte mit einer Kurve, deren Koordinaten-Urgleichung bekannt ist, oder auch nicht, gemeinschaftlich besitzt, denke man sich zu dem mittleren dieser drei Punkte, der gleichviel wo auf der Kurve vorhanden gedacht wird, eine Tangente gezogen, sodann aber die Kurve so zurecht gelegt, daß der Berührungspunkt zum Koordinatenanfangspunkt und die Tangente zur Achse der x, mithin die Normale zur Achse der z gemacht wird; den beiden übrigen gemeinschaftlichen Punkten entspreche $x = \xi$ und $x = -\xi$. Nachdem hier ξ, wenn auch nicht gerade sehr klein, so doch wenigstens als Größe von mäßigem Werte gedacht wird, nachdem ferner hier nur das Verhalten von Kurve und Kreis zwischen diesen Grenzen, d. h. von $x = -\xi$ bis $x = \xi$ ins Auge gefaßt werden soll, so wird man sich den Wert von z in Form einer sehr konvergierenden, aufsteigend nach x geordneten Reihe etwa

$$z = ax^2 + Ax^3 + Bx^4 + Cx^5 + Dx^6 + \cdots$$

vorgelegt denken können, in welcher das mit der ersten und nullten Potenz von x verbundene Glied fehlt, weil unter den vorausgesetzten Umständen für $x = 0$ auch $z = 0$ und $\frac{dz}{dx} = 0$ sein muß.

Und nachdem der Krümmungshalbmesser

$$r = \frac{ds^3}{dx\,d^2z}$$

speziell auf den Punkt $x = 0$ bezogen, wo $dx = ds$ besteht, sich auf

$$r = \frac{dx^2}{d^2 z} \text{ für } x = 0 \text{ zurückzieht,}$$

so wird daraus sofort: $a = \frac{1}{2r}$, also

$$z = \frac{x^2}{2r} + Ax^3 + Bx^4 + Cx^5 + Dx^6 + \cdots \tag{40}$$

abgeleitet. Nachdem überdies die Kurve jedesmal einen Punkt besitzt, für welchen der Krümmungshalbmesser ein Maximum oder Minimum wird, oft sogar noch mehrere, so hat man für einen solchen Punkt, wenn derselbe zum Koordinatenanfangspunkte gewählt wird, $x = 0$ und $\frac{d^3 z}{dx^3} = 0$, wo dann auch $A = 0$ werden muß.

In Fällen endlich, wie sie bei den Stützlinien gewöhnlich sind, ist die Kurve um den Punkt der größten Krümmung oder Scheitelpunkt symmetrisch angeordnet, was das Verschwinden aller ungeraden Potenzen von x aus den Werten von z nach sich zieht, so daß man speziell für den Scheitelpunkt solcher symmetrischer Kurven

$$z = \frac{x^2}{2h} + Bx^4 + Dx^6 + \cdots$$

hat. Und dieser Punkt soll uns zunächst beschäftigen; h deutet, wie bisher, gewöhnlich den Krümmungshalbmesser im Scheitel an.

Der gesuchte Kreis, welcher mit der Kurve die Punkte $x = -\xi$, 0, $+\xi$ gemeinschaftlich besitzen soll, kann seinen Mittelpunkt nur auf der Normalen und seinen Scheitel nur im Koordinatenanfangspunkte haben; nennt man seinen Halbmesser R, so ist seine Gleichung

$$x^2 = 2RZ - Z^2, \text{ also } R = \frac{x^2 + Z^2}{2Z},$$

in der die Ordinaten zum Unterschiede von jenen der Kurve, die z benannt wurden, mit Z bezeichnet sind. Für $x = \pm\xi$ soll $Z = z$ sein, dies gibt

$$R = \frac{\xi^2 + z^2}{2z} = \frac{\xi^2 + \frac{\xi^4}{4h^2} + B\frac{\xi^6}{h} + \left(\frac{D}{h} + B^2\right)\xi^8 + \cdots}{\frac{\xi^2}{h} + 2B\xi^4 + 2D\xi^6 + \cdots}$$
$$= h + \frac{\xi^2}{2h}\left(\tfrac{1}{2} - 4Bh^3\right) + \xi^4\left(\tfrac{1}{2}B + 4B^2h^3 - 2Dh^2\right) + \cdots$$

Wird ξ aufgefaßt als Größe der ersten Ordnung, so unterscheidet sich der Kreishalbmesser R vom Krümmungshalbmesser der Kurve h nur um eine Größe der zweiten Ordnung. Durch schickliches Ermäßigen von ξ wird man daher die Ähnlichkeit wirklich erreichen können, kraft

welcher der schneidende Kreis zwischen den Durchschnittspunkten für die Kurve selbst gewonnen werden kann. Die nach Z in Reihenform aufgelöste Gleichung des Kreises ist

$$Z = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} + \frac{x^6}{16R^5} + \frac{5x^8}{128R^7} + \cdots$$

Sie geht für den eben gewonnenen Wert von R über in

$$Z = \frac{x^2}{2h} + \frac{x^4}{8h^3} - \frac{\xi^2 x^2}{4h^3}\left(\tfrac{1}{2} - 4Bh^3\right) + \frac{x^6}{16h^5} - \frac{3\xi^2 x^4}{16h^5}\left(\tfrac{1}{2} - 4Bh^3\right)$$
$$+ \frac{\xi^4 x^2}{8h^5}\left(\tfrac{1}{4} - 6Bh^3 + 8Dh^5\right) + \cdots$$

und gibt abgezogen von dem z, welches der Kurve entspricht,

$$z - Z = x^2(\xi^2 - x^2)\left[\frac{1}{8h^3} - B + (x^2 + \xi^2)\left(\frac{1}{16h^5} - D\right) - \frac{3\xi^2}{4h^2}\left(\frac{1}{8h^3} - B\right)\right] + \cdots$$

Das teilweise der vierten und der sechsten Ordnung angehörige Glied rechts vom Zeichen = verschwindet in der Tat für $x = 0$ und für $x = \pm\xi$, wie auch beabsichtigt war, und die Differenz $z - Z$ wird eine Größe der 8. Ordnung, mithin nahe Null.

In den dazwischen liegenden Partien jedoch erhebt sich dieser Abstand der beiden Kurven von einander zur vierten Ordnung und hat ein Paar gleiche Maxima, deren Größe im wesentlichen darüber entscheidet, ob der Kreis für die eigentliche Kurve innerhalb der Grenzen $x = \pm\xi$ genommen werden kann oder nicht. Diese Maxima verschafft man sich auf folgende Weise. Man sucht zuvörderst das Maximum der Funktion

$$\varphi(x^2) = x^2(\xi^2 - x^2), \text{ erhält}$$
$$\varphi'(x^2) = \xi^2 - 2x^2, \text{ also } x^2 = \tfrac{1}{2}\xi^2$$
$$\varphi''(x^2) = -2$$

Es liegt mithin ein wirkliches Maximum vor. Bezeichnet man seinen Wert mit M, so ist

$$M = \varphi(\tfrac{1}{2}\xi^2) = \tfrac{1}{4}\xi^4.$$

Der in der Formel für $z - Z$ der Funktion $\varphi = x^2(\xi^2 - x^2)$ angefügte Faktor, bestehend aus einer Konstanten und einem kleinen variablen Zusatze verschiebt nun den Ort des Maximums um etwas Kleines, und ändert auch seinen Wert um etwas Kleines. Diese geringen Veränderungen kann man sich allgemein beiläufig auf folgende Weise verschaffen.

Angenommen, man hätte das Maximum M einer Funktion von x

$$U = \varphi(x)[a + kx] \tag{41}$$

zu bestimmen, hätte aber bereits durch Rechnung herausgebracht, daß $\varphi(x)$ einen größten Wert von M erhalte für den kleinen Wert $x = x_1$, der mithin

$$\varphi(x_1) = M, \quad \varphi'(x_1) = 0$$

gibt, so würde für denjenigen Wert von x, welcher U in seinen größten Wert M verwandelt, die Gleichung:

$$\frac{dU}{dx} = \varphi'(x)[a + kx] + k\varphi(x) = 0$$

bestehen. Da aber dieser Wert der veränderlichen x von x_1 nicht viel verschieden sein kann, so setze man $x = x_1 + \delta$ und entwickele die Funktionen φ und φ' mittels der Formel Taylors, nur die ersten Potenzen von δ beibehaltend; hiermit ergibt sich

$$\varphi''(x_1)(a + kx_1)\,\delta + k\varphi(x_1) = 0$$

also:

$$\delta = -\frac{kM}{\varphi''(x_1)(a + kx_1)}.$$

Oder, da vermöge der gemachten Voraussetzung kx_1 ein sehr kleiner Zusatz zu a ist, angenähert:

$$\delta = -\frac{kM}{a\varphi''(x_1)}.$$

Dies ist die Größe der Verschiebung des Maximums. Das Maximum selbst ist:

$$M = \varphi(x_1 + \delta)[a + k(x_1 + \delta)] = \varphi(x_1)[a + kx_1 + k\delta] = M(a + kx_1) + Mk\delta$$

oder

$$M = Ma + Mkx_1 - \frac{k^2M^2}{a\varphi''(x_1)}.$$

Um diese allgemeine Betrachtungen für den gegenwärtigen Fall zu verwerten, wird man x^2 statt x schreiben, ferner

$$x_1 = \frac{1}{2}\xi^2, \quad M = \frac{1}{4}\xi^4, \quad a = \frac{1}{8h^3} - B, \quad k = \frac{1}{16h^5} - D, \quad \varphi''(x_1) = -2$$

setzen, und nur im ersten Gliede von M muß

$$a = \left(\frac{1}{8h^3} - B\right)\left(1 - \frac{3\xi^2}{4h^2}\right) + \xi^2\left(\frac{1}{16h^5} - D\right)$$

geschrieben werden, womit man dann erhält:

$$M = \frac{1}{4}\xi^4\left(\frac{1}{8h^3} - B\right)\left(1 - \frac{3\xi^2}{4h^2}\right) + \frac{3}{8}\xi^6\left(\frac{1}{16h^5} - D\right) = \frac{1}{4}\xi^4\left(\frac{1}{8h^3} - B\right) + \frac{3}{8}\xi^6\left(\frac{B}{2h^2} - D\right).$$

Der letzte Bestandteil von M ist weggelassen worden, weil er sich der 8. Ordnung angehörig erweist. Dies ereignet sich jedesmal, so oft die Funktion U, oder φ eine Funktion von x^2 ist, d. h. so oft es sich um eine symmetrische Kurve handelt. Dieser größte mit M bezeichnete Abstand der zwei krummen Linien darf den größten Zeichenfehler, der in einer Zeichnung geduldet wird, und für welchen der Zeichner nicht mehr gutzustehen braucht, nicht überschreiten, wohl aber erreichen, ist mithin als eine bekannte Größe anzusehen.

Die vorliegende Gleichung dient mithin zur Bestimmung von ξ und 2ξ, welches letztere die Ausdehnung des Kreisbogens liefert, der in der Mitte und an seinen beiden Enden, oder mindestens in der nächsten Nähe derselben in die Kurve genau fällt, und in seinen anderen Punkten von derselben nur um etwas Unmerkliches absteht. Das ξ zu erhalten verfährt man folgendermaßen. Man gibt der Gleichung zuerst die Gestalt:

$$\frac{32M}{h} = \frac{\xi^4}{h^4}(1-8Bh^3)\left[1+6\xi^2\frac{Bh-2Dh^2}{1-8Bh^3}\right],$$

reduziert sie dann im Wege einer ersten Annäherung auf

$$\frac{32M}{h} = \frac{\xi^4}{h^4}(1-8Bh^3),$$

und erhält daraus sofort den beiläufigen Wert

$$\xi^2 = 4h^2\sqrt{\frac{2M}{h(1-8Bh^3)}},$$

welchen anstatt ξ^2 in die frühere Gleichung einführend man ein genaueres ξ gewinnt:

$$\xi = 2h\sqrt[4]{\frac{2M}{h\left[1-8Bh^3+24h^3(B-2Dh^2)\sqrt{\frac{2M}{h(1-8Bh^3)}}\right]}}.$$

Es ist zur leichteren Orientierung dienlich, in einigen Stützlinien die Kreisbögen der Ausdehnung und Krümmung nach kennen zu lernen, welche diese Stützlinie in der Nähe des Scheitels genau genug repräsentieren. Man nehme zuerst die Parabel; in dieser ist

$$z = \frac{x^2}{2h}, \text{ mithin } B = D = 0, \text{ also:}$$

$$R = h + \frac{\xi^2}{4h}, \quad M = \frac{\xi^4}{32h^3}, \quad \xi = 2h\sqrt[4]{\frac{2M}{h}}.$$

Nimmt man beispielsweise an, daß der größte noch geduldete Zeichenfehler $M = \frac{1}{200}$ eines Zolles, der Krümmungshalbmesser h aber $= 10$ Zoll sei, so hat man in Zollen: $R = 10{\cdot}316$, $\xi = 3{\cdot}356$, was einen der

Chorde 2ξ entsprechenden Bogen von nahe 38^0 ergibt, in dessen Bereiche Kreis und Parabel sich nur unmerklich voneinander trennen.

In der Kettenlinie hat man

$$z = \frac{x^2}{2h} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4h^3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6h^5} + \cdots, \text{ mithin}$$

$$B = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4h^3}, \quad D = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6h^5}, \quad R = h + \frac{\xi^2}{6h} + \frac{\xi^4}{40h^3}$$

$$M = \frac{\xi^4}{48h^3}\left(1 - \frac{7\xi^2}{20h^2}\right), \quad \xi = 2h\sqrt[4]{\frac{3M}{h + {}^7/_5\sqrt{3Mh}}}.$$

Für $M = \frac{1}{200}$ und $h = 10$ wird hier $R = 10{\cdot}252$ und $\xi = 3{\cdot}884$, was beinahe einem Bogen von 45^0 gleichkommt, welcher der Chorde 2ξ angehört.

In der Kurve des gleichen Widerstandes hat man

$$z = \frac{x^2}{2h} + \frac{x^4}{3 \cdot 4h^3} + \frac{x^6}{3 \cdot 3 \cdot 5h^5} + \cdots \text{ mithin:}$$

$$B = \frac{1}{3 \cdot 4h^3}, \quad D = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 5h^5}, \quad R = h + \frac{\xi^2}{12h} + \frac{\xi^4}{40h^3},$$

$$M = \frac{\xi^4}{96h^3}\left(1 + \frac{7\xi^2}{10h^2}\right), \quad \xi = 2\mathrm{h}\sqrt[4]{\frac{6M}{h + \frac{14}{5}\sqrt{6Mh}}}.$$

Hat man wie in den übrigen Beispielen $M = \frac{1}{200}$, $h = 10$, so wird $R = 10{\cdot}1800$, $\xi = 4{\cdot}5175$, und der Kreisbogen enthält in runder Zahl ungefähr 53^0.

Aus diesen Beispielen ist klar ersichtlich, daß gewöhnlich ein beträchtlicher Teil der Stützlinie in der Nähe des Scheitels durch einen Kreisbogen genau genug dargestellt werden kann. Die Ausdehnung dieses Teiles, dargestellt durch den Wert von 2ξ, nimmt auch nicht wesentlich ab, wenn ein höherer Grad der Genauigkeit gewünscht wird. Zum Beispiele, wenn man 5mal genauer, d. h. bis auf $M = \frac{1}{1000}$ eines Zolles, was eine dem schärfsten Auge bereits nicht mehr wahrnehmbare Größe ist, genau konstruieren will, so braucht man nur ξ beiläufig im Verhältnisse $\sqrt[4]{5} : 1$, nahe 3:2 zu reduzieren. Mit h, dem Maßstabe der Zeichnung also, wächst ξ, aber nicht im gleichen Maße, sondern so, daß, wenn h ins sechzehnfache vergrößert wird, ξ eine Vergrößerung von beiläufig ins achtfache erfährt.

Hat man solchergestalt ein beträchtliches Stück der Kurve mit besonders verläßlichen Endpunkten gewonnen, so ist nur noch übrig, dasselbe durch Anfügen fernerer Kreisbögen, die je drei nahe äquidistante Punkte mit der Kurve gemeinschaftlich haben, beiderseits beliebig zu verlängern in die Teile der Kurve, in welchen der Krümmungshalbmesser sich im Zustande des Wachsens oder des Abnehmens befindet.

Um auch die zu solchem Zwecke tauglichen Kreise näher kennen zu lernen, lege man sich abermals die Kurve so zurecht, daß der mittlere der 3 gemeinschaftlichen Punkte, der Koordinatenursprung und die Tangente zu demselben Achse der x wird. Den zu diesem Punkte gehörigen Krümmungshalbmesser nenne man r, so wird sich die Koordinatengleichung in der bereits unter (40) gebrachten Form

$$z = \frac{x^2}{2r} + Ax^3 + Bx^4 + Cx^5 + Dx^6 + \cdots$$

denken, und auch jedesmal, so oft dies gewünscht wird, wirklich darstellen lassen. Der dazu gehörigen Kreis habe den Halbmesser R und die Mittelpunktskoordinaten seien α, β, so ist die Gleichung desselben

$$(x - \alpha)^2 + (Z - \beta)^2 = R^2.$$

Da dieser Kreis durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehen soll, wo $X = Z = 0$ besteht, so ist

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2, \quad \text{also:} \quad x^2 - 2\alpha x + Z^2 - 2\beta Z = 0$$

die ihm angehörige Gleichung.

Da er ferner noch zwei andere Punkte mit der Kurve gemeinschaftlich besitzen soll, deren $x = -\xi$, $z = Z = z_1$ und $x = \xi$, $z = Z = z'$ entsprechen mag, so hat man:

$$\xi^2 + 2\alpha\xi + z_1^2 - 2\beta z_1 = 0,$$
$$\xi^2 - 2\alpha\xi + z'^2 - 2\beta z' = 0,$$

hieraus

$$\beta = \frac{z_1^2 + z'^2 + 2\xi^2}{2(z_1 + z')}, \quad \alpha = \frac{(z_1 z' - \xi^2)(z' - z_1)}{2\xi(z' + z_1)},$$

$$z_1 = \frac{\xi^2}{2r} - A\xi^3 + B\xi^4 - C\xi^5 + D\xi^6 - \cdots,$$

$$z' = \frac{\xi^2}{2r} + A\xi^3 + B\xi^4 + C\xi^6 + D\xi^7 + \cdots,$$

$$z' + z_1 = \frac{\xi^2}{r} + 2B\xi^4 + 2D\xi^6 + \cdots,$$

$$z' - z_1 = 2A\xi^3 + 2C\xi^5 + \cdots$$

und hiermit in Reihengestalt bis auf Glieder der sechsten Ordnung genau

$$\beta = r + \frac{\xi^2}{2r}(\tfrac{1}{2} - 4Br^3) + \xi^4(\tfrac{1}{2}B + 4B^2r^3 - 2Dr^2 + A^2r),$$

$$\alpha = -rA\xi^2 + \xi^4\left(\frac{A}{4r} + 2r^2AB - Cr\right),$$

$$R = r + \frac{\xi^2}{2r}(\tfrac{1}{2} - 4r^3B) + \xi^4(\tfrac{1}{2}B + 4B^2r^3 - 2Dr^2 + \tfrac{3}{2}A^2r).$$

Zudem gibt die obige Gleichung des Kreises nach Z in Reihenform aufgelöst

$$Z = -\frac{\alpha x}{\beta} + \frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^3}x^2 - \frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{2\beta^5}x^3 + \frac{5\alpha^4+6\alpha^2\beta^2+\beta^4}{8\beta^7}x^4$$
$$- \frac{9\alpha^5+14\alpha^3\beta^2+5\alpha\beta^4}{8\beta^9}x^5 + \frac{16\alpha^6+29\alpha^4\beta^2+14\alpha^2\beta^4+\beta^6}{16\beta^{11}}x^6 - \dots$$

oder nach Substitution der für α und β gefundenen Werte bis zur siebenten Ordnung genau:

$$Z = \frac{x^2}{2r} + A\xi^2 x + \frac{x^4}{8r^3} + \left(B - \frac{1}{8r^3}\right)\xi^2 x^2 + \frac{A}{2r^2}\xi^2 x^3 + \left(Cr - \frac{A}{2r}\right)\frac{\xi^4 x}{r}$$
$$+ \frac{x^6}{16r^5} + \frac{3}{4r^2}\left(B - \frac{1}{8r^3}\right)\xi^2 x^4 + \left[D - \frac{1}{16r^5} - \frac{3}{4r^2}\left(B - \frac{1}{8r^3}\right)\right]\xi^4 x^2.$$

Endlich daraus die Differenz der Ordinaten der zwei nahe aneinanderliegen sollenden krummen Linien

$$z - Z = x(\xi^2 - x^2)\left[-A\left(1 - \frac{\xi^2}{2r^2}\right) + x\left(\frac{1}{8r^3} - B\right)\left(1 - \frac{3\xi^2}{4r^2}\right)\right.$$
$$\left. - C(x^2+\xi^2) + x(x^2+\xi^2)\left(\frac{1}{16r^5} - D\right)\right],$$

die augenscheinlich für $x = \pm \xi$ der Null gleich wird, was auch beabsichtigt war.

Zwischen $x = -\xi$ und $x = \xi$ befindet sich ein Maximum und ein Minimum dieser Differenz, deren numerischer Wert den größten in der Zeichnung noch geduldeten Fehler M nicht überschreiten darf, und der darum auch hier der Berechnung zu unterwerfen sein wird. Zu diesem Zwecke faßt man zuerst die Funktion

$$\varphi(x) = x(\xi^2 - x^2)$$

ins Auge, und sucht Maximum und Minimum derselben; man erhält

$$\varphi'(x) = \xi^2 - 3x^2 = 0, \quad \varphi''(x) = -6x,$$
$$x = \pm \xi\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad \varphi''\left(\xi\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) = -6\xi\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad \varphi''\left(-\xi\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) = 6\xi\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

und

$$\varphi\left(\pm\xi\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) = \pm\xi^3\sqrt{\tfrac{4}{27}} = M.$$

Nun nimmt man aus dem Faktor von $x(\xi^2 - x^2)$ im Werte von $z - Z$ die der Größe nach vorherrschenden Bestandteile und fügt daraus ein angenähertes $z - Z = U$ zusammen.

$$U = x(\xi^2 - x^2)\left[-A + \frac{1}{8r^3} - Bx\right].$$

Es hat mit dem U der Formel (41) Ähnlichkeit, und gibt damit verglichen

$$\varphi(x) = x(\xi^2 - x^2), \quad a = -A, \quad k = \frac{1}{8r^3} - B,$$

$$x_1 = \pm \xi\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad \varphi(x_1) = M = \pm \xi^3\sqrt{\tfrac{4}{27}}, \quad \varphi''(x_1) = \mp 6\xi\sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

also

$$\delta = -\frac{\xi^2}{9A}\left(\frac{1}{8r^3} - B\right), \quad M = \mp A\xi^3\sqrt{\tfrac{4}{27}} + \tfrac{2}{9}\xi^4\left(\frac{1}{8r^3} - B\right)\cdot$$

Man hat hiermit einen angenäherten Wert von x, der dem Maximum und Minimum des Kurvenabstandes $z - Z$ entspricht, nämlich:

$$x = x_1 + \delta = \pm \xi\sqrt{\tfrac{1}{3}} + \frac{\xi^2}{9A}\left(B - \frac{1}{8r^3}\right)$$

erhalten, und könnte daran noch einen ferneren Approximationsakt knüpfen; dies ist jedoch zu den hier verfolgten Zwecken nicht notwendig, und würde bloß ohne entsprechenden Nutzen die Formeln komplizieren. Das Maximum aber und Minimum selbst, M nämlich, wird bestimmt durch eine einzige Formel, welche das eine als Summe, das andere als Differenz derselben zwei Größen darstellt, mithin als numerisch von einander verschieden angibt. Offenbar ist nun als Zeichenfehler die Summe zu vermeiden, daher man den Wert von ξ aus folgender Gleichung ziehen wird:

$$M = \xi^3\left[\sqrt{\frac{4A^2}{27}} + \frac{2}{9}\sqrt{\left(\frac{1}{8r^3} - B\right)^2\xi^2}\right],$$

in welcher beide Quadratwurzeln in ihrer positiven Bedeutung gemeint sind. Man reduziert sie zuvörderst auf die angenäherte:

$$M = \xi^3\sqrt{\frac{4A^2}{27}}, \quad \text{und hat} \quad \xi = \sqrt[3]{M\sqrt{\frac{27}{4A^2}}} = \xi',$$

welches ξ' ein erster Approximativwert der größten noch zulässigen halben Chordenlänge ist.

Ein zweiter näherer aber ist

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{M}{\sqrt{\frac{4A^2}{27}} + \frac{2}{9}\sqrt{\left(\frac{1}{8r^3} - B\right)^2\xi'^2}}}.$$

Um von dieser Formel Gebrauch machen zu können ist die Kenntnis der Koeffizienten A und B unerläßlich. Sie gehören der in Reihenform gedachten Gleichung der Stützlinie an, mit einem beliebigen, allenfalls auch außerhalb des Scheitels gewählten Punkte der Kurve als Koordinatenursprung, und der zu diesem Punkte gezogenen Tangente als Achse der x.

Die Transposition nach diesem neuen Anfangspunkte von demjenigen aus, auf welchen sich die Differentialgleichungen beziehen, ist hier zu bewerkstelligen und zwar möglich ganz allgemein und so, daß die Urgleichung dazu nicht benötigt wird, da man sie nicht immer in passender Form haben kann, daß vielmehr alles aus den Differentialgleichungen abgeleitet wird, die immer vorliegen.

Man nenne zu diesem Zwecke die wenn auch nicht bekannte Urgleichung der Stützlinie mit demselben Anfangspunkte, den auch die Differentialgleichungen voraussetzen,

$$z = f(x),$$

mithin

$$\frac{dz}{dx} = p = f'(x), \quad \frac{d^2z}{dx^2} = p' = f''(x),$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = p'' = f'''(x), \quad \frac{d^4z}{dx^4} = p''' = f^{IV}(x).$$

Die Koordinaten des neuen irgendwo auf der Kurve gewählten Anfangspunktes seien x_0, z_0, so ist auch

$$z_0 = f(x_0), \quad p_0 = f'(x_0), \quad p_0' = f''(x_0), \quad p_0'' = f'''(x_0), \quad p_0''' = f^{IV}(x_0).$$

Sind die Koordinaten irgend eines beliebigen Punktes der Kurve, bezogen auf diesen neuen Anfangspunkt x' und z', so wird

$$x = x_0 + x', \quad z = z_0 + z'.$$

Nun dreht man die neuen durch den Punkt x_0, z_0 gezogenen Achsen der x' und z', die einstweilen noch zu denjenigen der x und z parallel laufen, um den Winkel φ_0 herum, welchen die Tangente zum Punkte x_0, z_0 mit der x-Achse einschließt und dessen trigonometrische Tangente p_0 ist, und nenne überdies

$$\cos\varphi_0 = a, \quad \sin\varphi_0 = b, \quad p_0 = \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{b}{a},$$

so wird jetzt der Punkt xz auf den in dieser Weise herumgedrehten Achsen anstatt der $x'z'$ neue Koordinaten $\xi\zeta$ gewinnen, die mit den $x'z'$ durch folgende Gleichungen zusammenhängen:

$$x' = a\xi - b\zeta, \quad z' = b\xi + a\zeta. \tag{42}$$

Hiermit hat man aber zuvörderst

$$z = z_0 + z' = f(x_0 + x') = f(x_0) + f'(x_0)x' + f''(x_0)\frac{x'^2}{2}$$
$$+ f'''(x_0)\frac{x'^3}{2\cdot 3} + f^{IV}(x_0)\frac{x'^4}{2\cdot 3\cdot 4},$$

oder auch

$$z_1 = p_0 x' + p_0'\frac{x'^2}{2} + p_0''\frac{x'^3}{2\cdot 3} + p_0'''\frac{x'^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots. \tag{43}$$

Der Gleichung (40) zufolge ist aber ζ unter den obwaltenden Bedingungen eine Funktion von ξ, die die folgende Gestalt trägt

$$\zeta = \frac{\xi^2}{2r} + A\xi^3 + B\xi^4 + \cdots. \tag{44}$$

Diese substituiert man nun in die Gleichungen (42), und dann aus ihnen die Werte von x' und z' in die Gleichung (43), betrachtet ξ und ζ sowie x' und z' als der ersten Ordnung kleiner Größen angehörig, und entwickelt nur bis zur vierten Ordnung, so erhält man

$$b\xi + \frac{a}{2r}\xi^2 + aA\xi^3 + aB\xi^4 + \cdots = ap_0\xi - \left.\begin{matrix} \frac{p_0 b}{2r_0} \\ + \frac{1}{2}p_0' a^2 \end{matrix}\right\}\xi^2 - \left.\begin{matrix} p_0 bA \\ - \frac{abp_0'}{2r_0} \\ + \frac{a^3 p_0''}{2\cdot 3} \end{matrix}\right\}\xi^3 - \left.\begin{matrix} p_0 bB \\ - abp_0'A \\ + \frac{b^2 p_0'}{8r_0^2} \\ - \frac{a^2 b p_0''}{4r_0} \\ + \frac{a^4 p_0'''}{2\cdot 3\cdot 4} \end{matrix}\right\}\xi^4$$

Und durch Gleichstellung der beiderseitigen Koeffizienten gleichnamiger Potenzen von ξ

$$\left\{\begin{aligned} & b = p_0 a, \quad \frac{1}{r} = a^3 p_0', \quad A = -\frac{3a^5 b p_0'^2 - a^4 p_0''}{2\cdot 3}, \\ & B = \frac{15a^7 b^2 p_0'^3 - 10a^6 b p_0' p_0'' + a^5 p_0'''}{2\cdot 3\cdot 4}. \end{aligned}\right. \tag{45}$$

Diese sind die allgemeinen Werte der Koeffizienten A und B der oben gewonnenen Formeln. Die in denselben vorhandenen p' p'' p''' brauchen nicht aus der Koordinatengleichung der Kurve gezogen zu werden. Man gewinnt sie vielmehr bequemer aus der zweimal von neuem differenzierten Differentialgleichung selbst, daher sie auch die Kenntnis der Urgleichung gar nicht voraussetzen.

Man setzt sie in die Formel (43) und schreibt gleichzeitig x und z statt ξ und ζ, um die letztere Bezeichnung speziell für die Durchschnittspunkte der Kurve mit dem Kreise aufzubewahren, der sie zu repräsentieren bestimmt ist.

Man erhält so die auf jeden in der Stützlinie selbst gelegenen Anfangspunkt bezogene Gleichung dieser Stützlinie in Reihenform:

$$z = \frac{1}{2}a^3 p_0' x^2 - \frac{3a^5 b p_0'^2 - a^4 p_0''}{2\cdot 3}x^3 + \frac{15a^7 b^2 p_0'^3 - 10a^6 b p_0' p_0'' + a^5 p_0'''}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots$$

. . . .[1])

(Schluß folgt.)

1) Hier bricht das Manuskript ab. Der Herausgeber.



Kleinere Mitteilungen.

Preisaufgaben aus der angewandten Mathematik und Physik für 1905.[1])

Académie Royale de Belgique. 1. Compléter par de nouvelles recherches nos connaissances sur les phénomènes physiques, particulièrement les phénomènes thermiques, qui accompagnent la dissolution mutuelle les liquides, sans action chimique apparente les uns sur les autres. — Preis 800 Frs.

2. Trouver, en hauteur et en azimut, les expressions des termes principaux des déviations périodiques de la verticale, dans l'hypothèse de la non-coïncidence des centres de gravité de l'écorce et du noyau terrestres. — Preis 600 Frs.

Die Arbeiten, welche französisch oder flämisch abgefaßt sein müssen, sind vor dem 1. August 1905 portofrei an den ständigen Sekretär (à M. le Secrétaire perpetuel au Palais des Académies, Bruxelles) einzusenden.

Auskünfte.

J. B., B. Die Rechenmaschine „*Triumphator*" (System Arthur Müller), welche von den Leipziger Röhrenwerken in Lausen bei Leipzig hergestellt wird, stimmt äußerlich (und, wie man vermuten darf, wohl auch in den wesentlichen Punkten der inneren Einrichtung) mit Odhners Rechenmaschine bezw. der „Brunswiga" überein. Der Unterschied ist, daß im Schaltwerk neben den Schlitzen keine Ziffern stehen, sondern jede eingestellte Zahl in einer wagerechten Reihe von Schaulöchern über den Schlitzen erscheint. Neu ist der Gedanke nicht, sondern man findet ihn schon — um von noch älteren Maschinen abzusehen — bei den Rechenmaschinen von Duschanek, Büttner und Steiger verwirklicht (vgl Encyklopädie der mathem. Wissenschaften, Bd. I, S. 967, Anm. 138). M.

1) Siehe auch diese Zeitschrift, S. 157 des laufenden Bandes.

Bücherschau.

Ernst Wölffing, Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. Teil I. Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. Leipzig: B. G. Teubner. 1903. XXXVI u. 416 S. = Abhandlungen zur Geschichte der mathem. Wissenschaften XVI, 1.

Wir leben im Zeitalter der Jahresberichte und Bibliographien. Die Anzahl selbständiger Schriften und Zeitschriftenartikel ist in den einzelnen Wissenschaften während des 19. Jahrhunderts so gewaltig angeschwollen, daß es ein unabweisbares Bedürfnis geworden ist, die Publikationen in den einzelnen Jahren in den Jahresberichten zu sammeln und größere Zeiträume in Bibliographien zusammenzufassen. Für die mathematischen Wissenschaften liegen nun die Verhältnisse verhältnismäßig günstig. In den „Fortschritten der Mathematik“ besitzen wir ein Sammelwerk der jährlich erscheinenden mathematischen Literatur seit 1868 und in dem Catalogue of scientific papers published by the Royal society ein Werk, in dem man die mathematischen Aufsätze, welche in den wichtigeren Zeitschriften und Akademieschriften veröffentlicht sind, für die Zeit von 1800—1883 auffinden kann, und, wenn ich recht unterrichtet bin, ist die Fortsetzung dieses Catalogues für die Jahre 1884—1900 gesichert. Es war daher ein sehr glücklicher Gedanke, gewissermaßen als Ergänzung dieses englischen Werkes, wenigstens auf dem Gebiete der Mathematik, die monographischen Arbeiten mathematischen Inhalts des 19. Jahrhunderts zu sammeln, und man sah der Veröffentlichung des Herrn Wölffing mit Interesse entgegen, trotzdem die Société mathématique de France in ihrem Répertoire des sc. math. bereits begonnen hatte, die gesamte mathematische Literatur, Monographien und Zeitschriften, des 19. Jahrhunderts zu publizieren; allein die einzelnen Cahiers erscheinen in so langen Zwischenräumen, daß wohl noch viele Jahre bis zur Vollendung der Publikation vergehen werden.

Das Ideal einer jeden Bibliographie würde nun darin bestehen: 1) daß sie die gesamte Literatur der behandelten Wissenschaft innerhalb der gesteckten Zeitgrenzen in absoluter Vollständigkeit brächte und 2) daß die aufgeführten Titel durchaus zuverlässige Angaben enthielten. Beide Forderungen sind aber leider unerfüllbar. Es gibt keine und wird wohl nie eine Bibliographie irgend eines Wissenschaftszweiges geben, in der nicht nach ihrem Erscheinen Lücken nachgewiesen werden, und die zweite Forderung der völligen Zuverlässigkeit ließe sich nur erfüllen, wenn der Herausgeber jede angeführte

Schrift selbst in Händen gehabt hätte. Sobald er aber, und dies wird immer der Fall sein, mehr oder minder auf fremde Angaben angewiesen gewesen ist, wird er von diesen seinen Quellen in bezug auf Zuverlässigkeit abhängig sein. Es kann sich also bei Beurteilung einer Bibliographie nur darum handeln, zu untersuchen, ob der Herausgeber eine möglichst große Vollständigkeit erzielt hat und ob er die benutzten Quellen einer sachgemäßen Kritik auf ihre Zuverlässigkeit hin unterworfen hat.

Die vorliegende Bibliographie des Herrn Wölffing umfaßt in ihrem ersten Teil die reine Mathematik; das Erscheinen des 2. Teils, die angewandte Mathematik enthaltend, ist für die nächsten Jahre in Aussicht gestellt. In der Einleitung gibt Herr Wölffing zunächst eine Übersicht der schon früher veröffentlichten Jahresberichte, Bibliographien, Register von Zeit- und Gesellschaftsschriften und dergl., welche von dem Bibliographen als Quellen zu benutzen sind. Ich halte diese Übersicht für eine vortreffliche, sich durch große Vollständigkeit auszeichnende Arbeit. Es wäre zu wünschen, daß sie von allen Benutzern des Buches, besonders von den jüngeren, eifrig studiert würde, es würde dann vielleicht die erschreckende Unkenntnis und Unbeholfenheit aufhören, die sich meist zeigt, wenn ein jüngerer Mathematiker nach der Literatur über ein bestimmtes Thema sucht.

Dieser Zusammenstellung schließen sich dann auf einigen Seiten die Grundsätze an, die Herr Wölffing bei der Bearbeitung der Bibliographie befolgt hat. Er hat in den Bücherschatz weder die Werke über Mathematik im allgemeinen, noch geschichtliche und biographische Schriften, die sich auf einzelne Orte und Personen beziehen, noch Gesamtausgaben der Werke der Mathematik aufgenommen. Einen Grund für diese Auslassung gibt Herr Wölffing nicht an, und ich kann auch keinen rechten Grund dafür erkennen, halte es sogar für einen schwerwiegenden Mangel der Bibliographie. Eher ist es zu billigen, daß er aus der Legion von Lehrbüchern der Elementar-Mathematik eine Auswahl getroffen hat, nach welchen Gesichtspunkten aber diese Auswahl geschehen ist, ist mir nicht gelungen zu ergründen, es kommen noch so viel derartige Werke vor, daß ich nicht verstehe, warum gerade diese aufgenommen sind, während von denselben Schriftstellern andere ebenso elementare fortgelassen sind, und daß er alle Werke dieses Gebiets aufgenommen hat, die in den 30 ersten Bänden des Jahrbuches der Fortschritte der Mathematik angeführt werden, kann ich auch nicht billigen; im Gegenteil wäre es wertvoller gewesen, aus dieser Zeit gerade die aufzunehmen, welche im Jahrbuche nicht verzeichnet sind. Infolge dieser absichtlichen Auslassung ist es schwer, ein sicheres Urteil über die Vollständigkeit abzugeben, denn man kann eben nicht wissen, ob das Fehlen einer Schrift auf Übersehen beruht oder auf absichtlicher Ausmerzung. Ich habe mir einige Notizen bei dem Buchstaben S gemacht, den ich meinen Betrachtungen zugrunde gelegt habe: bei Herm. Schubert fehlen 4, bei Schulz von Straßniki 4, bei Smaasen 2, bei B. Smith 5, Jos. Smolik fehlt, trotz 8 Monographien, ganz, ebenso F. W. Dn. Snell mit 6 (allerdings wird eine angeführt, aber fälschlich unter T. Snell), bei Sonnet fehlen 12, bei Spaun 3, bei Stamkart 3, bei Steen 8, bei A. Stegmann 3, bei F. L. Stegmann 3, bei Steinhauser 3, bei Jac. Struve 10 und viele andere, und zwar sind das meiner Meinung nach alles Schriften, die nicht elementarer sind, als die von Herrn Wölffing bei diesen Schriftstellern angeführten.

Separat-Abzüge hat Herr Wölffing, wie er sagt, absichtlich ausgeschlossen, ist aber bei der Ausmerzung solcher, die sich doch eingeschlichen haben, nicht streng vorgegangen. Eine genaue Auszählung und Vergleichung bei dem Buchstaben S (von Seelhoff — Sz) hat nun aber gezeigt, daß rund 10% (eher mehr als weniger) der angeführten Schriften Zeitschriftenartikel sind. Das scheint mir denn doch etwas zu viel zu sein bei den selbstgesteckten Grenzen, nur monographische Arbeiten aufzunehmen, zumal dadurch leicht ein ganz falsches Bild von der Tätigkeit eines Schriftstellers erzeugt wird. Seeliger, Segre (mit 7), Severini, Sexe (mit 3), Siacci, Simony, Sire, H. J. S. Smith, Solin (mit 4), Sparkes (mit 2), Stamkart, Staudigl, Stefenelli, Stone, H. Struve, Sylvester würden ganz ausfallen, und von den 12 Schriften M. A. Stern's würden nur drei übrig bleiben.

„Die Titel sind bisweilen gekürzt". Nein, nicht bisweilen, sondern in den allermeisten Fällen, was ich allerdings im allgemeinen bei dieser Bibliographie nur billigen kann. Aber mit einigen Kürzungen kann ich mich trotzdem nicht einverstanden erklären. Herr Wölffing hat die Auffindung der Werke dadurch zu erleichtern gesucht, daß er dasselbe Werk an verschiedenen Stellen seiner Systematik anführt; dabei scheint er nun den Grundsatz befolgt zu haben, den Titel nur an einer Stelle ausführlicher zu geben, an der oder den anderen aber gekürzt. Damit hebt er aber leider die beabsichtigte Erleichterung auf, denn der Benützer wird dadurch gezwungen, mit Hilfe des Namenregisters alle Stellen aufzusuchen, an denen Werke des Schriftstellers verzeichnet sind, um sich zu überzeugen, ob die gesuchte Schrift noch an einer anderen Stelle der Systematik vorkommt und hier vielleicht ausführlicher angegeben ist, ja manchmal geht die Kürzung so weit, daß man nur schwer die Identität feststellen kann. Aus der sehr großen Zahl solcher nicht übereinstimmenden Doppelanführungen will ich nur einige Beispiele herausgreifen:

S. 147. I. Schubert, Über die Integration der D. für Flächenstücke. Danzig. 1886. 1,8 *M*.

S. 152. I. Schubert, Über die Integration der D. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0$ für Flächenstücke, die von konfokalen Ellipsen und Hyperbeln begrenzt werden. Diss. (Königsberg) Danzig. 1886.

S. 27. Schultén, N. G. Strödda anteckningar rörande grunderne af arithmetiken och geometrien samt arithmetiska geometrien. Helsingfors. 1849.

S. 267. Derselbe Titel. I—XIV. Diss. Helsingfors. 1849—1852.

S. 136. W. Seifert, Über die Integration der Gaußschen Reihe. Göttingen. 1875.

S. 147. W. Seifert, Über die Integration der D. $(t-a)(t-b)(t-c)\frac{d^2y}{dt^2} + (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}t + \mathfrak{c}t^2)\frac{dy}{dt} + (\mathfrak{d} + \mathfrak{e}t)\,y = 0$ Diss. Göttingen. 1875. Vandenhoeck 1,6 *M*.

S. 176. J. F. Stader, De ellipticis integralibus quae spectant ad hyperbolae arcus, Diss. Berlin. 1854.

S. 297. J. F. Stader, De elliptica integrali quae spectat ad hyperbolae areas (!). Diss. Berlin. 1854.

S. 9. A. Stosak, Über die Grundoperationen der Mathematik, wobei die Zahl als erster Begriff angesehen wird. Pr. Brünn. 1871.

S. 43. A. Stosak, Über die math. Grundoperationen mit besonderer Rücksicht auf die sogenannten i. Zahlen I-II (tschech.) Pr. Brünn. 1871—72.

S. 106. Kummer, E. E. De cosinuum et sinuum potestatibus secundum cosinus vel sinus arcuum multiplicium evolvendis. Diss. Halle. 1832. Waisenhaus 1 *M*.

S. 168. Kummer, E. E. De cosinuum et sinuum potestatibus. Halle. 1832.

Der Titel: (S. 282) F. Seydewitz, Theorie der periodisch homologen Punkte, Geraden und Ebenen in bezug auf das System 3 Kegelschnitte, welche einen 4. doppelt berühren, bricht auf S. 294 hinter Kegelschnitte, auf S. 349 hinter Ebenen ab, und ähnlich bricht der Titel (S. 294) Steiner De loco geometrico centri lineae rectae definitae cujusdam lineae 2. ordinis moventur auf S. 279 hinter rectae und auf S. 225 sogar schon hinter geometrico ab.

Bisweilen gibt Herr Wölffing die Spezialtitel der einzelnen Bände eines Werkes, ohne das Werk selbst angeführt zu haben, so z. B. (S. 268) Steczkowski, J. K. Anal. Geom. (poln.) Krakau. 1859; dies ist aber Band III von St.'s Elementar-Lehrbuch der Mathematik. (Band I und II werden gar nicht zitiert); analog liegt der Fall bei H. Seeger: (S. 92) Elemente der algebr. Analysis und der Infinitesimalrechnung und (S. 120) Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Mechanik; das erste ist Band I, das zweite Band II von Seegers Leitfaden für den elem. Unterricht in der I. einer 9-klassigen Realschule. Hierhin gehört auch (S. 296) M. Simon. Die Parabel. Berlin. 1876, A. Milinowski, Die Ellipse und Hyperbel 1879; das erste ist Abteilung I, das zweite Abteilung II von Simon und Milinowskis Kegelschnitte; dieser Titel wird allerdings S. 288 gegeben, aber mit dem Zusatz II, wer also das Buch nicht kennt, glaubt, daß letzteres der 2. Teil eines größeren Werkes ist. Ich halte diese Kürzung ebenfalls nicht für richtig, denn die Angabe nur des Untertitels kann leicht zu Irrtümern Veranlassung geben, auch sind häufig Werke nur nach dem Untertitel schwer auffindbar. Ebensowenig hätte Herr Wölffing einen Zusatz fortlassen dürfen, der direkt zur Unterscheidung zweier verschiedener Bücher notwendig ist. So findet sich z. B. auf S. 268 fast dicht untereinander: M. Simon, Analyt. Geom. der Ebene, 2. Aufl. Leipzig. 1900 Göschen 0,8 *M* und M. Simon, Analyt. Geom. der Ebene, Leipzig 1900 Göschen 6 *M*; hätte Herr Wölffing zum ersten = Sammlung Göschen, zum zweiten = Sammlung Schubert gesetzt, so wäre jeder Irrtum ausgeschlossen gewesen.

Ebensowenig einverstanden kann ich mich mit der Fortlassung der Herausgeber und Bearbeiter erklären; hätte Herr Wölffing dies nicht getan, so würde man ohne Schwierigkeit die „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen von K. Weierstraß“ finden (S. 172), die Herr Wölffing unter dem Namen Weierstraß anführt, ohne Schwarz zu nennen; übrigens würde es überhaupt richtiger sein, Schwarz als Verfasser dieser Formelsammlung zu nennen, der er in der Tat ist.

Daß Herr Wölffing in seiner Systematik das Stichwort wenigstens in den deutschen Titeln kürzt und zum Beispiel Differentialgleichung an der betreffenden Stelle einfach mit D. wiedergibt, ist durchaus richtig, eine Ausnahme hätte er nur machen sollen, um wenig gefälliges Aussehen zu vermeiden, wie z. B. (S. 134) Sonin, N. J. I. I. (russ.) Petersburg 1898;

hätte er wenigstens hier (russ.) zwischen I.(ntegralrechnung) und I. (Teil) eingeschoben.

Endlich, um das Kapitel der Kürzungen zu beschließen, noch zwei Bemerkungen zu den Programmschriften. An Orten, wo nur eine höhere Schule existiert, die Programme veröffentlicht, reicht die einfache Hinzufügung des Ortes aus; in größeren Städten aber, wo mehrere höhere Schulen vorhanden sind, kann man mit der Bezeichnung hinter dem Titel, z. B. Pr. München oder Pr. Berlin nichts anfangen; hier wäre es unumgänglich notwendig gewesen, den Namen der betreffenden Schule noch hinzuzufügen. Die zweite Bemerkung die ich hier anfügen möchte, bezieht sich auf diejenigen Programmschriften und Dissertationen, bei denen Erscheinungsort und Druckort nicht übereinstimmen. Bei diesen setzt Herr Wölffing den Erscheinungsort in Klammern, während ich es für richtiger halten würde, den Druckort einzuklammern, da bei Dissertationen und Programmschriften der Erscheinungsort das Wesentliche ist. Die oben schon einmal angeführte Schrift von I. Schubert (S. 152) ist und bleibt doch eine Dissertation von Königsberg, ob sie nun in Danzig oder anderswo gedruckt ist.

Sehr zu bedauern ist, daß Herr Wölffing darauf verzichtet hat, die Seitenzahlen den Titeln beizufügen, man hätte dann mit Leichtigkeit den Umfang des Werkes erkennen können, was durch Hinzufügung des Preises doch nur sehr annähernd möglich ist, auch behalten die Preise doch nur für die neueren Bücher einigermaßen ihren Wert zur Information des Lesers; bei älteren Schriften treten die antiquaren Preise ein, die von den Ladenpreisen nach oben oder nach unten meist erheblich abweichen. Außerdem fragt man sich, was hat die Anführung von Preisen für einen Wert, wenn man Schulz von Straßnicki, das geradlinige Dreieck und die dreiseitige Pyramide auf S. 214 mit 3 *M.* auf S. 241 mit 2 *M.* oder F. F. Schweins Analysis S. 83 mit 24 *M.* und S. 92 mit 25 *M.* ausgezeichnet findet. Als Curiosum möchte ich erwähnen, daß sogar Preise wie 0, 375 *M.* (S. 31 und 204) bei I. Schuster und 0,875 *M.* (S.27 bei Seebold) angegeben werden.

Auf die Einleitung folgt dann die eigentliche Bibliographie, welche systematisch nach 313 Stichworten geordnet ist und sich im großen und ganzen der Systematik des Jahrbuches der Fortschritte der Mathematik anschließt. Es würden sich schließlich gegen jede Systematik Einwendungen erheben lassen, eine Forderung aber muß jede Klassifikation erfüllen, daß man im allgemeinen leicht und sicher eine einzelne Schrift auffinden kann. Ich habe einzelne Stichproben nach dieser Richtung hin mit dem Wölffingschen Buche angestellt, indem ich Werke ohne Zuhilfenahme des Sach- und Autorenregisters nur auf Grund des Inhaltsverzeichnisses aufsuchte und kann sagen, daß mir das jedes Mal in kürzester Zeit gelang. Mehr kann man aber von einer Systematik nicht fordern. Außerdem steht aber dem Benützer noch ein vollständiges Autorenregister zur Verfügung und ein Sachregister, das in bezug auf Stichworte noch sehr viel umfangreicher als das eigentliche Inhaltsverzeichnis ist, sodaß also die Auffindung eines gesuchten Titels nach jeder Richtung hin erleichtert ist. Aufs äußerste aber zu beklagen ist, daß Herr Wölffing so wenig Kritik seinen Quellen hat angedeihen lassen, deshalb findet man auch im eigentlichen Text und im Autorenregister eine so sehr große Zahl von Unrichtigkeiten und Unstimmig-

keiten, die den Wert der Bibliographie bedeutend herabsetzen und bei seiner Benutzung zur äußersten Vorsicht mahnen. Herr Wölffing hat den begreiflichen Wunsch gehabt, seine Bibliographie des 19. Jahrhunderts sobald als möglich nach Schluß des Jahrhunderts dem Publikum zur Benutzung zu übergeben, doch zweifele ich, ob die Schnelligkeit des Erscheinens so wertvoll ist, daß man so viel Ungenauigkeiten mit in den Kauf nehmen muß; hätte Herr Wölffing sein Buch ein Jahr später erscheinen lassen, und hätte er dieses Jahr nur der kritischen Untersuchung gewidmet, so würde das seiner Publikation zum größten Vorteil gereicht haben, nicht als ob dann alle Ungenauigkeiten hätten beseitigt werden können, denn ich weiß sehr wohl, daß auch die eingehendste Untersuchung auf bibliographischem Gebiete häufig mit einem non liquet endet, aber man hätte dann wenigstens diese neue Bibliographie mit vollem Vertrauen benützen können. Ich hoffe, daß Herr Wölffing wenigstens für den 2. Teil diese Bemerkung berücksichtigt.

Berlin, Dezember 1903. G. Valentin.

Bruns, H. Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. 8°. V u. 159 S. Leipzig, B. G. Teubner 1903. Preis in Leinen geb. Mk. 4.00.

An einem Buche von solch allgemeiner Bedeutung für alle Zweige des wissenschaftlichen Rechnens hat es bisher in der Literatur gemangelt, und die Rechner sowohl der exakten Wissenschaften wie der höheren Technik werden daher dem Verfasser großen Dank wissen. Im wesentlichen ist das Werk aus den Übungen hervorgegangen, die Herr Bruns in seinem Seminar für wissenschaftliches Rechnen an der Leipziger Universität abgehalten hat. Über den reichen Inhalt möge die folgende Übersicht orientieren.

Der Name „wissenschaftliches Rechnen" umreißt in der Hauptsache Methoden, die ursprünglich aus dem Bedürfnis der rechnenden Astronomie heraus geschaffen sind, und diese Methoden finden hier eine zusammenfassende Bearbeitung. Die Einleitung bringt Geschichtliches, Bemerkungen über die Anforderungen an numerische Tafeln und beherzigenswerte Aussprüche über sexagesimale Winkelteilung und über die Zweckmäßigkeit des Gebrauchs der Rechenmaschine in den mit einem starken Ziffernverbrauch belasteten Wissenschaften, z. B. der Astronomie. Einige „Lesefrüchte" daraus wurden schon im 49. Band dieser Zeitschrift S. 384 abgedruckt.

Der erste Abschnitt führt ein mit der Untersuchung der Eigenschaften der Differenzen- und Summenreihen und ihrer Bedeutung für Operationen, wie sie sich beim Entwurf oder der Kontrolle numerischer Tafeln ergeben. Der Darstellung der Interpolation bei Tafeln ist der zweite Abschnitt gewidmet, der den inneren Zusammenhang der Interpolationsformeln von Newton, Gauß, Stirling und Bessel und ihren gemeinsamen Ursprung in der sog. Lagrangeschen Interpolationsformel nachweist. An Hand eines kleinen Täfelchens läßt sich über die zweckmäßigste der Formeln von Fall zu Fall leicht entscheiden. Im allgemeinen stellt sich die Rechnung mit Newtons Formel ungünstiger als wie mit den andern. Ein kurzer Hinweis auf die Extrapolation am Endintervall einer vorgelegten Tafel und eine längere Untersuchung über die Verfeinerung einer ursprünglich grob gerechneten Wertereihe durch Interpolation mit Hilfe der Rechenmaschine schließt sich, durch Beispiele erläutert, an. Endlich folgt eine sehr interessante Diskussion

der Wirkung der Abrundungsfehler der Funktionswerte, und zwar wird der Maximalfehler der Interpolation, die „extreme Fehlerwirkung“, gesucht und in einem Täfelchen vor Augen geführt.

Der kurze dritte Abschnitt erledigt die numerische Differentiation, der nur ein beschränktes Anwendungsgebiet zukommt, während in längerer Ausführung der vierte, fünfte und sechste Abschnitt von der numerischen Integration handeln. Zunächst von der Summenmethode, deren Anwendung auf Quadraturen, auf die Integration von Differentialgleichungen und auf Tabulierungen gezeigt wird. Enckes Aufsätze im Berliner Jahrbuche haben das Verfahren unter den Astronomen bekannt gemacht, und man wendet es heutigen Tages bei der Verfolgung der Bewegung von Kometen und kleinen Planeten in ausgedehntem Maße an. Die Methode der Vierecksverbesserung wird dann in gedrängter Form gegeben, den Mittelwertmethoden hingegen ein breiter Raum angewiesen. Die Cotesischen Gewichte, die Simpsonsche Regel, das Gaußische Mittelwertverfahren und die Integration vermittels einer trigonometrischen Reihe erfahren eine ansprechende Darstellung.

Der siebente Abschnitt wendet die zuvor behandelte Integration einer periodischen Funktion auf die numerische Bestimmung der Koeffizienten einer trigonometrischen Entwicklung an. Von dem Tschebychefschen Interpolationsverfahren wird hier gezeigt, „daß man in Wahrheit eine eigenartige Methode der trigonometrischen Entwicklung vor sich hat, und daß die algebraische Einkleidung nur eine fremde Hülle darstellt, die den Kern des Verfahrens verdeckt und die ganze Herleitung unnütz erschwert.“ Die Lösung derselben Aufgabe, die numerische Bestimmung der Koeffizienten einer Reihenentwicklung, wird auch im achten Abschnitt und zwar mit Rekursionsformeln angebahnt.

Das Schlußkapitel kommt wieder auf den Ausgangspunkt, die Interpolation, zurück; es betitelt sich „Interpolation im weitern Sinne“ und begreift eine Anzahl wichtiger Bemerkungen in sich. Es dehnt die Grenzen des Gebietes der Interpolation, die geometrisch gesprochen gewöhnlich nur ein kurzes Bogenstück umfaßt, auf die ganze Kurve aus, und es erwächst nun die Aufgabe, eine interpolatorische Darstellung für die vorgelegte Kurve zu substituieren. Die Ableitung der Parameter der gesuchten Darstellung kann nach zwei Methoden erfolgen, nach der Methode der kleinsten Quadrate oder nach dem Cauchyschen Interpolationsverfahren. Interpolatorische Darstellungen, mehr oder minder verkappt, kommen in den Resultaten der exakten Wissenschaften sehr häufig vor; m. E. sind z. B. in vielen Fällen die berechneten Doppelsternbahnen nicht viel mehr als solche interpolatorischen Darstellungen, und in noch viel höherem Maße ist das wohl bei gewissen Formeln der Fall, die für Veränderliche, vor allem vom Miratypus, aufgestellt werden.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.



Neue Bücher.[1])

Analysis.

1. Seliwanoff, D., Lehrbuch der Differenzenrechnung. (Teubners Lehrbücher Bd. XIII.) Leipzig, Teubner. geb. M. 4.

Astronomie.

2. Encke, J. F., Über die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen. — Hansen, P. A., Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Hrsg. v. J. Bauschinger. (Ostwalds Klassiker Nr. 141.) Leipzig, Engelmann. geb. M. 2.50.
3. Martus, H. C. E., Astronomische Erdkunde. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik. Große Ausg. 3., neu durchgearbeitete Aufl. Dresden u. Leipzig, Koch (Ehlers). M. 9.

Biologie.

4. Pearson, Karl, Mathematical contributions to the theory of evolution. 12, On a generalised theory of alternative inheritance, with special reference to Mendels' law. 4to. London, Dulau. 1 s. 6 d.

Darstellende Geometrie.

5. Fiedler, Wilhelm, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Vierte Auflage. I. Die Methoden der darstellenden Geometrie und die Elemente der projektivischen Geometrie. Leipzig, Teubner. M. 10, geb. M. 11.

Geschichte und Biographien.

6. Bjerknes, V., Carl Anton Bjerknes. Gedächtnisrede, gehalten vor der Gesellschaft der Wissensch. zu Christiania am 17. April 1903. Mit einem Bildnis. Leipzig, Barth.
7. Fellhaus, Frz. M., Zur Geschichte der Elektrizität. Die Begründung der Lehre v. Magnetismus u. Elektrizität durch William Gilbert († 1603). Eine Säkularschrift. 8°. 35 S. Heidelberg, Winter. M. 0.80.
8. Rouse, Ball W. W., Breve compendio di storia delle matematiche. Versione dell' inglese con note, aggiunte e modificazioni dei dott. Dionisio Gamboli e Giulio Puliti, riveduta e corretta dal prof. Gino Loria. Vol. II. Le matematiche moderne sino ad oggi. 8°. Bologna. L. 12.

Mathematik.

9. Baker, W. M., Graphical statics problems: Roy. 8vo. London, Arnold. 2 s. 6 d.
10. Davoglio, Guglielmo, Nuovi principî di dinamica lineare: saggio. Parte I. 8°. Bergamo. L. 2.
11. Hadamard, Jacques, Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Gr. in-8°. Paris, Hermann. Frs. 18.
12. Jordan, Hermann, Über die Berechnung von Nebenspannungen in Fachwerken mit steifen Knotenverbindungen. (Diss. Hannover.) 8°. 125 S. mit 16 Fig. Straßburg i. E., Druck von M. Du Mont-Schauberg.
13. Leblanc, H., Traité élémentaire de cinématique. Les mécanismes. In-12. Paris, Garnier frères. Cart. Frs. 5.

1) Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1904.

14. Mach, Ernest, La mécanique. Exposé historique et critique de son développement. Ouvrage traduit sur la quatrième édition allemande, par Emile Bertrand, avec une introduction de Emile Picard. In-8°. Paris, Hermann. Frs. 15.
15. Marcolongo, Roberto, Teoria matematica dell' equilibrio dei corpi elastici. Manuali Hœpli. 16°. Milano. L. 3.
16. Spruit Jr., C., Uitgewerkte vraagstukken, opgegeven bij de examens C der polytechnische school te Delft voor theoretische mechanica. Delft, Waltman Jr. gr. 8°. Fl. 3.75.
17. Tallqvist, Hj., Lehrbuch der technischen Mechanik. II. Theorie der Elastizität u. Festigkeit. Hydromechanik. gr. 8°. Helsingfors, Zürich, Seidel. M. 8; geb. M. 10.

S. auch Nr. 23.

Physik.

18. Battelli, A., e Cardani, C. Trattato di fisica sperimentale ad uso delle università. Vol. I. Meccanica metrologia, proprietà dei solidi, dei liquidi, dei gas. 8°. Milano. L. 15.
19. Bürgi, R. T., Der Elektronäther, Beiträge zu einer neuen Theorie der Elektrizität u. Chemie. Berlin, Junk. M. 1.20.
20. Chwolson, O. D. Lehrbuch der Physik. 2. Bd. Lehre vom Schall (Akustik). Lehre von der strahlenden Energie. Übers. v. H. Pflaum. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 18; geb. M. 20.
21. Curie, Mme., Untersuchungen über die radioaktiven Substanzen. („Die Wissenschaft", Heft 1.) Übers. v. W. Kaufmann. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 3; geb. M. 3.80.
22. Gajdeczka, Josef, Maturitäts-Prüfungen aus der Physik. 3., gänzlich umgearb. Aufl. Wien, Deuticke. M. 2.
23. Gray, Andrew, Lehrbuch der Physik. Deutsch v. Felix Auerbach. 1. Bd. Allgemeine und spezielle Mechanik. Braunschweig, Vieweg & Sohn.
24. Loppé, F., Essais industriels des machines électriques et des groupes électrogènes. Paris, Gauthier-Villars.
25. Kleiber, J., Lehrbuch der Physik für humanistische Gymnasien. 2. verb. Aufl. München & Berlin, Oldenbourg. M. 3.
26. Rayleigh, Lord, On the acoustic shadow of a sphere, with an appendix giving the values of Legendres functions from P_0 to P_{20} at intervals of 5 degrees. By A. Lodge. 4to. London, Dulau. 1 s.
27. Righi, Augusto, La moderna teoria dei fenomeni fisici (radioattività, ioni, elettroni). 8°. Bologna. L. 3.
28. Schmidt, G. C. Die Kathodenstrahlen. („Die Wissenschaft", Heft 2.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 3; geb. M. 3.60.

Tafeln.

29. Dale, John Borthwick, Five-figure tables of mathematical functions. Comprising tables of logarithms, powers of numbers, trigonometric, elliptic and other transcendental functions. 8vo. London, Arnold. 3 s. 6 d.
30. Förster, W., und Lehmann, P. Die veränderlichen Tafeln des astronomischen u. chronologischen Teils des preußischen Normalkalenders für 1905. gr. 8°. Berlin, Statist. Bureau. M. 5.
31. Witkowski, A. W., Tablice matematyczno-fizyczne. Warszawa, Nakład redakcyi „Wiadomości matematycznych".
32. Zimmermann, H., Calculating tables and collection of frequently used numerals. Translated from German into English by L. Descroix. Berlin, Ernst & Sohn. geb. in Leinw. M. 6.

S. auch Nr. 26.

Verschiedenes.

33. Macfarlane, Alexander, Bibliography of Quaternions and allied systems of Mathematics. Dublin, University Press.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Bjerknes, V., Carl Anton Bjerknes, s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 6.

Bürgi, R. T., Der Elektronäther, s. N. B 19.

Chwolson, O. D., Lehrbuch der Physik. 2. Bd., s. N. B. 20.

Cohn, G., Geometrie der Ebene. Teil II: (Zweiter Jahreskursus.) Die Kongruenz als Beweismittel und die Anwenduug des Hilfsdreiecks. Leipzig, Schneider. brosch. M. 0.80; geb. M. 1.

Curie, Mme., Untersuchungen über die radioaktiven Substanzen, s. N. B. 21.

Encke, Bestimmung einer elliptischen Bahn. — Hansen, Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers, s. N. B. 2.

Féaux, B., Lehrbuch der elementaren Planimetrie. 9. Aufl. Paderborn, Schöningh.

Fiedler, W., Darstellende Geometrie. 4. Aufl. I. Tl., s. N. B. 5.

Fort und Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 1. Tl. Analytische Geometrie der Ebene. 7. Aufl. besorgt v. R. Heger. Leipzig u. Berlin, Teubner.

Gajdeczka, J., Prüfungsfragen aus der Physik, s. N. B. 22.

Gray, A., Lehrbuch der Physik, 1. Bd., s. N. B. 23.

Hess, Hans, Die Gletscher. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 15; geb. M. 16.

Jordan, H., Über die Berechnung von Nebenspannungen in Fachwerken, s. N. B. 12.

Kleiber, J., Lehrbuch d. Physik, s. N. B. 25.

Lebesgue, Henri, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 3.50.

Littlehales, G. W., A new and abridged method of finding the locus of geographical position and the compass error (Philos. Soc. Washington Bull., vol. XIV, pp. 233—246.) Washington 1903.

Loppé, F., Machines électriques, s. N. B. 24.

Macfarlane, A., Bibliography of Quaternions . . ., s. N. B. 33.

Martus, H. C. E., Astronomische Erdkunde, s. N. B. 3.

Müller, F., Abgekürzte Titel von Zeitschriften mathematischen Inhalts. (Aus: Jahresber. der deutschen Mathem.-Vereinigung, 12. Bd.) Leipzig 1903, Teubner.

Reichel, O., Vorstufen der höheren Analysis und analytischen Geometrie. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 2.40.

Schmidt, Carl, Beiträge zur mathematischen Geographie. II. Die Zeitgleichung. Progr. Ostergymnasium Mainz.

Schmidt, G. C., Die Kathodenstrahlen, s. N. B. 28.

Seliwanoff, D., Differenzenrechnung, s. N. B. 1.

Torroja y Caballé, Eduardo, Teoria geométrica de las lineas alabeadas y de la superficies desarrollables. Madrid, Fortanet. 15 pesetas.

Witkowski, A. W., Tablice matematyczno-fizyczne, s. N. B. 31.

Salmon, George, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zweiter Teil. Sechste Auflage. [XXIV u. 416 S.] gr. 8. 1903. geh. *M* 8.—, geb. *M* 9.—

Schenk, Dr. ing. **Julius,** Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen. Mit 45 Figuren im Text und auf einer Doppeltafel. [IV u. 59 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M* 1.60.

Schulze, Bruno, Generalmajor und Chef der Topographischen Abteilung der Landesaufnahme, Das militärische Aufnehmen, unter besonderer Berücksichtigung der Arbeiten der Königl. Preuß. Landesaufnahme nebst einigen Notizen über Photogrammetrie und über die topographischen Arbeiten Deutschland benachbarter Staaten. Nach den auf der Königl. Kriegsakademie gehaltenen Vorträgen bearbeitet. Mit 129 Figuren im Text. [XIII u. 305 S.] gr. 8 1903. geb. n. *M* 8.—

Schreber, Dr. **K.,** die Kraftmaschinen. Für Zuhörer an der Universität Greifswald gehaltene Vorlesungen über die wichtigsten der zur Zeit gebrauchten Kraftmaschinen. Mit 1 Tafel und 55 Abbildungen im Text. [XII u. 348 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M* 6.—, geb. n. *M* 6.80.

Seliwanoff, Demetrius, Priv. Dozent an der Universität St. Petersburg, Lehrbuch der Differenzenrechnung. [IV u. 92 S.] gr. 8. 1904. geb. *M* 4.—

Serret-Harnack, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Herausgegeben von G. Bohlmann und E. Zermelo. Dritter Band. Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Mit 43 in den Text gedr. Fig. [XII u. 768 S.] gr. 8. 1904. geh. n. *M* 9.—, geb. n. *M* 10.—

Auch in zwei Lieferungen:

1. Lieferung: Differentialgleichungen. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [304 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M* 6.—
2. Lieferung: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Mit 33 in den Text gedruckten Fig. [XII u. 464 S.] gr. 8. 1904. geh. n. *M* 3.—

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Herausgegeben vom Vorstand der Gesellschaft. Zweiter Jahrgang. [IV u. 68 S] gr. 8. 1903. geh. n. *M* 2.—

Stephan, P., Regierungsbaumeister, Lehrer an der Königl. höheren Maschinenbauschule in Posen, Die technische Mechanik. Elementares Lehrbuch für mittlere maschinentechnische Fachschulen und Hilfsbuch für Studierende höherer technischer Lehranstalten. Erster Teil: Mechanik starrer Körper. Mit 255 Figuren im Text. [VIII u. 344 S.] gr. 8. 1904. geb. *M* 7.—

Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M* 21.—, geb. n. *M* 23.—

Weber, H., Professor in Straßburg, und **J. Wellstein,** Professor in Gießen, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. In 3 Bänden. [I. Elementare Algebra und Analysis. II. Elementare Geometrie. III. Anwendung der Elementarmathematik.] I. Band. [XIV u. 446 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. *M* 8.— [Bd. II u. III. 1904. Unter d. Presse.]

Wienecke, Ernst, Lehrer in Berlin, der geometrische Vorkursus in schulgemäßer Darstellung. Mit reichem Aufgabenmaterial nebst Resultaten z. Gebr. an allen Lehranst. Mit 59 Fig. i. Text. [IV u. 97 S.] gr. 8. 1903. geb. n. *M* 2.20.

Wölffing, Dr. **Ernst,** Professor an der Königl. Techn. Hochschule zu Stuttgart, Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis d. wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher u. Monographien d. 19. Jahrhunderts a. d Gebiete d. mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. I. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Heft XVI, 1. [XXXVI u. 416 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M* 14.—, geb. n. *M* 15.—

Zeuthen, G. H., Professor an der Universität Kopenhagen, Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert. Deutsch von Raphael Meyer. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XVII. Heft. [VIII u. 434 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M* 16.—

EINLADUNG ZUM
III. INTERNATIONALEN MATHEMATIKER-KONGRESZ
VOM 8.–13. AUGUST 1904 IN HEIDELBERG.

Der Ausschuß für die Vorbereitung des III. internationalen Mathematiker-Kongresses:

A. Brill-Tübingen. M. Cantor-Heidelberg. M. Distell-Straßburg. W. v. Dyck-München. A. Gutzmer-Jena. G. Hauck-Berlin. D. Hilbert-Göttingen. F. Klein-Göttingen. A. Kneser-Berlin. L. Königsberger-Heidelberg. A. Krazer-Karlsruhe. J. Lüroth-Freiburg. R. Mehmke-Stuttgart. F. Meyer-Königsberg. C. Runge-Hannover. H. Schubert-Hamburg. F. Schur-Karlsruhe. H. A. Schwarz-Berlin. P. Stäckel-Kiel. J. P. Treutlein-Karlsruhe. H. Weber-Straßburg.

Wegen Programm-Zusendung bittet man sich zu wenden an
Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe i. B., Westendstraße 57.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1859—1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

HERAUSGEGEBEN

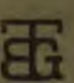
VON

R. MEHMKE IN STUTTGART. UND **C. RUNGE** IN HANNOVER.

50. BAND. 4. HEFT.

MIT 5 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 31. Mai 1904.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1904.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASZE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Hannover-Kirchrode, Kaiser Wilhelmstr. 9, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

M. Baroni, A. Börsch, G. Bohlmann, M. Disteli, K. Doehlemann, E. Hintzschel, G. Hamel, L. Henneberg, K. Heun, J. Horn, A. Kneser, L. Krüger, F. Ludwig, R. Mehmke, R. v. Mises, O. Mohr, E. Müller, † J. Petzval, R. Rothe, C. Runge, G. Scheffers, Fr. Schilling, J. Schnöckel, A. Sommerfeld, P. Stäckel, S. Trezewitsch, P. Werkmeister, C. W. Wirtz, E. Wölffing.

Theorie der Störungen der Stützlinien.

Von † Josef Petzval.

(Schluß.)

III.

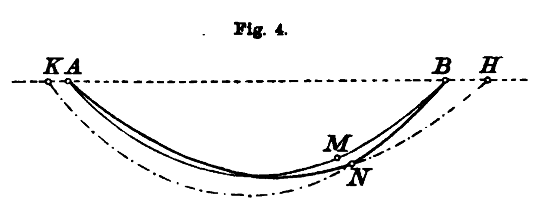
Störungen der Kettenlinie nach der Methode der Variation der Konstanten.

Wie im Abschnitte I dargetan wurde, beschreibt ein biegsamer Faden von durchaus gleichem Gewichte m der Einheit seiner Länge unter dem alleinigen Einflusse dieses Gewichtes eine stetige krumme Linie, der eine einzige Koordinatengleichung entspricht, die Kettenlinie nämlich, welche mithin als die, einem jeden solchen zwischen irgend zwei Punkten ausgespannten Faden eigentümliche Gleichgewichtsposition zu betrachten ist. Treten zu diesem Gewichte noch andere Kräfte hinzu, so ändert sich im allgemeinen die Position des Gleichgewichtes. Namentlich tritt eine solche Änderung in dem besonderen Falle ein, der hier zur Sprache gebracht werden soll, wo nämlich ein einziger Punkt des Fadens mit einem Gewichte Q belastet wird, welches wir als mit dem Gewichte m der Längeneinheit kommensurabel, etwa als ein Vielfaches von m, dagegen jedoch als gegen die innere Spannung λ klein annehmen wollen.

Hierdurch werden auch alle durch die neue Belastung im Systeme hervorgebrachten Veränderungen entsprechend klein, und man erreicht den Vorteil, die höheren Potenzen derselben außer acht lassen zu dürfen.

Diese Veränderungen bestehen nun insoweit, als sie ohne Mithilfe einer gründlicheren Analysis angegeben werden können, in folgendem: Der mit dem Gewichte Q belastete Punkt M, Fig. 4, des biegsamen Fadens gibt dem Drucke nach, verändert seinen Ort und rückt nach N. Hierdurch werden auch alle übrigen Punkte gezwungen ihren Ort zu verändern, hiermit ändert aber die ganze Kurve ihre Gestalt und geht in zwei durch den Punkt N in unstetiger Weise sichtlich von einander geschiedene Bögen AN und NB über, die in N unter einem endlichen Winkel zusammenstoßen.

Fig. 4.



Ist das neue Gleichgewicht hergestellt, so kann man allenfalls den Punkt N festmachen und von der besonderen Belastung Q ganz abstrahieren; dann aber liegt offenbar nichts anderes vor, als ein biegsamer Faden unter dem alleinigen Einflusse seines Gewichtes, der mithin auch keine andere Gestalt haben kann, als die einer Kettenlinie. Also die Bögen AN und NB sind Bögen von Kettenlinien, jedoch von solchen, die sowohl unter sich, als auch von der ursprünglich ungestörten verschieden sind.

Man kann sie sich auch über den Punkt N hinaus fortgesetzt denken, z. B. bis zum Durchschnitte mit der Linie AB, und wird dann 3 von dieser Linie begrenzte Kettenlinien vor Augen haben, die ungestörte Kurve AMB, dann die beiden gestörten ANH und BNK, von welch letzteren jede in zwei Teile, einen wirklich vorhandenen und einen bloß fiktiven zerfällt; so ist AN wirklich, NH fiktiv, dagegen BN wirklich vorhanden und NK bloß fiktiv.

Die Gleichung der ungestörten Kettenlinie AMB denken wir uns nun gefunden in der allereinfachsten Gestalt (7) im Abschnitte I, nämlich

$$z = \frac{h}{2}\left[e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right]$$

lassen aber nicht außer acht, daß diese Gestalt auf der gemachten Voraussetzung beruht, daß der Anfangspunkt der Koordinaten unter dem tiefsten Punkte der Kurve in der vertikalen Entfernung h angenommen werde. Die Gleichungen der beiden gestörten Kurven ANH und BNK können nun aufgezeichnet werden in derselben Gestalt, nämlich

$$z_1 = \frac{h_1}{2}\left[e^{\frac{x_1}{h_1}} + e^{-\frac{x_1}{h_1}}\right] \tag{46}$$

und

$$z_2 = \frac{h_2}{2}\left[e^{\frac{x_2}{h_2}} + e^{-\frac{x_2}{h_2}}\right]. \tag{47}$$

Nur wird auch hier nicht zu vergessen sein, daß der Anfangspunkt der Koordinaten $x_1 z_1$ unter den tiefsten Punkt der Kurve ANH in der Entfernung h_1, der Anfangspunkt der Koordinaten $x_2 z_2$ hingegen unter den tiefsten Punkt der Kurve BNK in die Entfernung h_2 falle.

Es sind also xz, $x_1 z_1$, $x_2 z_2$ verschiedene Koordinatensysteme, welche auf verschiedene Anfangspunkte $O\,O'\,O''$ Bezug nehmen. Um dieselben auf den Anfangspunkt O zurückzuführen, nennen wir die Koordinaten von O' in bezug auf O als Anfangspunkt a und b, die von O'' ebenso a' und b', endlich die laufenden Koordinaten der Kurve ANH x und z_1', die der Kurve BNK x und z_2', so ergeben sich die Transformationsgleichungen:

$$x_1 = x - a, \quad x_2 = x - a', \quad z_1 = z_1' - b, \quad z_2 = z_2' - b'. \tag{48}$$

Statuieren wir nebstdem noch

$$(49)\qquad h_1 = h + \chi,\quad h_2 = h + \chi',\quad z_1' = z + \zeta,\quad z_2' = z + \zeta',$$

so sind $aa'bb'\chi\chi'\zeta\zeta'$ als Störungen der Elemente der Kettenlinie anzusehen und in Funktion der störenden Kraft Q darzustellen, wobei man sich erlauben darf, sie alle als kleine Größen der ersten Ordnung zu behandeln.

Die Gleichungen (46) und (47) mit den (48) und (49) verbindend erhält man

$$(50)\qquad \begin{cases} z_1 = z_1' - b = z + \zeta - b = \dfrac{h+\chi}{2}\left[e^{\frac{x-a}{h+\chi}} + e^{-\frac{x-a}{h+\chi}}\right] \\ z_2 = z_2' - b' = z + \zeta' - b' = \dfrac{h+\chi'}{2}\left[e^{\frac{x-a'}{h+\chi'}} + e^{-\frac{x-a'}{h+\chi'}}\right]. \end{cases}$$

Da hier vorausgesetztermaßen aa', $\chi\chi'$, $\zeta\zeta'$ sehr kleine Zusätze zu x, h und z sind, so gibt die Entwickelung in Reihen mit Rücksicht auf (6) und (9)

$$(51)\qquad \zeta = b - \frac{dz}{dx}a + \frac{dz}{dh}\chi = b - \frac{s}{h}a + \left(\frac{z}{h} - \frac{sx}{h^2}\right)\chi$$

$$(52)\qquad \zeta' = b' - \frac{dz}{dx}a' + \frac{dz}{dh}\chi' = b' - \frac{s}{h}a' + \left(\frac{z}{h} - \frac{sx}{h^2}\right)\chi'.$$

Jetzt schreiten wir zur Auflösung der Bedingungen, denen die mit $aa'bb'\chi\chi'$ bezeichneten Variationen der in der Gleichung der Kettenlinie vorkommenden konstanten Parameter — denn als solche kann man sie auffassen — Genüge leisten müssen.

Solcher Bedingungen existieren zwei Arten, nämlich 1. allgemeine, die bei jedem derartigen Störungsprobleme unabänderlich vorhanden sind, in derselben Fassung und ihrer Wesenheit nach bei keinem derselben fehlen dürfen, 2. zufällige, die bei einem und demselben eine bestimmte Stützlinie angehenden Problem noch in sehr mannigfaltiger Fassung zu erscheinen vermögen.

Sie sprechen entweder von den Grenzpunkten A und B der Kurve, ihren Ort mehr oder weniger bestimmend. Es ist bisher stillschweigend angenommen worden, daß dieselben, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, fest gemacht seien. Allein man kann auch anders über diese Grenzpunkte verfügen; man kann sie zwingen auf einer gegebenen krummen Linie zu bleiben, man kann sie aber auch nur durch Kräfte von gegebener Größe und Richtung festhalten. Oder diese Bedingungen sprechen von der Länge eines Kurvenstückes, z. B. AM oder MB, und erklären diese Länge entweder als unveränderlich oder auch als veränderlich nach einem bestimmten Gesetze.

Endlich kann die in Betracht gezogene Stützlinie auch gar nicht durch einen biegsamen Faden respräsentiert sein, und nur eine fiktive im Inneren eines elastischen Körpers gezogene Linie darstellen, den

geometrischen Ort der Anfangspunkte der inneren Spannungen andeutend. In diesem Falle aber sprechen die Bedingungen gewöhnlich gar nicht von der Stützlinie, sondern von gewissen Zuständen des elastischen Körpers selbst, teils im Innern, teils an den denselben begrenzenden Flächen.

Der allgemeinen Bedingungen, die ein jedes derartige Störungsproblem unveränderlich und unabweisbar begleiten, sind im Grunde nur zwei, nämlich: 1. Der besonders belastete Punkt N ist ein den beiden Bögen AN und NB, in welche die ursprüngliche, ungestörte Stützlinie zerfällt, gemeinschaftlicher; 2. In diesem gemeinschaftlichen Punkte stellen die Spannungen in den zwei in N an einander angrenzenden Stücken der gestörten Kurve und die besondere Belastung Q drei Kräfte dar, die sich an eben diesem Punkte im Gleichgewichte befinden müssen. Diesen allgemeinen Bedingungen muß man vor allem gerecht zu werden suchen, sie in die Sprache der Analysis übertragend.

Die beiden Kurven, die den gemeinschaftlichen Punkt N besitzen, sind aber gerade diejenigen, welchen die Gleichungen (46) und (47) angehören, und die Bedingung der Gemeinschaftlichkeit eines Punktes wird durch die Gleichung $z_1' = z_2'$, oder was dasselbe ist, durch $\zeta = \zeta'$ ausgedrückt. Sie hat nur stattzufinden für denjenigen Wert von x, der dem gemeinschaftlichen Punkte N angehört und den wir mit $\mathfrak{x}$ bezeichnen wollen.

Die diesen $\mathfrak{x}$ entsprechenden Werte von z und s mögen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{s}$ heißen; so ergibt sich aus $\zeta' - \zeta = 0$ mit Rücksicht auf die (51) und (52).

$$(53) \qquad b' - b - \frac{\mathfrak{s}}{h}(a' - a) + \frac{\mathfrak{z}}{h} - \frac{\mathfrak{s}\mathfrak{x}}{h^2}(\chi' - \chi) = 0.$$

Der Klarheit der Anschauung wegen frommt es zu bemerken, daß der Punkt, auf welchen die Koordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ Bezug haben, der Punkt P sei, in der ungestörten Kurve vertikal über N gelegen, der Bogen $\mathfrak{s}$ aber ist der CP derselben krummen Linie.

Die zweite der allgemeinen Bedingungen, daß nämlich die oben erwähnten drei Kräfte am gemeinschaftlichen Punkte N einander das Gleichgewicht halten müssen, wird durch zwei Gleichungen ausgedrückt, welche besagen, daß die Summe der horizontalen Komponenten dieser Kräfte für sich, die der vertikalen ebenfalls für sich Null geben müsse. Heißt nun die Spannung, welche in der ungestörten Kurve den Namen λ trägt, in der einen Hälfte der gestörten AN λ_1, in der anderen NB hingegen λ_2, so sind die horizontalen Komponenten dieser Spannungen beziehentlich $-\lambda_1 \frac{dx_1}{ds_1}$ und $\lambda_2 \frac{dx_2}{ds_2}$, die vertikalen hingegen $-\lambda_1 \frac{dz_1}{ds_1}$ und $\lambda_2 \frac{dz_2}{ds_2}$, wozu noch $-Q$ als ebenfalls vertikale Kraft kommt.

Die gesuchten zwei Gleichungen sind also

$$\lambda_2 \frac{dx_2}{ds_2} - \lambda_1 \frac{dx_1}{ds_1} = 0 \text{ und } \lambda_2 \frac{dz_2}{ds_2} - \lambda_1 \frac{dz_1}{ds_1} = Q. \tag{54}$$

Hier sind zunächst die Werte von λ_1 und λ_2 und dann die von $\frac{ds_1}{dx_1}$, $\frac{ds_2}{dx_2}$, $\frac{ds_1}{dz_1}$, $\frac{ds_2}{dz_2}$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke mag zunächst bemerkt werden, daß die mit dem Gewichte m multiplizierte Ordinate z die Spannung gebe unter der Voraussetzung, daß vermöge schicklich gewählten Koordinatenanfangspunktes die Form der Gleichung der Kettenlinie die einfachste (7) ist. Allein die Gleichungen (46) und (47) besitzen eben diese einfachste Form; es ist mithin $\lambda_1 = mz_1$ und $\lambda_2 = mz_2$.

Mit Berücksichtigung der Annahmen (48) ergibt sich nun:

$$\lambda_1 = mz_1 = m(z + \zeta - b) = \lambda + m\chi\left(\frac{z}{h} - \frac{sx}{h^2}\right) - \frac{ms}{h} a \tag{55}$$

$$\lambda_2 = mz_2 = m(z + \zeta' - b') = \lambda + m\chi'\left(\frac{z}{h} - \frac{sx}{h^2}\right) - \frac{ms}{h} a'. \tag{56}$$

Überdies erhält man, die Gleichungen (46) und (47) differenzierend:

$$\frac{dz_1}{dx_1} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x_1}{h_1}} - e^{-\frac{x_1}{h_1}}\right] = \frac{s_1}{h_1} \tag{57}$$

$$\frac{dz_2}{dx_2} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x_2}{h_2}} - e^{-\frac{x_2}{h_2}}\right] = \frac{s_2}{h_2}, \tag{58}$$

hieraus aber durch nochmaliges Differenzieren:

$$\frac{ds_1}{dx_1} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x_1}{h_1}} + e^{-\frac{x_1}{h_1}}\right] = \frac{z_1}{h_1} = \frac{z + \zeta - b}{h + \chi} \tag{59}$$

$$\frac{ds_2}{dx_2} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x_2}{h_2}} + e^{-\frac{x_2}{h_2}}\right] = \frac{z_2}{h_2} = \frac{z + \zeta' - b'}{h + \chi'}. \tag{60}$$

Dieselben Annahmen (49) führen zu folgenden Werten von s_1 und s_2

$$s_1 = \frac{h + \chi}{2}\left[e^{\frac{x-a}{h+\chi}} - e^{-\frac{x-a}{h+\chi}}\right] = s - \frac{ds}{dx} a + \frac{ds}{dh}\chi \tag{61}$$

$$s_2 = \frac{h + \chi'}{2}\left[e^{\frac{x-a'}{h+\chi'}} - e^{-\frac{x-a'}{h+\chi'}}\right] = s - \frac{ds}{dx} a' + \frac{ds}{dh}\chi', \tag{62}$$

oder weil $\frac{ds}{dx} = \frac{z}{h}$, $\frac{ds}{dh} = \frac{s}{h} - \frac{xz}{h}$ ist:

$$s_1 = s - \frac{z}{h} a + \left(\frac{s}{h} - \frac{xz}{h^2}\right)\chi \tag{63}$$

$$s_2 = s - \frac{z}{h} a' + \left(\frac{s}{h} - \frac{xz}{h^2}\right)\chi^1. \tag{64}$$

Aus den Gleichungen (59) und (60) zieht man, die Werte von $\zeta - b$ und $\zeta' - b$ den (51) und (52) entnehmend:

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \frac{h+\chi}{z+\zeta-b} = \frac{h}{z} + \frac{\chi}{z} - \frac{h(\zeta-b)}{z^2} = \frac{h}{z} + \frac{s}{z^3}a + \frac{sx}{hz^3}\chi \tag{65}$$

$$\frac{dx_2}{ds_2} = \frac{h+\chi'}{z+\zeta'-b'} = \frac{h}{z} + \frac{s}{z^3}a' + \frac{sx}{hz^3}\chi'. \tag{66}$$

Durch Multiplikation der Gleichungen (57) und (65) unter Berücksichtigung der (63) und der einfachen Gleichung

$$z^2 = s^2 + h^2$$

erhält man

$$\frac{dz_1}{ds_1} = \frac{s}{z} - \frac{h}{z^3}a - \frac{x}{z^3}\chi. \tag{67}$$

Ebenso durch Multiplikation von (58) und (66) mit Rücksicht auf (64):

$$\frac{dz_2}{ds_2} = \frac{s}{z} - \frac{h}{z^3}a' - \frac{x}{z^3}\chi'. \tag{68}$$

Hieraus lassen sich endlich die Komponenten der Spannung λ_1 und λ_2 zusammenfügen:

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda_2\frac{dx_2}{ds_2} = m(h+\chi'), \qquad \lambda_2\frac{dz_2}{ds_2} = ms - \frac{mz}{h}a' + m\chi'\left(\frac{s}{h} - \frac{xz}{h^3}\right) \\ &\lambda_1\frac{dx_1}{ds_1} = m(h+\chi), \qquad \lambda_1\frac{dz_1}{ds_1} = ms - \frac{mz}{h}a + m\chi\left(\frac{s}{h} - \frac{xz}{h^3}\right), \end{aligned}\right. \tag{69}$$

und verwandeln die Gleichgewichtsgleichungen, die, wie schon gesagt, nur für den Punkt N, also für $x = \mathfrak{x}$, $z = \mathfrak{z}$, $s = \mathfrak{s}$ zu bestehen haben, in

$$\chi' - \chi = 0, \tag{70}$$

$$\frac{m\mathfrak{z}}{h}(a-a') - m(\chi-\chi')\left(\frac{\mathfrak{s}}{h} - \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}{h^3}\right) = Q. \tag{71}$$

Diesen Gleichungen in Verbindung mit der (53) entnimmt man leicht die Werte der Differenzen $\chi - \chi'$, $a - a'$, $b - b'$, nämlich:

$$\chi - \chi' = 0, \qquad a - a' = \frac{Qh}{m\mathfrak{z}}, \qquad b - b' = \frac{Q\mathfrak{s}}{m\mathfrak{z}}, \tag{72}$$

wozu noch die durch Subtraktion der Gleichungen (51) und (52) und Substitution der Werte (72) gewonnene kommt:

$$\zeta' - \zeta = \frac{Q(s-\mathfrak{s})}{m\mathfrak{z}}. \tag{73}$$

Die allgemeinen Bedingungen wären hiermit vollständig ausgenützt, und die Resultate derselben können kaum einfacher gedacht werden, was ein dieser Störungstheorie eigentümlicher, nicht zu unterschätzender Vorteil ist.

Sie nehmen teil an der Allgemeinheit der Bedingungen, aus welchen sie hervorgegangen, und von welchen sie der mathematische Ausdruck sind, stehen mithin ebenso unabänderlich fest und müssen erfüllt sein bei jedem derartigen, die Kettenlinie angehenden Störungsproblem, was auch immer die übrigen Bedingungen sein mögen, welchen die Variationen $aa'bb'\chi\chi'$ noch Genüge leisten müssen.

Selbstverständlich kommt dieselbe Allgemeinheit auch allen Folgerungen zu, die sich aus den Gleichungen (72) und (73) ziehen lassen, nämlich:

1. Da vermöge der Gleichung (70) $\chi' = \chi$ ist, so hat man auch $h + \chi' = h + \chi$, das heißt $h_2 = h_1$. Infolgedessen aber werden die beiden Gleichungen der gestörten Kurve (46) und (47) einander kongruent, nicht nur der Form nach, sondern auch rücksichtlich der Werte der darin vorkommenden konstanten Parameter h_1 und h_2. Hieraus folgt, daß die gestörte Doppelkurve aus zwei Individuen zusammengesetzt sei, die einerlei Krümmungshalbmesser $h_1 = h_2$ in ihren Scheiteln besitzen, mithin überhaupt identisch dieselben sind, nur um den Abstand ihrer Koordinatenanfangspunkte $O'O''$ gegeneinander verschoben. Sollen sie also graphisch konstruiert werden, so kann dies gleichzeitig geschehen mit denselben Abmessungen.

2. Einem jeden Werte von x entsprechen zwei Punkte der gestörten Doppelkurve, wovon nur $x = \mathfrak{x}$ eine Ausnahme macht. Ziehen wir zu jedem derselben eine berührende Gerade und nennen die Winkel, welche diese beiden mit der Achse der x einschließen, φ_1 und φ_2, so daß der zwischen diesen Geraden eingeschlossene Winkel $\varphi_2 - \varphi_1$ ist, so hat man bekanntlich

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{dz_1'}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{d\zeta}{dx} = \frac{s}{h} - \frac{z}{h^2}\left(a - \frac{x}{h}\chi\right),$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{dz_2'}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{d\zeta'}{dx} = \frac{s}{h} - \frac{z}{h^2}\left(a' - \frac{x}{h}\chi'\right).$$

Hieraus zieht man mit Hilfe einer bekannten trigonometrischen Formel nach Weglassung der Glieder höherer Ordnung

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{z(a - a')}{s^2 + h^2} = \frac{a - a'}{z} = \frac{Qh}{mz\mathfrak{z}}. \tag{74}$$

Ist speziell von dem mit dem Gewichte Q belasteten Punkte die Rede, für welchen $x = \mathfrak{x}$, $z = \mathfrak{z}$ besteht, so wird

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{Qh}{m\mathfrak{z}^2} = \frac{Q}{m\mathfrak{r}}. \tag{75}$$

Hier bedeutet $\mathfrak{r}$ den zum vorzugsweise belasteten Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{z}$ der ungestörten Kurve zugehörigen Krümmungshalbmesser, welcher vermöge der Gleichung (11) $\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{z}^2}{h}$ ist.

Man zieht hieraus den Schluß, daß durch die besondere Belastung Q eines einzelnen Punktes die Kettenlinie in zwei Kettenbögen zerfällt, die in dem so belasteten gemeinschaftlichen Punkte unter einem endlichen Winkel $\varphi_2 - \varphi_1$ zusammenstoßen, der mit der Belastung Q derselben Größenordnung angehört und zudem dem Krümmungshalbmesser umgekehrt proportional ist. Dieser Winkel ist auf graphischem Wege zu erzeugen durch die Konstruktion eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete der Krümmungshalbmesser $\mathfrak{r}$, die andere aber die Länge eines Kettenstückes ist, welches eben das Gewicht Q hat. Der diesem letzteren entgegengesetzte Winkel ist $\varphi_2 - \varphi_1$.

Nach Erledigung der allgemeinen Bedingungen und der aus ihnen gezogenen vornehmsten Folgerungen gehen wir über zu den zufälligen und heben aus der großen Mannigfaltigkeit derselben nur die folgenden, sich zunächst darbietenden heraus.

1. Die Punkte A und B sind feste Grenzpunkte der Kettenlinie in einer und derselben horizontalen Linie gelegen, und namentlich entsprechen dem Punkte A die charakteristischen Daten: $x = -X$, $z = Z$, $s = -S$ und $\zeta = 0$, dem Punkte B hingegen die Bestimmungsgrößen $x = X$, $z = Z$, $s = S$ und abermals $\zeta' = 0$.

2. Der Bogen AN der gestörten Kurve ist gleich dem Bogen AM der ursprünglichen Kettenlinie, aus welchem er hervorgegangen ist, und ebenso ist $MB = NB$. Dieser Annahme liegt nicht notwendig die Voraussetzung zugrunde, daß die Kette vollkommen unausdehnbar sei, sondern nur, daß die Ausdehnung, wenn überhaupt eine vorhanden ist, so gering sei, daß sie nur als eine Störungsursache zweiter Ordnung aufgefaßt werden kann im Vergleiche mit der störenden Belastung Q. Mit anderen Worten: Die Belastung Q bewirkt zwar auch unter anderen eine Verlängerung, diese ist aber so unbedeutend, daß sie an den übrigen Wirkungen dieses Q nichts Merkliches ändert.

Es sind also vier Bedingungen dargestellt durch eben so viele Gleichungen, welchen noch Genüge geleistet werden muß, und um deren Aufstellung es sich zunächst handelt. Die beiden ersten von ihnen sind ohne Mühe aus den Gleichungen (51) und (52) abzuleiten, indem man in der ersten von ihnen x, z, s, ζ beziehentlich durch $-X$, Z, $-S$ und 0 ersetzt, in der zweiten aber anstatt x, z, s, ζ' beziehentlich X, Z, S und 0 substituiert. Man erhält so folgende Gleichungen, mit Rücksicht auf $\chi' = \chi$:

$$b + \frac{S}{h} a + \left(\frac{Z}{h} - \frac{SX}{h^2}\right)\chi = 0,$$

$$b' - \frac{S}{h} a' + \left(\frac{Z}{h} - \frac{SX}{h^2}\right)\chi = 0.$$

Diese geben aber addiert und auch abgezogen von einander

$$b + b' + \frac{S}{h}(a - a') + 2\chi\left(\frac{Z}{h} - \frac{SX}{h^2}\right) = 0,$$

$$b - b' + \frac{S}{h}(a + a') = 0,$$

oder vermöge der bereits ermittelten Werte von $a - a'$ und $b - b'$ (72)

$$a + a' = -\frac{hQ\mathfrak{s}}{m\mathfrak{z}S}.$$

$$b + b' = -\frac{QS}{m\mathfrak{z}} - 2\chi\left(\frac{Z}{h} - \frac{SX}{h^2}\right).$$

Endlich aus diesen und den vorangegangenen auf demselben Wege der Addition und Subtraktion

$$a = \frac{hQ(S - \mathfrak{s})}{2m\mathfrak{z}S}, \tag{76}$$

$$a' = -\frac{hQ(S + \mathfrak{s})}{2m\mathfrak{z}S}, \tag{77}$$

$$b = -\frac{Q(S - \mathfrak{s})}{2m\mathfrak{z}} - \chi\left(\frac{Z}{h} - \frac{SX}{h^2}\right), \tag{78}$$

$$b' = -\frac{Q(S + \mathfrak{s})}{2m\mathfrak{z}} - \chi\left(\frac{Z}{h} - \frac{SX}{h^2}\right). \tag{79}$$

Hiermit wären alle Variationen bis auf eine einzige, die χ nämlich, bestimmt, welch letztere aus der bisher noch nicht in Rechnung gesetzten Bedingung hervorgerufen wird, daß die gestörte Kurve in jedem ihrer zwei Teile ihre ursprüngliche Länge durch die Last Q nicht wesentlich geändert habe. Es wäre also nur noch durch eine Gleichung auszudrücken, daß in Fig. 4 $AM + MB = AN + NB$ geblieben sei.

Zu diesem Zwecke fangen wir von dem Bogen AM an. Er besteht aus zwei Teilen, deren erster von A bis zum Scheitel C der Kurve reicht. Dieser hat vorausgesetztermaßen die Länge S, gegeben durch die Gleichung (61), d. h.

$$= S = \frac{h}{2}\left[e^{\frac{X}{h}} - e^{\frac{-X}{h}}\right].$$

Der zweite Teil des Bogens AM reicht vom Scheitel C bis zum Punkte M. Nehmen wir an, daß diesem letzteren $x = \mathfrak{x} - \xi''$ entspreche zum Unterschiede vom Punkte N, welchem wir die Abszisse $x = \mathfrak{x}$ zuteilen, so ist wieder vermöge der Gleichung (61)

$$CM = \frac{h}{2}\left[e^{\frac{\mathfrak{x}-\xi''}{h}} - e^{-\frac{\mathfrak{x}-\xi''}{h}}\right] = \frac{h}{2}\left[e^{\frac{\mathfrak{x}}{h}} - e^{-\frac{\mathfrak{x}}{h}}\right] - \frac{\xi''}{2}\left[e^{\frac{\mathfrak{x}}{h}} + e^{-\frac{\mathfrak{x}}{h}}\right] = \mathfrak{s} - \frac{\mathfrak{z}}{h}\xi''. \tag{80}$$

Hiermit ist die Länge des Bogens AM gegeben, nämlich

$$AM = S + \mathfrak{s} - \frac{\mathfrak{z}}{h}\xi''. \tag{81}$$

Auf dieselbe Weise aber erhält man auch die Länge des Bogens MB. Sie ist

$$MB = S - \mathfrak{s} + \frac{\mathfrak{z}}{h}\mathfrak{x}''. \tag{82}$$

Suchen wir jetzt Ausdrücke für die Längen der Bestandteile der gestörten Kurve. Der Bogen AN derselben besteht aus zwei Teilen, der erste reicht vom Punkte A bis zum Scheitel, dessen Abstand vom Punkte A in der Richtung der Achse der x gemessen $X + a$ ist; die absolute Länge dieses Teiles ist daher

$$\begin{aligned}\frac{h_1}{2}\left[e^{\frac{X+a}{h_1}} - e^{-\frac{X+a}{h_1}}\right] = \frac{h}{2}\left[e^{\frac{X}{h}} - e^{-\frac{X}{h}}\right] + \frac{a}{2}\left[e^{\frac{X}{h}} + e^{-\frac{X}{h}}\right] + \frac{\chi}{2}\left[e^{\frac{X}{h}} - e^{-\frac{X}{h}}\right] \\ - \frac{\chi X}{2h}\left[e^{\frac{X}{h}} + e^{-\frac{X}{h}}\right] = S + \frac{aZ}{h} + \chi\left(\frac{S}{h} - \frac{XZ}{h^2}\right).\end{aligned} \tag{83}$$

Der zweite Teil von AN reicht vom Scheitel bis zum Punkte N; der in der Richtung der Achse der x gemessene Abstand dieser zwei Punkte ist $\mathfrak{x} - a$, also ist die Länge des Kurvenstückes

$$\begin{aligned}\frac{h_1}{2}\left[e^{\frac{\mathfrak{x}-a}{h_1}} - e^{-\frac{\mathfrak{x}-a}{h_1}}\right] = \frac{h}{2}\left[e^{\frac{\mathfrak{x}}{h}} - e^{-\frac{\mathfrak{x}}{h}}\right] - \frac{a}{2}\left[e^{\frac{\mathfrak{x}}{h}} + e^{-\frac{\mathfrak{x}}{h}}\right] + \frac{\chi}{2}\left[e^{\frac{\mathfrak{x}}{h}} - e^{-\frac{\mathfrak{x}}{h}}\right] \\ - \frac{\chi\mathfrak{x}}{2h}\left[e^{\frac{\mathfrak{x}}{h}} + e^{-\frac{\mathfrak{x}}{h}}\right] = \mathfrak{s} - \frac{\mathfrak{z}}{h}a + \chi\left(\frac{\mathfrak{s}}{h} - \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}{h^2}\right).\end{aligned} \tag{84}$$

Diese zwei Ausdrücke geben addiert die Totallänge der Kurve AN, welche der ursprünglichen Länge AM gleich sein soll. Man hat also

$$S + \mathfrak{s} - \frac{\mathfrak{z}}{h}\mathfrak{x}'' = S + \mathfrak{s} + \frac{Z - \mathfrak{z}}{h}a + \chi\left(\frac{S + \mathfrak{s}}{h} - \frac{XZ + \mathfrak{x}\mathfrak{z}}{h^2}\right).$$

Und ebenso die Länge NB bestimmend und der MB gleichstellend

$$S - \mathfrak{s} + \frac{\mathfrak{z}}{h}\mathfrak{x}'' = S - \mathfrak{s} - \frac{Z - \mathfrak{z}}{h}a' + \chi\left(\frac{S - \mathfrak{s}}{h} - \frac{XZ - \mathfrak{x}\mathfrak{z}}{h^2}\right).$$

Diese beiden Gleichungen abkürzend, addierend und auf den bekannten Wert von $a - a'$ in (72) Rücksicht nehmend, erhalten wir

$$\chi = \chi' = \frac{h^2 Q(Z - \mathfrak{z})}{2m\mathfrak{z}(XZ - hS)}. \tag{85}$$

Woraus sich schließlich die Werte von b und b' ergeben

$$b = -\frac{Q(S - \mathfrak{s})}{2m\mathfrak{z}} - \frac{Q(Z - \mathfrak{z})(hZ - SX)}{2m\mathfrak{z}(XZ - hS)},$$

$$b' = -\frac{Q(S + \mathfrak{s})}{2m\mathfrak{z}} - \frac{Q(Z - \mathfrak{z})(hZ - SX)}{2m\mathfrak{z}(XZ - hS)}.$$

Die horizontale Verschiebung, die der Punkt M durch die besondere Belastung Q erleidet, ist

$$\xi'' = \frac{hQ(Z-\mathfrak{z})}{2m\mathfrak{z}^2}\left[\frac{S+\mathfrak{s}}{S} + \frac{(S-\mathfrak{s})h}{XZ-hS} - \frac{XZ-\mathfrak{x}\mathfrak{z}}{XZ-hS}\right],$$

oder auch

$$(86) \qquad \xi'' = \frac{hQ(Z-\mathfrak{z})}{2m\mathfrak{z}^2}\left[\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{z}-h\mathfrak{s}}{XZ-hS} + \frac{\mathfrak{s}}{S}\right].$$

Substituiert man die erhaltenen definitiven Werte von $ab\xi$ in die Gleichung (51), desgleichen die Werte von a', b', $\chi' = \chi$ in die Gleichung (52), so ergeben sich die Abstände ζ und ζ' der gestörten Doppelkurve von der ursprünglichen Kettenlinie

$$(87) \begin{cases} \zeta = \frac{Q}{2m\mathfrak{z}}\left[\frac{Z-\mathfrak{z}}{XZ-hS}[-h(Z-z)-sx+SX] - \left(1+\frac{s}{S}\right)(S-\mathfrak{s})\right], \\ \zeta' = \frac{Q}{2m\mathfrak{z}}\left[\frac{Z-\mathfrak{z}}{XZ-hS}[-h(Z-z)-sx+SX] - \left(1-\frac{s}{S}\right)(S+\mathfrak{s})\right]. \end{cases}$$

Im Punkte N, in welchem $x = \mathfrak{x}$, $z = \mathfrak{z}$, $s = \mathfrak{s}$ besteht, fallen die Werte von ζ und ζ', so wie dies auch sein muß, in einen einzigen, welcher ζ'' heißen mag, zusammen, dieser ist:

$$\zeta'' = \frac{Q}{2m\mathfrak{z}}\left[\frac{Z-\mathfrak{z}}{XZ-hS}[-h(Z-\mathfrak{z})-\mathfrak{s}\mathfrak{x}+SX] - \frac{(S^2-\mathfrak{s}^2)}{S}\right].$$

Diese Formel gestattet eine kleine Abkürzung, wenn man sich erinnert, daß $S^2 = Z^2 - h^2$, $\mathfrak{s}^2 = \mathfrak{z}^2 - h^2$, mithin

$$S^2 - \mathfrak{s}^2 = Z^2 - \mathfrak{z}^2$$

ist; sie wird nämlich:

$$(88) \qquad \zeta'' = -\frac{Q(Z-\mathfrak{z})}{2m\mathfrak{z}}\,\frac{(h^2+Z\mathfrak{z})X + (\mathfrak{s}\mathfrak{x}-2h\mathfrak{z})S}{S[XZ-hS]}.$$

In bezug auf dieses ζ'' kommt zu bemerken, daß es nicht die Bedeutung habe, die dem ξ'' zukommt. Es ist nämlich ξ'' die Verschiebung, die der Punkt M in der horizontalen Achse der x durch die Belastung Q erleidet, mithin eine wirkliche Störung der Position dieses Punktes M. Mit anderen Worten, ξ'' ist in der Tat der Unterschied der Koordinaten x der zwei Punkte M und N. Dagegen steht ζ'' zwar auch in einiger Beziehung zum Punkte M, ist aber keine wirkliche Verschiebung desselben in der vertikalen Richtung, also auch keine eigentliche Positionsstörung; denn dieses ζ'' ist nicht der Unterschied der Koordinaten z der zwei Punkte N und M, sondern der der zwei Punkte N und P, was natürlich nicht dasselbe ist, indem zwischen den Koordinaten z der Punkte M und P bereits ein Unterschied obwaltet. Wenn nämlich z die Koordinate von P ist, so ist die gleichnamige Koordinate eines

Punktes M, der sich im horizontalen Abstande ξ von P befindet, $z - \frac{dz}{dx}\xi = z - \frac{s\xi}{h}$.

Da nun hier speziell $x = \mathfrak{x}$, $z = \mathfrak{z}$, $s = \mathfrak{s}$, $\xi = \xi''$ besteht, so liegt P um $\frac{\mathfrak{s}\xi''}{h}$ über M. Mithin hat der Punkt M, indem er durch die Belastung Q genötigt worden nach N zu rücken, seine Koordinaten z nicht geändert um ζ'', sondern nur um $\eta'' = \zeta'' - \frac{\mathfrak{s}\xi''}{h}$. Dieses η'' ist also die eigentliche Positionsstörung, während ζ'', so wie überhaupt ζ und ζ' mehr die Bedeutung einer Störung der Gestalt der Kurve besitzen.

Da die Kettenlinie in ihren meisten Anwendungen als sehr flache Kurve vorkommt, wenig von der im Scheitel berührenden Parabel unterschieden, und der Bruch $\frac{x}{h}$ im ganzen Bereiche derselben klein ist, so wird man die in ihrer Gleichung erscheinenden Exponentialgrößen in sehr konvergierende Reihen verwandeln können, von welchen nur die Anfangsglieder beibehalten, zu sehr angenäherten Werten sämtlicher Störungen führen werden, die voraussichtlich eine möglichst einfache Form tragen können. Dies anstrebend erhalten wir:

$$e^{\frac{x}{h}} = 1 + \frac{x}{h} + \frac{x^2}{2 \cdot h^2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3 h^3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot h^4} + \cdots$$

$$e^{-\frac{x}{h}} = 1 - \frac{x}{h} + \frac{x^2}{2 \cdot h^2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot h^3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot h^4} - \cdots$$

$$z = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) = h\left(1 + \frac{x^2}{2 \cdot h^2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot h^4} + \cdots\right)$$

$$s = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = x\left(1 + \frac{x^2}{2 \cdot 3 h^2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 h^4} + \cdots\right)$$

also auch

$$Z = h\left(1 + \frac{X^2}{2 h^2} + \frac{X^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot h^2} + \cdots\right)$$

$$S = X\left(1 + \frac{X^2}{2 \cdot 3 \cdot h^2} + \frac{X^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot h^4} + \cdots\right)$$

$$\mathfrak{z} = h\left(1 + \frac{\mathfrak{x}^2}{2 \cdot h^2} + \frac{\mathfrak{x}^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot h^4} + \cdots\right)$$

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{x}\left(1 + \frac{\mathfrak{x}^2}{2 \cdot 3 \cdot h^2} + \frac{\mathfrak{x}^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot h^4} + \cdots\right)$$

$$S + \mathfrak{s} = X + \mathfrak{x} + \frac{X^3 + \mathfrak{x}^3}{2 \cdot 3 \cdot h^2} + \frac{X^5 + \mathfrak{x}^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot h^4} + \cdots$$

$$S - \mathfrak{s} = X - \mathfrak{x} + \frac{X^3 - \mathfrak{x}^3}{2 \cdot 3 \cdot h^2} + \frac{X^5 - \mathfrak{x}^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot h^4} + \cdots$$

$$(89)\qquad Z - \mathfrak{z} = \frac{X^2 - \mathfrak{x}^2}{2h} + \frac{X^4 - \mathfrak{x}^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot h^3} + \cdots$$

$$hz - sx = h^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot h^2} - \cdots$$

$$xz - hs = \frac{x^3}{3h} + \frac{x^5}{30h^3} + \cdots$$

$$sZ + zS = h(X + x) + \frac{X^3 + x^3}{2 \cdot 3 \cdot h} + \frac{xX(X + x)}{2h} + \cdots$$

$$zS - sZ = h(X - x) + \frac{X^3 - x^3}{2 \cdot 3 \cdot h} + \frac{xX(x - X)}{2h} + \cdots$$

$$Z - z = \frac{X^2 - x^2}{2h} + \frac{X^4 - x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot h^3} + \cdots$$

$$S + s = X + x + \frac{X^3 + x^3}{2 \cdot 3 \cdot h^2} + \cdots$$

$$S - s = X - x + \frac{X^3 - x^3}{2 \cdot 3 \cdot h^2} + \cdots$$

$$XZ - hS = \frac{X^3}{3h} + \frac{X^5}{30h^3} + \cdots$$

$$hZ - SX = h^2 - \frac{X^2}{2} - \frac{X^4}{2 \cdot 4 \cdot h^2} - \cdots$$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{z} - h\mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{x}^3}{3h} + \frac{\mathfrak{x}^5}{30h^3} + \cdots$$

Hieraus aber die Störungen der Elemente der Kettenlinie in angenäherten Werten:

$$a = \frac{Q}{2m}\,\frac{X - x}{X} \qquad a' = -\frac{Q}{2m}\,\frac{X + \mathfrak{x}}{X}$$

$$b = -\frac{Q(X - \mathfrak{x})}{2mh}\left[1 + \tfrac{3}{2}\left(1 + \frac{\mathfrak{x}}{X}\right)\left(\frac{h^2}{X^2} - \tfrac{1}{2}\right)\right]$$

$$b' = -\frac{Q(X + x)}{2mh}\left[1 + \tfrac{3}{2}\left(1 - \frac{\mathfrak{x}}{X}\right)\left(\frac{h^2}{X^2} - \tfrac{1}{2}\right)\right]$$

$$\chi = \chi' = \frac{3hQ}{4mX}\left(1 - \frac{\mathfrak{x}^2}{X^2}\right)$$

$$\zeta = \frac{QX}{2mh}\left(1 - \frac{\mathfrak{x}}{X}\right)\left(1 + \frac{x}{X}\right)\left[\tfrac{3}{4}\left(1 + \frac{\mathfrak{x}}{X}\right)\left(1 - \frac{x}{X}\right) - 1\right]$$

$$\zeta' = \frac{QX}{2mh}\left(1 + \frac{\mathfrak{x}}{X}\right)\left(1 - \frac{x}{X}\right)\left[\tfrac{3}{4}\left(1 - \frac{\mathfrak{x}}{X}\right)\left(1 + \frac{x}{X}\right) - 1\right]$$

$$\zeta'' = \frac{QX\mathfrak{x}}{4mh^2}\left(1 - \frac{\mathfrak{x}^4}{X^4}\right).$$

Diese angenäherten Werte sind durchsichtiger und zur Analyse geeigneter, als die exakten, aus denen sie hervorgegangen. Man erkennt aus ihnen nach leichter Rechnung, daß die Maxima von ζ und ζ' beziehentlich auf

$$x = -\frac{2X^2}{3(X + \mathfrak{x})} \text{ und } x = \frac{2X^2}{3(X - \mathfrak{x})}$$

fallen. Den Punkten, in denen beziehentlich $\zeta = 0$ und $\zeta' = 0$, entsprechen die Abszissen

$$x = X - \frac{4X^2}{3(X+\mathfrak{x})} \quad \text{und} \quad x = \frac{4X^2}{3(X-\mathfrak{x})} - X.$$

$\mathfrak{z}''$ hat seinen größten Wert für

$$\mathfrak{x} = \pm X\sqrt[4]{\tfrac{1}{5}} \quad \text{oder nahezu} \quad \mathfrak{x} = \pm \tfrac{2}{3} X.$$

Die Maxima von ζ und ζ' selbst aber sind:

$$\zeta = \frac{Q}{24mh}\frac{(X-\mathfrak{x})(X+3\mathfrak{x})^2}{X(X+\mathfrak{x})}, \quad \zeta' = \frac{Q}{24mh}\frac{(X+\mathfrak{x})(X-3\mathfrak{x})^2}{X(X-\mathfrak{x})}.$$

Das Maximum oder Minimum von $\mathfrak{z}''$ ist:

$$\mathfrak{z}'' = \pm \frac{2QX^2}{15mh^2}.$$

Die eben angeführten Maxima von ζ und ζ' erreichen ihrerseits für gewisse Werte von $\mathfrak{x}$ größte der großen Werte. Man rechne, um diese $\mathfrak{x}$ kennen zu lernen, folgendermaßen: ζ ist offenbar ein Maximum, wenn sein natürlicher Logarithmus ein solches ist, das heißt hier, wenn

$$L = \log(X - \mathfrak{x}) + \log(X + 3\mathfrak{x}) - \log(X + \mathfrak{x})$$

sich zu einem Maximum gestaltet, also wenn

$$\frac{dL}{d\mathfrak{x}} = -\frac{1}{X-\mathfrak{x}} + \frac{3}{X+3\mathfrak{x}} - \frac{1}{X+\mathfrak{x}} = 0$$

wird. Dies gibt aber eine Gleichung des zweiten Grades in $\mathfrak{x}$, nämlich

$$\mathfrak{x}^2 + 2X\mathfrak{x} = \tfrac{1}{3}X^2, \text{ welcher wir}$$

$$\mathfrak{x} = -X \pm X\sqrt{\tfrac{4}{3}} = X(-1 \pm \tfrac{7}{6})$$

nahezu entnehmen. Von den gefundenen 2 Wurzeln ist nur die eine positive, nämlich $\mathfrak{x} = \frac{1}{6}X$, brauchbar, die andere $\mathfrak{x} = -\frac{13}{6}X$ fällt aus dem Bereich der wirklich vorhandenen Kettenlinie heraus, und gibt einen Punkt, der gar nicht belastet werden kann. Auf demselben Wege ergibt sich, daß das obige Maximum für ζ' noch ein Maximum maximi zulasse für $\mathfrak{x} = -\frac{1}{6}X$. Diese beiden Maxima maximi selbst aber sind: $\zeta = \zeta' = \frac{15}{224}\frac{QX}{mh}$.

IV.

Allgemeine Störungstheorie beliebiger Stützlinien.

Bei der Behandlung des Störungsproblems der Stützlinien kann man zwei verschiedene Wege verfolgen: Man kann nämlich von der durch Integration einer Differentialgleichung oder irgendwie sonst

erhaltenen endlichen Gleichung der Stützlinien ausgehen, und durch die sehr klein vorausgesetzten Variationen der in derselben vorhandenen konstanten Parameter die Bedingungen zu erfüllen suchen, denen die gestörte Kurve zu genügen hat. Auf diesem Wege erfordert eine jede der in reicher Mannigfaltigkeit vorfindigen Stützlinien ihre schon vom Ursprunge der Rechnung an eigene Behandlung, welche an dem Beispiele der Kettenlinie vollständig durchgeführt worden ist, und bei jeder anderen als Stützlinie auftretenden Kurve diesem Musterbeispiele nachzubilden versucht werden mag.

Man kann aber auch noch einen anderen Weg betreten, indem man von den allgemeinen, noch alle denkbaren Stützlinien umfassenden, und für alle gültigen Differentialgleichungen nämlich:

$$d\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad \mu ds = d\left(\lambda \frac{dz}{ds}\right)$$

den Ausgang nimmt, die störenden Ursachen z. B. besonderen Belastungen einzelner Punkte hinzufügt, und ihre Wirkungen zunächst darin sucht, daß ein jeder Punkt der einstweilen noch unbestimmt gelassenen Stützlinie eine Verschiebung erfährt, kraft deren seine Koordinaten x, z, beziehentlich in $x + \xi$, und $z + \zeta$ verwandelt werden. Man ermittelt sodann die Differentialgleichungen der Positionsstörungen ξ und ζ und strebt sodann mit Hilfe ihrer Integrale samt Integrationskonstanten wieder alle Bedingungen der gelösten Kurve zu erfüllen. Hiermit ist offenbar der Vorteil erreicht, daß die anfänglichen Rechnungsresultate ganz allgemein und für beliebige Stützlinien gültig sind, und erst, wenn man zum Integrieren kommt, ist man zum Übergange zu detaillierten speziellen Annahmen genötigt. Da hiermit eine gleichförmigere Behandlung der Probleme dieser Art in Aussicht gestellt ist, so wollen wir den letzteren Weg hier zu betreten suchen.

Es werde also irgend eine Kurve in Betracht gezogen, die der Integration der Differentialgleichungen (1) für irgendwie von x abhängige μ und λ entsprießt, und die man vorderhand nicht näher zu kennen braucht. Lassen wir ihre sämtlichen Punkte aus welcher Veranlassung immer die Position dermaßen ändern, daß die Koordinaten x, z eines ihrer Punkte M beziehentlich in $x + \xi$ und $z + \zeta$ übergehen, unter ξ und ζ Funktionen von x verstanden, die im Vergleiche mit den Dimensionen des Ganzen sehr klein gedacht werden.

Ein zweiter, dem x, z naher Punkt N ist derjenige, welchem die Koordinaten $x + dx$, $z + \frac{dz}{dx}dx$ entsprechen; sein Abstand ds von dem ersteren ist gegeben durch die Formel

$$MN^2 = ds^2 = dx^2\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right).$$

Er wird vermöge der allgemeinen Positionsänderung in den Richtungen der beiden Achsen der x und z Verschiebungen erleiden, die beziehentlich durch

$$\xi + \frac{d\xi}{dx}dx, \quad \zeta + \frac{d\zeta}{dx}dx$$

ausgedrückt sind, sodaß seine Koordinaten, die

$$x + dx, \quad z + \frac{dz}{dx}dx$$

waren, nunmehr übergegangen sind in:

$$x + \xi + dx + \frac{d\xi}{dx}dx, \quad z + \zeta + \frac{dz}{dx}dx + \frac{d\zeta}{dx}dx.$$

Nehmen wir nun an, daß vermöge dieser Änderung der Position die Punkte M und N beziehentlich nach M' und N' abgerückt sind, so ist die neue Entfernung derselben:

$$M'N'^2 = dx^2\left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right)^2 + dx^2\left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\zeta}{dx}\right)^2,$$

oder nach Beseitigung der Glieder höherer Ordnung:

$$M'N'^2 = dx^2\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right) + 2dx^2\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{dz}{dx}\frac{d\zeta}{dx}\right).$$

Man nimmt allgemein an, daß die Kettenlinie sowohl, wie auch jede andere Stützlinie als ein linear ausgedehntes materielles System zu betrachten sei, welches eine erhebliche Änderung seiner Längendimension weder im ganzen, noch in seinen kleinsten Bestandteilen zuläßt. Gilt dies selbst für große innere Spannungen λ, das heißt vermögen selbst solche keine namhafte Verlängerungen zu erzeugen, so gilt es noch vielmehr von der besonderen Belastung eines einzelnen Punktes, die im Vergleiche mit λ als sehr klein angesehen werden kann. Ist mithin die in Rede stehende Positionsstörung durch eine solche Belastung herbeigeführt, so darf die Länge des Kurvenelements ds dadurch keine Änderung erleiden, es muß also:

$$MN = M'N'$$

das heißt

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{dz}{dx}\frac{d\zeta}{dx} = 0, \text{ also: } \frac{d\xi}{dx} = -\frac{dz}{dx}\frac{d\zeta}{dx}.$$

sein. Diese Gleichung verlangt aber keineswegs, daß das lineare Massensystem keiner Längenänderung fähig, mithin absolut unelastisch sein müsse, sondern nur, daß die Längenänderung, die ds erleidet, von der Ordnung derjenigen Größen sei, welche bei der Ableitung dieser letzten Gleichung vernachlässigt worden sind.



Gleichwie ferner das Element $MN = ds$ der ungestörten Kurve mit den Achsen der x und z Winkel einschließt, deren Kosinusse:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

sind, so wird auch das Element $M'N' = ds$ der gestörten Kurve mit eben diesen Achsen Winkel bilden, deren Kosinusse:

$$\frac{dx}{ds}\left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right), \quad \frac{dx}{ds}\left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\zeta}{dx}\right)$$

heißen.

Die Gleichung endlich der gestörten Kurve wird man erst dann erhalten, wenn man nicht nur die Gleichung der ungestörten Stützlinie, etwa

$$z = f(x)$$

kennen, sondern auch die Werte der Störungen ξ und ζ in Funktion von x besitzen wird, etwa

$$\xi = \varphi(x), \quad \zeta = \psi(x),$$

denn dann wird man die laufenden Koordinaten mit x' und z' bezeichnen und wird haben:

$$x' = x + \xi = x + \varphi(x), \quad z' = z + \zeta = f(x) + \psi(x).$$

Aus diesen beiden Gleichungen x eliminierend gelangt man dann zu einer Eliminationsgleichung zwischen x' und z', die die gesuchte Gleichung der gestörten Kurve sein wird.

Die Unkenntnis aller hier benannten Größen hindert uns aber nicht von der bei nahezu allen mathematischen Untersuchungen üblichen Fiktion auszugehen, wir hätten das Gesuchte bereits gefunden, und namentlich die Ordinate z, die Spannung λ und alles was darauf Bezug hat, in der ungestörten Kurve schon bestimmt, also auch die Gestalt der Stützlinie graphisch konstruiert. Wir betrachten dieselbe auch hier noch als eine mit Masse begabte mathematische Linie nur in der Längenrichtung elastisch und dem Zerreißen oder der Verkürzung und dem Zerdrücken widerstrebend, der Formveränderung hingegen durch Biegen keinen Widerstand zu leisten fähig, und zwar als Hängebogen mit dem tiefsten Schwerpunkte, versinnlicht durch einen mit Masse behafteten Faden von absoluter Biegsamkeit, darstellend also ein materielles System im stabilen Gleichgewichte. Oder als aufrecht gestellten Bogen mit höchstem Schwerpunkte, der angesehen werden kann als eine Zusammensetzung linearer mit Masse begabter Kurvenelemente ds von unveränderlicher Gestalt, die in keiner Verbindung miteinander stehen, und sich nur in ihren Endpunkten aufeinander stützen, was offenbar ein

materielles System im labilen Gleichgewichte darstellt. Die Mittel, welche man besitzt, ein stabiles Gleichgewicht herzustellen, sollen später besprochen werden. Auf Grund dieses anschaulichen Begriffes der Stützlinie stellen wir hier die Frage: Was wird geschehen, wenn man einen einzelnen Punkt der im Gleichgewichte stehenden Stützlinie mit einem besonderen Gewichte Q belastet, welches, wiewohl für sich beträchtlich, doch nur einen kleinen Bruchteil der inneren Spannung λ darstellt?

Der Erfolg einer solchen Belastung eines einzelnen Punktes, insofern er sich ohne Mitwirkung der mathematischen Analysis bestimmen und nur aus populären Gründen sich erraten läßt, wird nun sein:

1. Bei dem im Zustande des stabilen Gleichgewichtes sich befindenden Hängebogen AMB, Fig. 4, wo der mit dem Gewichte Q besonders belastete Punkt M die ursprünglichen Koordinaten d. h. die von der Belastung $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ besitzen mag, wird eben dieser Punkt M der Last Q nachgeben und nach einem anderen Ort im Raume, etwa N, rücken müssen. Hierdurch werden aber auch die übrigen Punkte der Kurve genötigt sein ihre Positionen zu verändern, die einen mehr, die anderen weniger. So sucht sich und findet auch das materielle System eine andere Gleichgewichtslage, die aber infolge des klein vorausgesetzten Wertes der störenden Kraft Q nur wenig abweicht von der alten Gleichgewichtsposition.

2. Auch bei dem im Zustande des labilen Gleichgewichtes bestehenden aufrechten Bogen wird die hinzugefügte Belastung Q eine Ortsveränderung nicht nur des besonders belasteten Punktes $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ von M und N, sondern auch aller übrigen, d. h. eine veränderte Gleichgewichtsposition des ganzen Systemes erheischen. Es findet jedoch ein Unterschied statt. Der im stabilen Gleichgewichte sich befindende Hängebogen sucht sich selbst seine neue Gleichgewichtsstellung, so wie er die alte selbst gesucht und auch gefunden hat, und wie man allenfalls beide Kurven, die gestörte ANB und die ungestörte AMB auf dem Wege des Experimentes zu bestimmen in der Lage wäre. Der labile, stehende Bogen hingegen sucht sich seine Gleichgewichtsposition nicht, sondern entfernt sich von derselben, d. h. er zerfällt bei der geringsten störenden Veranlassung in seine Elemente. Diese Positionen, die gestörte und die ungestörte sind daher auch nicht anders zu bestimmen als auf dem Wege der Rechnung, sind aber beide dennoch vorhanden und werden auch ordnungsmäßig vom Systeme gesucht, wenn man demselben das labile Gleichgewicht durch die geeigneten Mittel in ein stabiles verwandelt. Da indes diese Mittel immer von der Art sind, daß durch ihre Anwendung die Stützlinie eine durch wirkliche Massen

markierte Kurve zu sein aufhört, und in dem geometrischen Ort fiktiver Kräftemittelpunkte verwandelt wird, so ist es auch nie möglich auf dem Wege des Experimentes zu ihrer Kenntnis zu gelangen.

3. Ist das neue Gleichgewicht bereits eingetreten, d. h. hat der Hängebogen bereits seine neue Position gefunden, oder hat man dem aufrechten Bogen die seinige bereits vorgezeichnet, und ihn in dieselbe versetzt, so kann man in dem bereits im Gleichgewichte stehenden Systeme einen beliebigen, oder auch mehrere Punkte festmachen, ohne das bereits vorhandene Gleichgewicht zu stören.

Der festgemachte Punkt kann auch der besonders belastete N sein, dann wird aber seine Belastung Q überflüssig, weil gegen einen festen Punkt gerichtet, und man kann sie ohne Störung des Gleichgewichtes aufheben. Dann aber hat sich das vorgelegte, materielle System in zwei, durch den festen Punkt N geschiedene Abteilungen, wir wollen sie I und II nennen, zerlegt, in deren jeder die Bestandmassen nebst dem Eigengewichte keinen anderen Kräften gehorchen, so wie dies die Differentialgleichungen (1) voraussetzen.

Mithin beherbergen Abteilung I sowohl wie auch II aus der Integration dieser Differentialgleichungen hervorgehende Stützlinien, Kurven von einerlei Gattung, aber verschiedene Individuen, weil sie zu zwei verschieden begrenzten, und an den Grenzen verschiedenen Bedingungen unterworfenen Systemen gehören. Und zwar ist es notwendig dieser Verschiedenheit schon bei der Anlage der Rechnung Ausdruck zu verleihen, weil sie allsobald an der gemeinsamen Grenze N in Wechselwirkung auftritt.

In Gemäßheit dieser populären, unzweifelhaften und selbstverständlichen Wahrnehmungen nehmen wir nun an, daß in der Abteilung I des gestörten materiellen Systems folgende auf das ungestörte System Bezug habende Größen in die folgenden anderen übergehen und zwar:

$$\begin{array}{ccc}
\lambda & \text{in} & \lambda + \lambda_1, \\
x & „ & x + \xi_1, \\
z & „ & z + \zeta_1, \\
\frac{dx}{ds} & „ & \frac{dx}{ds}\left(1 + \frac{d\xi_1}{dx}\right), \\
\frac{dz}{ds} & „ & \frac{dx}{ds}\left(\frac{dz}{\delta x} + \frac{d\zeta_1}{dx}\right),
\end{array}$$

allwo:

$$\frac{d\xi_1}{dx} = -\frac{dz}{dx}\frac{d\zeta_1}{dx}$$

besteht.

Ebenso mögen in der Abteilung II die nachfolgenden Verwandlungen stattfinden:

$$\begin{array}{ccc} \lambda & \text{in} & \lambda + \lambda_2, \\ x & „ & x + \xi_2, \\ z & „ & z + \zeta_2, \\ \frac{dx}{ds} & „ & \frac{dx}{ds}\left(1 + \frac{d\xi_2}{dx}\right), \\ \frac{dz}{ds} & „ & \frac{dx}{ds}\left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\zeta_2}{dx}\right), \end{array}$$

allwo:

$$\frac{d\xi_2}{dx} = -\frac{dz}{dx}\frac{d\zeta_2}{dx}$$

besteht.

Führen wir diese Verwandlungen auch in den Differentialgleichungen der Stützlinien durch, so ergeben sich die folgenden drei Paare von Fundamentalgleichungen, die beziehentlich zur ungestörten Kurve und zur Abteilung I und II der gestörten gehören:

$$\begin{array}{ll} d\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right) = 0 & \mu ds = d\left(\lambda \frac{dz}{ds}\right), \\ (90) \quad d\left[(\lambda + \lambda_1)\left(1 + \frac{d\xi_1}{dx}\right)\frac{dx}{ds}\right] = 0, & \mu ds = d\left[(\lambda + \lambda_1)\left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\zeta_1}{dx}\right)\frac{dx}{ds}\right], \\ d\left[(\lambda + \lambda_2)\left(1 + \frac{d\xi_2}{dx}\right)\frac{dx}{ds}\right] = 0, & \mu ds = d\left[(\lambda + \lambda_2)\left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\zeta_2}{dx}\right)\frac{dx}{ds}\right]. \end{array}$$

Dem ersten Paare entnimmt man z und λ in Funktion von x, worauf dann die vier übrigen in Verbindung mit den zweien

$$(91) \qquad \frac{d\xi_1}{dx} = -\frac{dz}{dx}\frac{d\zeta_1}{dx}, \quad \frac{d\xi_2}{dx} = -\frac{dz}{dx}\frac{d\zeta_2}{dx}$$

bestimmt sind, die Werte zu liefern von ξ_1, ξ_2, ζ_1, ζ_2, λ_1 und λ_2, natürlich auf dem Wege der Integration, welche erleichtert wird durch die bereits gemachte Voraussetzung, daß alle diese Größen von der ersten Ordnung der Kleinheit sind, mithin die höheren Potenzen derselben zu vernachlässigen seien.

Drei der Gleichungen (90), die erste in jedem Paare, können unmittelbar integriert werden und geben:

$$(92) \quad \lambda \frac{dx}{ds} = c, \quad (\lambda + \lambda_1)\left(1 + \frac{d\xi_1}{dx}\right)\frac{dx}{ds} = c_1, \quad (\lambda + \lambda_2)\left(1 + \frac{d\xi_2}{dx}\right)\frac{dx}{ds} = c_2.$$

Hier sind c, c_1, c_2 Integrationskonstanten, die die Bedeutung der horizontalen Komponente der Spannung in der ungestörten Kurve und in der Ahteilung I und II der gestörten besitzen. Aus diesen Gleichungen erhält man, die Glieder höherer Ordnung weglassend:

$$\lambda = c\frac{ds}{dx}, \quad \lambda + \lambda_1 = c_1\frac{ds}{dx}\left(1 - \frac{d\xi_1}{dx}\right), \quad \lambda + \lambda_2 = c_2\frac{ds}{dx}\left(1 - \frac{d\xi_1}{dx}\right).$$

Die zwei letzten (92) können mit Rücksicht auf die erste auch so lauten:

$$\lambda_1 \frac{dx}{ds} + c\frac{d\xi_1}{dx} = c_1 - c, \quad \lambda_2 \frac{dx}{ds} + c\frac{d\xi_2}{dx} = c_2 - c. \tag{93}$$

Substituiert man die erhaltenen Werte von λ, $\lambda + \lambda_1$, $\lambda + \lambda_2$ in die übrigen drei der sechs Gleichungen (90), die noch nicht zur Integration gekommen sind, so ergibt sich zunächst:

$$\mu ds = d\left[c\frac{dz}{dx}\right],$$
$$\mu ds = d\left[c_1\left(1 - \frac{d\xi_1}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\zeta_1}{dx}\right)\right],$$
$$\mu ds = d\left[c_2\left(1 - \frac{d\xi_2}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\zeta_2}{dx}\right)\right].$$

Dann aber, die erste dieser Formeln von den zwei anderen abziehend, und die Glieder höherer Ordnung weglassend:

$$0 = d\left[(c_1 - c)\frac{dz}{dx} - c_1\frac{dz}{dx}\frac{d\xi_1}{dx} + c_1\frac{d\zeta_1}{dx}\right],$$
$$0 = d\left[(c_2 - c)\frac{dz}{dx} - c_2\frac{dz}{dx}\frac{d\xi_2}{dx} + c_2\frac{d\zeta_2}{dx}\right].$$

Auch diese sind der unmittelbaren Integration fähig und geben:

$$(94) \quad \begin{aligned} c_1\Theta_1 &= (c_1 - c)\frac{dz}{dx} - c_1\frac{dz}{dx}\frac{d\xi_1}{dx} + c_1\frac{d\zeta_1}{dx}, \\ c_2\Theta_2 &= (c_2 - c)\frac{dz}{dx} - c_2\frac{dz}{dx}\frac{d\xi_2}{dx} + c_2\frac{d\zeta_2}{dx}. \end{aligned}$$

Die Konstanten der Integration sind hier in der Gestalt $c_1\Theta_1$ und $c_2\Theta_2$ angefügt, und das Gesetz der Homogenität verlangt, daß, sowie c, c_1, c_2 Spannungen bezeichnen, gegeben z. B. in Zentnern, ebenso den Θ_1 und Θ_2 die Bedeutung reiner, dabei sehr kleiner Zahlen zukommt ohne weitere Benennung. Schließlich geben die letztgewonnenen zwei Gleichungen in Verbindung gesetzt mit den zweien (91) und (92) folgende Formeln zur Bestimmung der gesuchten Größen:

$$(95) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dx} &= -\frac{\Theta_1 dx dz}{ds^2} + \left(1 - \frac{c}{c_1}\right)\frac{dz^2}{ds^2}, \\ \frac{d\xi_2}{dx} &= -\frac{\Theta_2 dx dz}{ds^2} + \left(1 - \frac{c}{c_2}\right)\frac{dz^2}{ds^2}, \\ \frac{d\zeta_1}{dx} &= \frac{\Theta_1 dx^2}{ds^2} - \left(1 - \frac{c}{c_1}\right)\frac{dx dz}{ds^2}, \\ \frac{d\zeta_2}{dx} &= \frac{\Theta_2 dx^2}{ds^2} - \left(1 - \frac{c}{c_2}\right)\frac{dx dz}{ds^2}, \\ \lambda_1 &= (c_1 - c)\frac{ds}{dx} + c\Theta_1\frac{dz}{ds} + \frac{c}{c_1}(c - c_1)\frac{dz^2}{dx ds}, \\ \lambda_2 &= (c_2 - c)\frac{ds}{dx} + c\Theta_2\frac{dz}{ds} + \frac{c}{c_2}(c - c_2)\frac{dz^2}{dx ds}. \end{aligned}$$

Sie enthalten 4 Konstante c_1, c_2, Θ_1, Θ_2, über welche noch in keiner Weise verfügt worden ist, vier weitere werden durch die Integration der vier ersten dieser Gleichungen noch hinzutreten, wonach man sich im Besitze befinden wird von acht noch unbestimmten Größen, die, schicklich gewählt, geeignet sein werden, alle Bedingungen zu erfüllen, denen das materielle System unterworfen gedacht werden kann.

Diese Bedingungen zerfallen in zwei Arten, nämlich 1. in solche, die dem materiellen Systeme wesentlich, unabänderlich jederzeit vorhanden sind, und bei keinem derartigen Störungsprobleme fehlen können, und 2. in solche, die weder wesentlich mit jedem solchen Probleme verknüpft sind, noch nach Umständen eine mannigfaltige Fassung zulassen. Wir wollen zuerst die allgemeinen, wesentlichen Bedingungen aufzählen und auch zu verwerten suchen. Ihrer sind nicht mehr als zwei, nämlich:

1. Der besonders belastete Punkt N ist ein den beiden Abteilungen I. und II., in welche die gestörte Kurve zerlegt wird, gemeinschaftlicher, und

2. in diesem gemeinschaftlichen Punkte N bilden die Spannungen in den hier aneinander angrenzenden Stücken der gestörten Stützlinie nebst der Belastung Q eine Gruppe von drei Kräften, die sich im Gleichgewichte befinden müssen. Diese allgemeinen Bedingungen sind zunächst in die mathematische Sprache zu übersetzen.

Da der Voraussetzung nach der Punkt M mit den Koordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ eben derjenige ist, der nach N rückt, so erhält derselbe, insofern er als Endpunkt des Bogenstückes I erscheint, die Koordinaten $\mathfrak{x} + \xi_1$, $\mathfrak{z} + \zeta_1$, insofern hingegen, als er den Anfangspunkt des Bogenstückes II vorstellt, die Koordinaten $\mathfrak{x} + \xi_2$, $\mathfrak{z} + \zeta_2$. Da nun ein und derselbe Punkt N nicht zweierlei Koordinaten haben kann, so ist offenbar, jedoch lediglich für $x = \mathfrak{x}$:

$$\xi_1 = \xi_2 \quad \text{und} \quad \zeta_1 = \zeta_2. \tag{96}$$

Diese Bedingungsgleichungen absorbieren zwei der zur Disposition stehenden 8 Integrationskonstanten, werden aber erst später ihre Verwendung finden.

Die Komponenten der inneren Spannung λ in der ungestörten Kurve sind $\lambda \frac{dx}{ds}$ und $\lambda \frac{dz}{ds}$, positiv genommen oder negativ, je nachdem man sich die Spannung als im Sinne der wachsenden Koordinaten, oder im entgegengesetzten als wirksame Kraft vorstellt. In der Abteilung I der gestörten Kurve gehen diese Komponenten über in

$$(\lambda + \lambda_1)\left(1 + \frac{d\xi_1}{dx}\right)\frac{dx}{ds} \text{ und } (\lambda + \lambda_1)\left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\zeta_1}{dx}\right)\frac{dx}{ds}.$$

In der Abteilung II. hingegen werden diese Komponenten:

$$(\lambda + \lambda_2)\left(1 + \frac{d\xi_2}{dx}\right)\frac{dx}{ds} \text{ und } (\lambda + \lambda_2)\left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\zeta_2}{dx}\right)\frac{dx}{ds}.$$

Die ersteren sind mit dem negativen, die anderen mit dem positiven Zeichen in Rechnung zu setzen. Die besondere Belastung Q aber wirkt im Sinne der ersteren beim aufrechten sowohl, wie auch beim hängenden Bogen. Demzufolge ergeben sich die folgenden zwei Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes der drei in Rede stehenden Kräfte, die aber lediglich für den gemeinsamen Punkt N zu gelten haben, d. h. für $x = \mathfrak{x}$.

$$(97) \quad \begin{aligned} &(\lambda + \lambda_2)\left(1 + \frac{d\xi_2}{dx}\right)\frac{dx}{ds} - (\lambda + \lambda_1)\left(1 + \frac{d\xi_1}{dx}\right)\frac{dx}{ds} = 0 \\ &(\lambda + \lambda_2)\left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\zeta_1}{dx}\right)\frac{dx}{ds} - (\lambda + \lambda_1)\left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\zeta_1}{dx}\right)\frac{dx}{ds} = Q. \end{aligned}$$

Die erste von ihnen geht vermöge der Gleichung (92) über in

$$(98) \qquad c_2 = c_1,$$

besagt mithin, daß die horizontale Komponente der Spannung in den zwei Abteilungen der gestörten Kurve dieselbe sei, verschieden jedoch von jener in der ungestörten Stützlinie. Die zweite dieser Gleichungen (97) hingegen verwandelt sich mit Hilfe der 6 Hauptformeln (95) in die ebenfalls einfache:

$$(99) \qquad c(\Theta_2 - \Theta_1) = Q.$$

Hiermit hätten also wieder zwei der verfügbaren 8 Konstanten ihre Verwendung gefunden; es sind deren mithin nur mehr vier übrig, mittelst deren man den noch übrigen zufälligen Bedingungen des Systems gerecht zu werden versuchen wird. Diese dürfen daher in nicht mehr als vier Gleichungen ihren vollständigen Ausdruck finden, weil sie sonst einen Widerspruch enthalten.

Die bisher errungenen Resultate reichen bereits hin, den Beweis zu führen, daß die zwei Abteilungen der gestörten Kurve im gemeinschaftlichen Punkte N unter einem endlichen Winkel zusammenstoßen, durch Angabe dieses Winkels nämlich. Bekanntlich deutet der Differentialquotient $\frac{dz}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels an, den wir mit φ bezeichnen wollen, und den die zum Punkte x, z gezogene geometrische Tangente mit der Achse der x einschließt. Gehen wir, die x, z in $x + \xi$, $z + \zeta$ umsetzend, zu einer gestörten Nachbarkurve über, so wird auch der Winkel φ ein anderer und erhält den durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dz + d\zeta}{dx + d\xi}$$

gegebenen Wert. In der Abteilung I. der gestörten Kurve ist $\xi = \xi_1$ und $\zeta = \zeta_1$; befindet sich daher der Punkt x, z in der Abteilung I., so gehen seine Koordinaten in der Tat über in $x + \xi_1$, $z + \zeta_1$. Allein auch wenn der Punkt x, z sich in der Abteilung II. aufhält, wobei sich seine Koordinaten in $x + \xi_2$, $z + \zeta_2$ verwandeln, kann man sich immerhin noch einen zweiten Nachbarpunkt mit den Koordinaten $x + \xi_1$, $z + \zeta_1$ aufgesucht und markiert denken, das heißt man kann sich den Bogen I in der Abteilung II. verlängert vorstellen nach demselben Gesetze, nach welchem er in I. gebildet ist, welche Verlängerung dann freilich nur eine fiktive Kurve, und keine Stützlinie ist.

Legen wir nun zu allen zwei Punkten, nämlich dem $x + \xi_1$, $z + \xi_1$ und dem $x + \xi_2$, $z + \zeta_2$ die Tangenten und bezeichnen die Winkel, die sie mit der Achse der x einschließen, mit φ_1 und φ_2, so sind diese letzteren offenbar bestimmt durch die Formeln

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{dz + d\zeta_1}{dx + d\xi_1}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{dz + d\zeta_2}{dx + d\xi_2},$$

woraus man erhält:

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{(dz + d\zeta_2)(dx + d\xi_1) - (dz + d\zeta_1)(dx + d\xi_2)}{(dx + d\xi_1)(dx + d\xi_2) + (dz + d\zeta_1)(\partial z + d\zeta_2)}.$$

Dieser etwas gedehnte Bruch schrumpft nach genommener gehöriger Rücksicht auf die Gleichung (94) und (95) zu dem äußerst einfachen Ausdrucke zusammen

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = (\Theta_2 - \Theta_1)\frac{dx^2}{ds^2},$$

oder auch vermöge der Gleichung (99)

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{Q}{c}\frac{dx^2}{ds^2}.$$

Diese Gleichung lehrt, daß die beiden zu den Punkten $x + \xi$, $z + \zeta$, und $x + \xi_2$, $z + \zeta_2$ geführten Tangenten einen zwar sehr kleinen, aber endlichen Winkel zwischen sich einschließen, dessen trigonometrische Tangente $\frac{Q}{c}\frac{dx^2}{ds^2}$ ist. An der Grenze der beiden Abteilungen I. und II. fallen aber diese zwei Punkte in einen einzigen N zusammen, weil dort $\xi_1 = \xi_2$, $\zeta_1 = \zeta_2$ ist. Man hat daher dort zu einem einzigen Punkte zwei Tangenten; mithin müssen die dort zusammenlaufenden Bögen der Stützlinie sich unter einem endlichen Winkel schneiden. Dieser Winkel wird ein Maximum für $ds = dx$, das heißt, im tiefsten Punkte der Kurve, und ist dort

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{Q}{c}.$$

Nun gehen wir endlich, um zu den Werten der Störungen ξ_1, ξ_2, ζ_1, ζ_2 zu gelangen, an die Integration der vier ersten Fundamental gleichungen (95). Sie geben, nachdem $c_2 = c_1$ gesetzt worden,

$$
(100)\quad
\begin{aligned}
\xi_1 &= -\Theta_1\int\frac{dx\,dz}{ds^2}dx + \left(1-\frac{c}{c_1}\right)\int\frac{dz^2}{ds^2}\,dx + A_1\\
\xi_2 &= -\Theta_2\int\frac{dx\,dz}{ds^2}dx + \left(1-\frac{c}{c_1}\right)\int\frac{dz^2}{ds^2}\,dx + A_2\\
\zeta_1 &= \quad\Theta_1\int\frac{dx^2}{ds^2}\,dx - \left(1-\frac{c}{c_1}\right)\int\frac{dx\,dz}{ds^2}dx + B_1\\
\zeta_2 &= \quad\Theta_2\int\frac{dx^2}{ds^2}\,dx - \left(1-\frac{c}{c_1}\right)\int\frac{dx\,dz}{ds^2}dx + B_2.
\end{aligned}
$$

$A_1 A_2 B_1 B_2$ sind die vier Konstanten der Integration. Die hier vorkommenden Differentialausdrücke, nur drei an der Zahl, sind freilich nicht wirklich zu integrieren, so lange man nicht weiß, was z und s für Funktionen von x sind, das heißt, so lange man sich über die Beschaffenheit der ungestörten Stützlinie nicht näher erklären kann. Gleichwohl ist es zulässig, die Integrationen als bereits bewerkstelligt anzusehen.

Es sei mithin:

$$\int\frac{dz^2}{ds^2}dx = U,\quad \int\frac{dx\,dz}{ds^2}dx = V,\quad \int\frac{dx^2}{ds^2}dx = W,$$

so hat man zunächst

$$U + W = \int\frac{dx^2 + dz^2}{ds^2}dx = \int dx = x,$$

also:

$$W = -U + x,\quad U = x = W.$$

Hiermit beherbergen die Formeln (100) nur mehr zwei verschiedene Integrale, deren Berechnung noch rückständig ist, etwa U und V, und können so aufgezeichnet werden:

$$
(101)\quad
\begin{aligned}
\xi_1 &= -\Theta_1 V + \left(1-\frac{c}{c_1}\right)U + A_1\\
\xi_2 &= -\Theta_2 V + \left(1-\frac{c}{c_1}\right)U + A_2\\
\zeta_1 &= -\Theta_1(U-x) - \left(1-\frac{c}{c_1}\right)V + B_1\\
\zeta_2 &= -\Theta_2(U-x) - \left(1-\frac{c}{c_1}\right)V + B_2.
\end{aligned}
$$

Mit diesen Gleichungen kann man den allgemeinen Teil der Untersuchungen als abgeschlossen ansehen und wird zu weiteren Aufschlüssen nur dadurch gelangen, daß man in das Detail der zufälligen Bedingungen

eingeht, denen das System unterworfen gedacht werden kann und die sich zumeist auf den Zustand der Endpunkte beziehen, die entweder fest oder genötigt sein können, eine bestimmte krumme Fläche oder Linie nicht zu verlassen, oder an diesen Enden eine bestimmte Richtung einzuhalten.

Stellen wir also beispielsweise solche Bedingungen fest, etwa annehmend, die ungestörte Stützlinie sei von $x = -X$ bis $x = X$ ausgedehnt, und ihre beiden Enden werden fest gehalten, so hat man

$$\text{für } x = -X \qquad \xi_1 = 0 \qquad \zeta_1 = 0$$
$$\text{für } x = X \qquad \xi_2 = 0 \qquad \zeta_2 = 0.$$

Dem einen leistet man Genüge, wenn man bloß in denjenigen der vier Gleichungen (101), die ξ_1 und ζ_1 bestimmen, die Konstanten A_1 und B_1 durch Null ersetzt, dagegen den Integralen, die durch U, V und $U - x$ angedeutet sind, solche Integrationskonstanten angefügt denkt, daß diese Integrale sämtlich für $x = -X$ verschwinden, oder nach mathematischem Sprachgebrauche: Die genannten Integrale sind zwischen den Grenzen $-X$ und x zu nehmen. Ebenso wird man den Bedingungen am anderen Ende für $x = X$ Genüge leisten, wenn man in den Gleichungen für ξ_2 und ζ_2 die A_2 und B_2 durch Null ersetzt und die in ihnen vorhandenen Integrale zwischen den Grenzen X und x nimmt.

Es sei zu diesem Behufe

$$U_1 = \int_{-X}^{x} \frac{dz^2}{ds^2}\,dx, \quad V_1 = \int_{-X}^{x} \frac{dx\,dz}{ds^2}\,dx,$$

$$U_2 = \int_{X}^{x} \frac{dz^2}{ds^2}\,dx, \quad V_2 = \int_{X}^{x} \frac{dx\,dz}{ds^2}\,dx,$$

so sind jetzt die vier Formeln (100) durch folgende vier andere zu ersetzen, in welchen die Konstanten $A_1 B_1 A_2 B_2$ nicht mehr vorkommen, sondern bereits auf die einfachste Weise als bestimmt zu erachten sind:

$$(102) \qquad \begin{aligned} \xi_1 &= -\Theta_1 V_1 + \left(1 - \frac{c}{c_1}\right) U_1 \\ \xi_2 &= -\Theta_2 V_2 + \left(1 - \frac{c}{c_1}\right) U_2 \\ \zeta_1 &= -\Theta_1 (U_1 - x - X) - \left(1 - \frac{c}{c_1}\right) V_1 \\ \zeta_2 &= -\Theta_2 (U_2 - x + X) - \left(1 - \frac{c}{c_1}\right) V_2. \end{aligned}$$

Jetzt sind wir erst in der Lage, die erste und wichtigste der Bedingungen, die bereits unter (96) zur Sprache gebracht wurde, in Rech-

nung zu ziehen, die nämlich, daß der besonders belastete Punkt N ein beiden Abteilungen I. und II. der gestörten Kurve gemeinschaftlicher sei, so daß für $x = \mathfrak{x}$, $\xi_1 = \xi_2$ und $\zeta_1 = \zeta_2$ zu bestehen hat.

Denken wir uns zu diesem Zwecke in die letztgewonnenen vier Gleichungen $\mathfrak{x}$ anstatt x substituiert, so werden in den mit $U_1 U_2 V_1 V_2$ bezeichneten Integralen auch die oberen Grenzen konstant, und $= \mathfrak{x}$ mithin diese Integrale selbst aus Funktionen von x in Konstante verwandelt.

Sie mögen heißen:

$$H_1 = \int_{-X}^{\mathfrak{x}} \frac{dz^2}{ds^2} dx, \quad K_1 = \int_{-X}^{\mathfrak{x}} \frac{dx\,dz}{ds^2} dx$$

$$H_2 = \int_{X}^{\mathfrak{x}} \frac{dz^2}{ds^2} dx, \quad K_2 = \int_{X}^{\mathfrak{x}} \frac{dx\,dz}{ds^2} dx.$$

Jetzt werden die zwei Gleichungen $\xi_1 = \xi_2$ und $\zeta_1 = \zeta_2$ folgendermaßen lauten:

$$\Theta_2 K_2 - \Theta_1 K_1 = \left(1 - \frac{c}{c_1}\right)(H_2 - H_1)$$

$$\Theta_2 (H_2 - \mathfrak{x} + X) - \Theta_1 (H_1 - \mathfrak{x} - X) = \left(1 - \frac{c}{c_1}\right)(K_1 - K_2).$$

Hier ist aber:

$$K_1 - K_2 = \int_{-X}^{\mathfrak{x}} \frac{dx\,dz}{ds^2} dx - \int_{X}^{\mathfrak{x}} \frac{dx\,dz}{ds^2} dx = \int_{-X}^{\mathfrak{x}} \frac{dx\,dz}{ds^2} dx + \int_{\mathfrak{x}}^{X} \frac{dx\,dz}{ds^2} dx$$

$$= \int_{-X}^{X} \frac{dx\,dz}{ds^2} dx = K, \text{ und ebenso}$$

$$H_1 - H_2 = \int_{-X}^{X} \frac{dz^2}{dx^2} dx = H.$$

Nun multiplizieren wir die erste der letzterhaltenen zwei Gleichungen mit K, die zweite mit H und addieren sie, so wird $1 - \frac{c}{c_1}$ eliminiert, und man erhält

$$\Theta_2 [KK_2 + H(H_2 - \mathfrak{x} + X)] = \Theta_1 [KK_1 + H(H_1 - \mathfrak{x} - X)].$$

Hiezu nehmen wir noch die bereits früher erhaltene Gleichung

$$\Theta_2 - \Theta_1 = \frac{Q}{c},$$

und so gelangen wir mit Hilfe derselben zu den folgenden allgemeinen, noch auf alle möglichen Stützlinien mit festen Endpunkten anwendbaren Werte von Θ_1 und Θ_2:

$$\Theta_1 = \frac{Q[KK_2 + H(H_2 - \mathfrak{x} + X)]}{c[K(K_1 - K_2) + H(H_1 - H_2 - 2X)]}$$

(103)
$$\Theta_2 = \frac{Q[KK_1 + H(H_1 - \mathfrak{x} - X)]}{c[K(K_1 - K_2) + H(H_1 - H_2 - 2X)]},$$

hieraus

$$1 - \frac{c}{c_1} = \frac{Q(K_1(H_2 - \mathfrak{x} + X) - K_2(H_1 - \mathfrak{x} - X)]}{c[K(K_1 - K_2) + H(H_1 - H_2 - 2X)]}.$$

In diesen Formeln sind alle konstanten Parameter enthalten, die in den Störungen der Position sowohl, welche die Gleichungen (95) ausdrücken, wie auch in den Störungen der Spannungen, die man den zwei letzten der 6 Gleichungen (95) entnimmt, vorkommen. Nur muß dort $c_2 = c_1$ gesetzt werden, was sofort ergibt:

$$\lambda_1 = c_1\left[\left(1 - \frac{c}{c_1}\right)\frac{ds}{dx} + \frac{c\Theta_1}{c_1}\frac{dx}{ds} - \frac{c}{c_1}\left(1 - \frac{c}{c_1}\right)\frac{dz^2}{dx\,ds}\right]$$

(104)
$$\lambda_2 = c_1\left[\left(1 - \frac{c}{c_1}\right)\frac{ds}{dx} + \frac{c\Theta_2}{c_1}\frac{dz}{ds} - \frac{c}{c_1}\left(1 - \frac{c}{c_1}\right)\frac{dz^2}{dx\,ds}\right]$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = c\frac{dz}{ds}(\Theta_1 - \Theta_2) = - Q\frac{dz}{ds}.$$

Mit Befriedigung läßt sich hier eine seltene Eigenschaft der in diesem Abschnitte vorgetragenen Theorie hervorheben, nämlich: Sie behält ihre volle Allgemeinheit und unbeschränkte Gültigkeit für alle möglichen Stützlinien bis zu Ende, und es ist nirgends nötig, sich über die Eigenschaften dieser Kurve in eine nähere Erklärung einzulassen, ja man braucht nicht einmal ihre Differentialgleichung integriert zu haben, und im Besitze der Urgleichung zu sein. Diese Urgleichung der Stützlinie kann sogar nicht einmal auffindbar sein in geschlossener Form, und dennoch rechnet man das ganze Störungsproblem bis zu Ende, und erlangt geschlossene Formen für die sämtlichen Störungen, wenn es nur gelingt die Integrale U und V in geschlossener Form aufzufinden. Diese Theorie dürfte daher vor der früher auseinandergesetzten Methode der Variation der Konstanten wenigstens insofern den Vorzug verdienen, als man nur die Anforderungen der Rechnung ins Auge faßt.

Die letzte der Gleichungen (104) fordert durch ihre Einfachheit zu einer näheren Interpretation auf. Sie kann auch so geschrieben werden:

$$(\lambda + \lambda_2) - (\lambda + \lambda_1) = Q\frac{dz}{ds}.$$

Hier ist λ die Spannung in der ungestörten, $\lambda + \lambda_1$ und $\lambda + \lambda_2$ sind die Spannungen in den Abteilungen I und II der gestörten Kurve,

alles in Funktion von x. Gehört mithin x zu einem Punkte der ungestörten Kurve, der nach der besonderen Belastung Q in die Abteilung I rückt, so ist $\lambda + \lambda_1$ die in demselben waltende wirkliche Spannung, hingegen $\lambda + \lambda_2$ nur fiktiv, weil gehörig zu einem Punkte der fiktiven Kurve, die man erhält, wenn man den Bogen II nach demselben Gesetze in die Abteilung I verlängert, nach welchem er in II gebildet ist. Gehört hingegen x zu einem Punkte der Abteilung II, dann ist wieder $\lambda + \lambda_2$ eine wirklich vorhandene Spannung, und $\lambda + \lambda_1$ bloß fiktiv.

Nur wenn $x = \mathfrak{x}$ ist, d. h. wenn der Punkt der Grenzpunkt N ist, an welchem die Abteilung I und II zusammenstoßen, dann ist sowohl $\lambda + \lambda_1$ als auch $\lambda + \lambda_2$ eine in diesem Punkte N wirklich vorhandene Spannung. Hier also springt in unstetiger Weise und plötzlich die sonst überall stetig fortschreitende Spannung $\lambda + \lambda_1$ auf $\lambda + \lambda_2$ über, und erhält mit einem Schlage den Zuwachs $Q\frac{dz}{ds}$, welcher $= O$ ist im tiefsten oder höchsten Punkte der ungestörten Stützlinie, wo $dz = 0$ besteht, hingegen positiv ausfällt, wo $\frac{dz}{ds}$ positiv ist und negativ, wo $\frac{dz}{ds}$ sich negativ gestaltet.

Ähnliches findet statt bei allen auf die gestörte Kurve Bezug habenden Größen, wie Tangente, Krümmungshalbmesser usw., die nicht ausdrücklich durch eine Bedingunsgleichung, wie $\xi_1 = \xi_2$ oder $\zeta_1 = \zeta_2$ für $x = \mathfrak{x}$ von einer solchen sprungweisen Wertveränderung ausgenommen sind und lediglich einem plötzlichen Wechsel in der Funktionsform unterliegen oder ganz unverändert bleiben.

Schon die große Allgemeinheit, in welcher die Untersuchung durchgeführt worden ist, macht es erklärlich, daß die in den Formeln (101), (102) und (103) niedergelegten Endresultate derselben sich nicht sehr einfach gestaltet haben. Kompliziert sind sie jedoch noch nicht zu nennen. Einer, wenn auch nicht bedeutenden Vereinfachung sind sie übrigens noch fähig, wenn man bedenkt, daß

$$K_1 - K_2 = K, \quad H_1 - H_2 = H$$

besteht, und daß auf demselben Wege der Beweisführung auch

$$V_1 - V_2 = K \text{ und } U_1 - U_2 = H$$

erhalten wird. Die Gleichungen (103) gehen dadurch über in:

$$\Theta_1 = \frac{Q\,[KK_2 + H(H_2 - \mathfrak{x} + X)]}{c\,[K^2 + H(H - 2X)]}$$

$$\Theta_2 = \frac{Q\,[KK_1 + H(H_1 - \mathfrak{x} - X)]}{c\,[K^2 + H(H - 2X)]}$$

$$1 - \frac{c}{c_1} = \frac{Q\,[K_1(H_2 + X) - K_2(H_1 - X) - K\mathfrak{x}]}{c\,[K^2 + H(H - 2X)]}.$$

Erlaubt man sich jedoch gewisse noch immer sehr allgemein gehaltene Voraussetzungen bezüglich der ungestörten Stützlinie, z. B., daß sie symmetrisch zu beiden Seiten der vertikalen Koordinatenachse der z gelagert sei, so folgt daraus unmittelbar

$$K = 0\,, \text{ also } K_1 = K_2 \text{ und } V_1 = V_2,$$

und die vorliegenden Formeln gewinnen sogleich die viel geschmeidigere Gestalt:

$$\Theta_1 = \frac{Q[H_2 - \mathfrak{x} + X]}{c[H - 2X]}, \quad \Theta_2 = \frac{Q[H_1 - \mathfrak{x} - X]}{c[H - 2X]}, \tag{105}$$
$$1 - \frac{c}{c_1} = -\frac{QK_1}{cH}.$$

Um dies einzusehen, braucht offenbar nur nachgewiesen zu werden, daß im Falle des symmetrischen Baues der Stützlinie sofort

$$K = \int_{-X}^{X} \frac{dx\,dz}{ds^2}\,dx = 0$$

wird. Dies hat aber keine Schwierigkeit, nachdem der Augenschein lehrt, daß auf der Seite der positiven Koordinaten dx und dz beide einerlei Zeichen besitzen, auf der Seite der negativen Koordinaten denselben entgegengesetzte Zeichen zukommen, mithin der Ausdruck $\frac{dx\,dz}{ds^2}$ in gleichen Entfernungen rechts und links von der Achse der z gleiche und dem Zeichen nach entgegengesetzte Werte hat, also das K genannte Integral als Summe betrachtet aus Gliedern besteht, die sich zu zwei und zwei aufheben.

Sind die Grenzen der Stützlinie keine festen Punkte, was z. B. dann vorkommen kann, wenn dieselbe in einem körperlichen Tragbogen als in keiner sichtbaren Weise markierte, fiktive mathematische Linie erscheint, während die Bedingungen an den Grenzen nicht sie, die Stützlinie unmittelbar, sondern den Tragbogen und infolgedessen nur mittelbar die Stützlinie angehen, so wird man von den Gleichungen (101) ausgehend vorerst die Bedingungen an dem, beiden Kurvenabteilungen I und II gemeinschaftlichen Punkte $x = \mathfrak{x}$, nämlich $\xi_1 = \xi_2$ und $\zeta_1 = \zeta_2$ zu verwerten suchen.

Sie geben allgemein

$$\xi_2 - \xi_1 = -(\Theta_2 - \Theta_1)\,V + A_2 - A_1$$
$$\zeta_2 - \zeta_1 = -(\Theta_2 - \Theta_1)(U - x) + B_2 - B_1.$$

Beide Differenzen sollen für $x = \mathfrak{x}$ verschwinden. Dies erzielt man, wenn man U und V durch bestimmte Integrale, genommen zwischen den Grenzen $\mathfrak{x}$ und x ersetzt, nämlich für dieselben

$$U' = \int_{\mathfrak{x}}^{x} \frac{dz^2}{ds^2}\,dx \quad V' = \int_{\mathfrak{x}}^{x} \frac{dx\,dz}{ds^2}\,dx$$

schreibt, und zugleich

$$A_2 = A_1 = A, \quad B_1 = B - \Theta_1 \mathfrak{x}, \quad B_2 = B - \Theta_2 \mathfrak{x}$$

statuiert. Die Formeln (101) gehen hiermit über in

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\Theta_1 V' + \left(1 - \frac{c}{c_1}\right) U' + A \\ \xi_2 &= -\Theta_2 V' + \left(1 - \frac{c}{c_1}\right) U' + A \\ \zeta_1 &= -\Theta_1 (U' + \mathfrak{x} - x) - \left(1 - \frac{c}{c_1}\right) V' + B \\ \zeta_2 &= -\Theta_2 (U' + \mathfrak{x} - x) - \left(1 - \frac{c}{c_1}\right) V' + B. \end{aligned} \tag{106}$$

Die neu eingeführten Konstanten A und B stellen offenbar die Werte dar, welche beziehentlich ξ_1 sowohl wie ξ_2, und ζ_1 sowohl wie ζ_2 für $x = \mathfrak{x}$ annehmen. Hier befinden sich nur mehr vier konstante Parameter etwa die Θ_1, $1 - \frac{c}{c_1}$, A und B, die noch keine Verwendung gefunden haben, und die vorliegenden Gleichungen werden brauchbar sein in allen denjenigen Fällen, wo die Stützlinie keine festen Endpunkte hat.

V.

Anwendung der allgemeinen Störungstheorie auf die Kettenlinie und die Linie des gleichen Widerstandes.

Die genaue Kenntnis einer allgemeinen Methode oder Theorie ist mit ihrer Aufstellung nicht abgeschlossen. Man wünscht auch zu wissen, ob eine solche in der Ausübung nicht manchmal oder sogar gewöhnlich unüberwindlichen Schwierigkeiten begegne, ob sie namentlich in den im Leben vorkommenden Fällen in irgend einer technischen Anwendung ersprießliche Dienste leiste, und wie man sich, wenigstens was die Durchführung der Rechnungen betrifft, dabei zu benehmen habe.

Wir werden daher in diesem Abschnitte die vorgetragene allgemeine Theorie anzuwenden suchen auf einige wenige spezielle Fälle, die sich teils durch ihre praktische Bedeutung, teils durch ihre ana-

lytischen Eigentümlichkeiten zu Beispielen vorzugsweise empfehlen: Die Kettenlinie nämlich als exponentiale Kurve und die Linie des gleichen Widerstandes als logarithmisch trigonometrische krumme Linie. Wir beginnen bei der erstgenannten.

In der großen Mehrzahl der Fälle, wo die Kettenlinie praktisch verwertet erscheint, bei Ketten- und Seilbrücken, Kuppelgewölben usw. ist sie eine Kurve, die zwei feste Punkte, oder wenigstens nahezu feste Punkte in gleicher Höhe besitzt. In einigen seltenen Fällen, z. B. bei Drahtriesen[1]) ist sie wieder mit zwei festen Punkten, jedoch in ungleicher Höhe versehen. Bringen wir zuvörderst den ersten Fall, der schon im Abschnitte III mit der Methode der Variation der Konstanten erledigt worden ist, auf Grundlage der im vorhergehenden Abschnitte IV vorgetragenen Theorie zur Sprache, um die Kongruenz der beiderseits erhaltenen Rechnungsresultate zu erproben und auch die Vorteile beider Methoden gegen einander abzuwägen.

Legen wir uns zu diesem Ende die Fundamental-Gleichungen der Kettenlinie vor, so sind

$$(107)\begin{cases} z = \frac{h}{2}\left[e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right] \qquad s = \frac{h}{2}\left[e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right] \\ \frac{dz}{dx} = \frac{s}{h}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{z}{h}, \quad z^2 = s^2 + h^2, \quad \lambda = mz, \quad r = \frac{z^2}{h} \\ \frac{dz^2}{dx^2} = \frac{s^2}{h^2}, \quad \frac{dz^2}{dx\,ds} = \frac{s^2}{hz}, \quad \frac{dz^2}{ds^2} = \frac{s^2}{z^2}. \end{cases}$$

Aus ihnen leitet man zunächst die Werte der U und V benannten Integrale ab

$$U = \int \frac{dz^2}{ds^2}\,dx = \int \frac{s^2}{z^2}\,dx = \int \frac{z^2 - h^2}{z^2}\,dx = x - \int h\,d\,\frac{s}{z} = x - \frac{hs}{z},$$

$$V = \int \frac{dx\,dz}{ds^2} = \int \frac{hs\,dx}{z^2} = \int \frac{h^2\,dz}{z^2} = -\frac{h^2}{z}.$$

Angenommen, es entsprechen den drei Punkten, dem Anfangspunkte, dem besonders mit dem Gewichte Q belasteten, und dem Endpunkte der Kettenlinie, von denen der erste und letzte fest vorausgesetzt werden, beziehentlich die folgenden Werte der Koordinaten und Bogenlängen, gezählt vom Scheitel der Kurve:

$$x = -X, \quad z = Z, \quad s = -S; \quad x = \mathfrak{x}, \quad s = \mathfrak{s}, \quad z = \mathfrak{z},$$
$$x = X, \quad z = Z, \quad s = S,$$

1) Drahtseilbahnen.

so ergeben sich die Werte der bestimmten Integrale

$$H = \int_{-X}^{X} \frac{dz^2}{ds^2}\,dx = 2\left[X - \frac{hS}{Z}\right],$$

$$H_1 = \int_{-X}^{\mathfrak{x}} \frac{dz^2}{ds^2}\,dx = \mathfrak{x} + X - \frac{h\mathfrak{s}}{\mathfrak{z}} - \frac{hS}{Z},$$

$$H_2 = \int_{X}^{\mathfrak{x}} \frac{dz^2}{ds^2}\,dx = \mathfrak{x} - X - \frac{h\mathfrak{s}}{\mathfrak{z}} + \frac{hS}{Z},$$

$$U_1 = \int_{-X}^{x} \frac{dz^2}{ds^2}\,dx = x + X - \frac{hs}{z} - \frac{hS}{Z},$$

$$U_2 = \int_{X}^{x} \frac{dz^2}{ds^2}\,dx = x - X - \frac{hs}{z} + \frac{hS}{Z},$$

$$K_1 - K_2 = \int_{X}^{\mathfrak{x}} \frac{dx\,dz}{ds^2} = \int_{-X}^{\mathfrak{x}} \frac{dx\,dz}{ds^2} = \frac{h^2}{Z} - \frac{h^2}{\mathfrak{z}},$$

$$V_1 - V_2 = \int_{-X}^{x} \frac{dx\,dz}{ds^2} - \int_{X}^{x} \frac{dx\,dz}{ds^2} = \frac{h^2}{Z} - \frac{h^2}{z}.$$

Hier ist der Fall eingetreten, wo die Stützlinie durch die Achse der z in zwei symmetrische Hälften zerlegt wird, daher $K = K_1 - K_2 = V_1 - V_2 = 0$ wird, und man von den einfachen Gleichungen (105) des vorhergehenden Abschnittes zur Bestimmung von Θ_1, Θ_2 und $1 - \frac{c}{c_1}$ Gebrauch machen kann. Sie geben:

$$\Theta_1 = \frac{Q}{c}\,\frac{\mathfrak{s}Z - \mathfrak{z}S}{2\mathfrak{z}S}, \quad \Theta_2 = \frac{Q}{c}\,\frac{\mathfrak{s}Z + \mathfrak{z}S}{2\mathfrak{z}S},$$

$$1 - \frac{c}{c_1} = \frac{h^2 Q}{2c\mathfrak{z}}\,\frac{Z - \mathfrak{z}}{XZ - hS}. \tag{108}$$

Mit diesen Werten und jenen der obigen Gleichungen erhält man aus den (106) folgende die Positions-Störungen bestimmende Formeln:

$$(109)\left\{\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{h^2 Q}{2cz\mathfrak{z}}\left[(Z - \mathfrak{z})\left(\frac{xz - hs}{XZ - hS} + \frac{z}{Z}\right) + (Z - z)\left(\frac{\mathfrak{s}}{S} - \frac{\mathfrak{z}}{Z}\right)\right]\\
\xi_2 &= \frac{h^2 Q}{2cz\mathfrak{z}}\left[(z - \mathfrak{z})\left(\frac{xz - hs}{XZ - hS} - \frac{z}{Z}\right) + (Z - z)\left(\frac{\mathfrak{s}}{S} + \frac{\mathfrak{z}}{Z}\right)\right]\\
\xi_1 - \xi_2 &= \frac{h^2 Q(z - \mathfrak{z})}{cz\mathfrak{z}}\\
\zeta_1 &= \frac{hQ}{2c\mathfrak{z}zZS}\left[(sZ + zS)(\mathfrak{s}Z - \mathfrak{z}S) + \frac{h^3 S(Z - \mathfrak{z})(Z - z)}{XZ - hS}\right]\\
\zeta_2 &= \frac{hQ}{2c\mathfrak{z}zZS}\left[(sZ - zS)(\mathfrak{s}Z + \mathfrak{z}S) + \frac{h^3 S(Z - \mathfrak{z})(Z - z)}{XZ - hS}\right]\\
\zeta_1 - \zeta_2 &= \frac{hQ}{c}\left[\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{z}} - \frac{s}{z}\right].
\end{aligned}\right.$$

Jetzt kommen noch die Störungen der Spannungen, λ_1 und λ_2 genannt und dargestellt durch die Gleichungen (95), zur Berechnung. Zieht man hier in Betracht, daß $c_1 - c$ eine sehr kleine Größe von der Ordnung der störenden Last Q ist, und läßt man in den Gleichungen (95) nur Größen von der Ordnung des Quadrates derselben außer acht, so kann man diese Formeln auch so aufzeichnen

$$(110)\qquad \begin{cases} \lambda_1 = c\left[\left(1 - \frac{c}{c_1}\right)\left(\frac{ds}{dx} - \frac{dz^2}{dx\,ds}\right) + \Theta_1 \frac{dz}{ds}\right] \\ \lambda_2 = c\left[\left(1 - \frac{c}{c_1}\right)\left(\frac{ds}{dx} - \frac{dz^2}{dx\,ds}\right) + \Theta_2 \frac{dz}{ds}\right], \end{cases}$$

zudem hat man noch

$$\frac{ds}{dx} - \frac{dz^2}{dx\,ds} = \frac{z}{h} - \frac{s^2}{hz} = \frac{z}{h} - \frac{z^2 - h^2}{hz} = \frac{h}{z},$$

daher sich denn vermöge der (110) und (108) folgende Werte ergeben für λ_1 λ_2 und $\lambda_2 - \lambda_1$:

$$(110)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{Q}{2\mathfrak{z}z}\left[\frac{h^3(Z - \mathfrak{z})}{XZ - hS} + \frac{s}{S}(\mathfrak{s}Z - \mathfrak{z}S)\right] \\ \lambda_2 &= \frac{Q}{2\mathfrak{z}z}\left[\frac{h^3(Z - \mathfrak{z})}{XZ - hS} + \frac{s}{S}(\mathfrak{s}Z + \mathfrak{z}S)\right] \\ \lambda_2 - \lambda_1 &= Q\frac{s}{z}. \end{aligned}$$

Die Berechnung sämtlicher Störungen ist hiermit unter geringer Mühewaltung abgeschlossen. Vor allem anderen entsteht aber hier die Frage: Stimmen denn wohl die hier erhaltenen Resultate mit denjenigen gehörig überein, zu welchen der Abschnitt III auf einem anderen Wege der Rechnung geführt hat?

Da die hier gewonnenen Formeln ganz andere Elemente beherbergen, als diejenigen, auf die wir im Abschnitte III stießen, so ist auch an eine einfache Übereinstimmung nicht zu denken. Man sieht sich daher genötigt hier und dort Elemente von gleicher Bedeutung herauszuheben, und dann nachzuweisen, daß beide Analysen für dieselben einerlei Werte geben.

Suchen wir solche Elemente auf, so tritt uns zuerst die horizontale Komponente der Spannung entgegen, welche in der ungestörten Kurve, hier c, in den Formeln des Abschnittes III hingegen mh, in der gestörten Kurve, hier $c_1 = c_2$, dort $m(h + \chi)$ heißt. Es ist also

$$c = mh, \quad c_1 = c_2 = m(h + \chi) \text{ also } \chi = \frac{c_1 - c}{m}.$$

Nun gibt aber die dritte der Gleichungen (108) sofort

$$\chi = \frac{c_1 - c}{m} = \frac{h^2 Q(Z - \mathfrak{z})}{2m\mathfrak{z}(XZ - hS)},$$

was mit dem gleichen Ausdrucke (85) im III. Abschnitte vollkommen übereinstimmt.

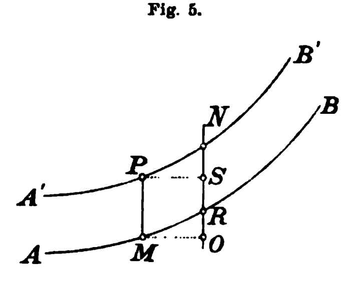
Wir sind hier ferner im Besitze von Formeln für die horizontalen Verschiebungen aller Punkte der Stützlinie, genannt ξ_1 und ξ_2. Der Abschnitt (III) hat keine solchen, mit Ausnahme jedoch eines einzigen Punktes, nämlich des den beiden Abteilungen I und II gemeinschaftlichen, dem die Koordinaten $x = \mathfrak{x}$, $z = \mathfrak{z}$ angehören. Für diesen einen Punkt ist die, ξ'' genannte, horizontale Verschiebung durch eine besondere Formel (86) im Abschnitt III bestimmt. Auch aus unseren allgemeinen Formeln (109) für ξ_1 und ξ_2 läßt sich ξ'' ableiten, wenn man in jeder beliebigen derselben $x = \mathfrak{x}$, $z = \mathfrak{z}$, $s = \mathfrak{s}$ substituiert. Man erhält dadurch

$$\xi'' = \frac{h^2 Q(Z - \mathfrak{z})}{2c\mathfrak{z}^2}\left[\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{z} - h\mathfrak{s}}{XZ - hS} + \frac{\mathfrak{s}}{S}\right],$$

was abermals mit (85) des Abschnittes III übereinstimmt, wenn man erwägt, daß $c = mh$ ist.

Die hier mit ζ_1 und ζ_2 bezeichneten vertikalen Verschiebungen sind von den mit ζ und ζ' im Abschnitt III bekannten dem Sinne nach gründlich verschieden. Den Unterschied macht am besten Fig. 5 anschaulich. Es sei in derselben AB die ungestörte, $A'B'$ die gestörte Stützlinie, M der Punkt xz, der dann nach N abrückend die Verschiebungen $MO = \xi_2$, $ON = \zeta_2$ erleidet. Hier ist $MP = \zeta'$; dasselbe ζ', welches in den Formeln des Abschnittes III angetroffen wird. Hiermit ist es nun jedermann klar, wie sich ζ_2 von ζ' unterscheidet.

Fig. 5.



Man hat nämlich

$$\zeta' = PM = NO - NS = \zeta_2 - \frac{d(z + \zeta')}{dx}\xi_2,$$

oder mit Außerachtlassung des Gliedes höherer Ordnung $\frac{d\zeta'}{dx}\xi_2$

$$(111\text{a}) \qquad \zeta' = \zeta_2 - \frac{dz}{dx}\xi_2 \text{ und ebenso } \zeta = \zeta_1 - \frac{dz}{dx}\xi_1.$$

Diese Bemerkung läßt sich zu einer allgemeinen Regel erweitern, nämlich: Wenn irgend eine, sei es Raumgröße oder auch Kraftgröße beliebigen Namens z. B. ϖ auf den Punkt M Bezug nimmt, d. h. als Funktion von x erscheint; wenn ferner vermöge einer störenden Einwirkung M die Verschiebungen $\xi = MO$, $\zeta = NO$ erleidend nach N rückt, und die Kurve AB in $A'B'$ verwandelt wird, wodurch dann

auch ϖ im Punkte N den neuen Wert $\varpi + \varpi_1$, im Punkte P hingegen den Wert $\varpi + \varpi'$ annimmt — so ist nicht $\varpi_1 = \varpi'$, sondern es ist

$$\varpi' = \varpi_1 - \frac{d\varpi}{dx}\xi.$$

Dies vorausgesetzt bilden wir aus der ersten und vierten der sechs Gleichungen (109) das Binom

$$\zeta_1 - \frac{dz}{dx}\xi_1 = \zeta_1 - \frac{s}{h}\xi_1 = \zeta,$$

so erhalten wir nach einigen Reduktionen und mit gehöriger Rücksicht auf die bekannten Relationen: $h^2 = Z^2 - S^2 = z^2 - s^2 = \mathfrak{z}^2 - \mathfrak{s}^2$

$$\zeta = \frac{hQ}{2c\mathfrak{z}}\left[\frac{Z-\mathfrak{z}}{XZ-hS}(SX - sx - hZ + hz) - \left(1 + \frac{s}{S}\right)\left(1 - \frac{\mathfrak{s}}{S}\right)\right],$$

eine Formel, die ebenfalls mit der (87) des Abschnittes III in vollster Übereinstimmung steht, wenn man nicht vergißt, daß $c = mh$ ist.

Hiermit wäre die vollständigste Kongruenz der Resultate beider Theorien wohl zur Genüge dargetan, was zur Befestigung des Vertrauens in die eine und in die andere gleichermaßen dienlich ist.

Es wird jetzt zweckmäßig sein, unseren Formeln einiges abzufragen: und namentlich: 1. Hat die vertikale Verschiebung ζ, oder ζ_2 im Bereiche der Stützlinie ein oder mehrere Maxima und Minima, und wo befinden sich dieselben? Um Antwort zu erlangen, fassen wir die Formel für ζ, die vierte der (109) ins Auge. Es erscheinen in derselben nur s und z als Variable, d. h. Funktionen von x, alles übrige ist konstant; ζ wird daher ein Maximum oder Minimum, wenn der folgende Ausdruck in ein Maximum oder Minimum übergeht:

$$(\mathfrak{s}Z - \mathfrak{z}S)\left(S + \frac{s}{z}Z\right) - \frac{h^2 S(Z-\mathfrak{z})}{XZ-hS}\left(1 - \frac{Z}{z}\right).$$

Differenzieren wir also diesen nach allem, das heißt nach dem in $\frac{s}{z}$ und $\frac{1}{z}$ enthaltenen x, bemerkend, daß

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{s}{z}\right) = \frac{h}{z^2}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{s}{hz^2}$$

ist und setzen wir den ersten Differentialquotienten der Null gleich, so ergibt sich eine Gleichung des ersten Grades in s, welcher

$$(112) \qquad s = s_1 = \frac{(\mathfrak{s}Z - \mathfrak{z}S)(XZ - hS)}{hS(Z-\mathfrak{z})}$$

entnommen wird. Ebenso hat auch ζ_2 ein Maximum, und zwar für

$$s = s_2 = \frac{(\mathfrak{s}Z + \mathfrak{z}S)(XZ - hS)}{hS(Z - \mathfrak{z})}, \tag{113}$$

woraus durch Subtraktion

$$s_2 - s_1 = \frac{2\mathfrak{z}}{h}\frac{XZ - hS}{Z - \mathfrak{z}}$$

hervorgeht. Wiewohl diese Ausdrücke gerade nicht sehr verwickelt zu nennen sind, so wird doch schwerlich jemand durch ihren bloßen Anblick belehrt werden, wo er das eine in jeder Abteilung der gestörten Kurve vorhandene Maximum zu suchen habe.

Die Entwickelung der $\mathfrak{s}$ und s, Z und S, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{S}$ in Reihen nach aufsteigenden Potenzen von x, X und $\mathfrak{x}$ ist daher auch hier das nächstliegende Mittel, sich eine anschauliche Kenntnis der Sachlage zu verschaffen. Übrigens wird man hier sowohl, wie auch bei allen anderen Sorten von Stützlinien besser tun, die Bedingungen des Maximums oder Minimums von ζ_1 und ζ_2 sowie von ξ_1 und ξ_2 nicht den Gleichungen (109), sondern den Differentialgleichungen (107) zu entnehmen. In der Tat erhält man aus diesen allsogleich den folgenden Wert von $\frac{dz}{dx}$, für welchen sowohl $\frac{d\zeta_1}{dx}$, wie auch $\frac{d\xi_1}{dx}$ der Null gleich werden

$$\frac{dz}{dx} = \frac{s}{h} = \frac{\Theta_1}{1 - \frac{c}{c_1}} = \frac{(\mathfrak{s}Z - \mathfrak{z}S)(XZ - hS)}{h^2 S(Z - \mathfrak{z})},$$

was auch die Formel (112) gegeben hat. Und ebenso wird auch für ein und dasselbe $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d\zeta_2}{dx}$ und $\frac{d\xi_2}{dx}$ gleich Null, und dies zwar für das s der Formel (113). So viel geht aber doch aus der bisherigen Analysis klar hervor, daß, wie groß auch die Ausdehnung des Kettenbogens zwischen zwei festen Punkten angenommen worden ist, ζ_1 sowohl wie auch ζ_2 doch nur ein Maximum und gar kein Minimum haben, ferner, daß an denselben Stellen, an welche die Maxima von ζ_1 und ζ_2 fallen, auch die Minima von ξ_1 und ξ_2 vorfindig sind.

Und da diese Folgerungen aus den noch ganz allgemeinen Differentialgleichungen (107) gezogen sind, so gelten sie auch nicht nur für die Kettenlinie, sondern ganz allgemein.

Um aber über den Ort dieser Maxima und Minima wenigstens einen beiläufigen Aufschluß zu erhalten, erinnern wir uns aus den Ergebnissen des Abschnittes III, daß in erster Annäherung

$$\mathfrak{s}Z \pm \mathfrak{z}S = \pm h(X \pm \mathfrak{x}), \quad XZ - hS = \frac{X^3}{3h},$$
$$Z - \mathfrak{z} = \frac{X^2 - \mathfrak{x}^2}{2h};$$

mithin ebenfalls in erster Annäherung

$$s = s_1 = -\frac{2X^2}{3(X+\mathfrak{x})}$$

und

$$s_2 = \frac{2X^2}{3(X-\mathfrak{x})},$$

besteht. Dies sind aber nahezu dieselben Orte, an welche auch die Maxima der Störungen der Koordinate z, nämlich $\zeta = \zeta_1 - \frac{dz}{dx}\xi_1$ und $\zeta' = \zeta_2 - \frac{dz}{dx}\xi_2$ fallen.

Es drängen sich also in die Nähe eines einzigen Punktes jedesmal 2 Maxima und 1 Minimum zusammen, und zwar einmal die Maxima von ζ_1 und ζ und das Minimum von ξ_1, das andere Mal aber und in der Abteilung II der Kurve die Maxima von ζ_2 und ζ' und das Minimum von ζ_2.

Ist der besonders belastete Punkt der Scheitel der Kurve, für welchen $\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{z} = h$ besteht, so fallen die zwei dreifachen Maximalpunkte in gleiche Entfernungen $s = \pm \frac{2}{3} X$ vom Scheitel. Entfernt sich die besondere Belastung in irgend einer Richtung vom Scheitel, so bewegen sich beide Maximalpunkte in derselben Richtung, und für $\mathfrak{x} = \pm \frac{1}{3} X$ ist der eine von ihnen eben im Begriffe die Grenze der Kettenlinie zu überschreiten; wird $\mathfrak{x}$ numerisch größer als $\frac{1}{3} X$, dann ist dieser Übertritt bereits erfolgt, und es befindet sich nur ein Maximalpunkt mehr im wirklichen Bereiche der Kurve. Der andere ist in eine Entfernung gerückt, in welcher es keine wirkliche Kettenlinie mehr gibt, sondern nur als eine Fortsetzung derselben gedacht werden kann, ist also fiktiv geworden. Mittlerweile nähert sich aber der übriggebliebene wirkliche Maximalpunkt dem Scheitel, aber nur bis auf die Entfernung $\frac{1}{3} X$. Näher vermag er nicht zu kommen und der Scheitel ist daher ein Maximalpunkt zugleich.

Hiermit bietet sich ein ziemlich einfaches Bild dar der Veränderungen, die ein biegsamer Faden durch besondere Belastung eines einzelnen Punktes zu erfahren hat.

Dieses Bild zu vervollständigen hätten wir uns eine zweite Frage zu beantworten, nämlich: Schneidet die gestörte Stützlinie die ursprüngliche, ungestörte irgendwo? In wie vielen Punkten und an welchen bestimmten Stellen? Sie hat im Abschnitte III bereits ihre Erledigung gefunden. Für alle Durchschnittspunkte besteht nämlich entweder $\zeta = 0$ oder $\zeta' = 0$, je nachdem derselbe in der Abteilung I der gestörten Kurve zu suchen ist, oder in der Abteilung II. Nun lehrt aber der

Abschnitt III, daß ξ und ξ' Null werden beziehentlich für folgende Werte von x

$$x = X - \frac{4X^2}{3(X+\mathfrak{x})}, \quad x = \frac{4X^2}{3(X-\mathfrak{x})} - X.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß man bei derselben Gelegenheit, wo man die Orte der Maxima graphisch bestimmt durch Auftragen der ihnen entsprechenden Abszisse x mit dem Zirkel, auch die Durchschnittspunkte mit finden kann auf folgende Weise.

Man trägt die Abszisse x des Maximums in der ihr vermöge des Zeichens zukommenden Richtung zweimal auf. Von der so aufgetragenen doppelten Strecke schneide man, vom Endpunkt derselben angefangen, die halbe Spannweite X ab. Der Rest ist die Abszisse des Durchschnittspunktes.

Jetzt kommt noch die dritte Frage: Welche Teile der Kettenlinie sind bei stattfindender Störung im Steigen, und welche sind im Fallen begriffen? Da die fallenden von den steigenden Strecken jedesmal durch einen Punkt getrennt sind, der weder steigt noch fällt, mithin entweder ein $\zeta_1 = 0$ oder ein $\zeta_2 = 0$, je nachdem die Frage die Abteilung I oder die II angeht, so wird man sich vor allem den Ort dieser im selben Horizonte bleibenden Punkte zu bestimmen haben. Der Anblick der vierten der Gleichungen (109) lehrt nun, daß $\zeta_1 = 0$ wird, wenn

$$(sZ + zS)(\mathfrak{z}Z - \mathfrak{z}S) + \frac{h^2 S(Z-\mathfrak{z})(Z-z)}{XZ - hS} = 0$$

ausfällt, was zuvörderst der Fall ist für $x = -X$, dem $s = -S$ und $z = Z$ entspricht und nur andeutet, daß der feststehende Grenzpunkt seine Höhe nicht ändert. Um nun zu erfahren, ob es nicht noch andere Punkte gebe, bringen wir die Gleichung auf die Form

$$As + B = Cz,$$

annehmend, daß

$$A = Z(\mathfrak{z}Z - \mathfrak{z}S), \quad B = \frac{h^2 SZ(Z-\mathfrak{z})}{XZ - hS}, \quad C = \frac{h^2 S(Z-\mathfrak{z})}{XZ - hS} - S(\mathfrak{z}Z - \mathfrak{z}S)$$

ist. Die erste dieser Gleichungen quadrierend und auf die $z^2 = s^2 + h^2$ Rücksicht nehmend, erhalten wir

$$s^2(A^2 - C^2) + 2ABs + B^2 - C^2h^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat notwendiger Weise eine Wurzel $s = -S$, weil sie diejenige hat, aus welcher sie abgeleitet worden. Die folgende Gleichung ist also eine identische

$$S^2(A^2 - C^2) - 2ABS + B^2 - C^2h^2 = 0.$$

Hiervon die frühere abgezogen

$$(S^2 - s^2)(A^2 - C^2) - 2AB(S + s) = 0$$

oder

$$(S + s)[(S - s)(A^2 - C^2) - 2AB] = 0,$$

woraus entweder $s = -S$, oder $s = S - \frac{2AB}{A^2 - C^2}$ erschlossen wird. Der zweite Wert von s, offenbar der hier gesuchte, ist zwar zur Berechnung geeignet, aber dermaßen undurchsichtig, daß man durch seinen bloßen Anblick über den eigentlichen Ort des Punktes, der weder steigt noch fällt, gar keine Aufklärung erhält, und nicht einmal beurteilen kann, ob derselbe wirklich in die Abteilung, zu der er gehört, falle oder nur fiktiv sei.

Die Reihenentwickelung gibt schnellen Aufschluß und lehrt, daß $\zeta_1 = 0$ und $\zeta_2 = 0$ erhalten werden beziehentlich für:

$$x = -\frac{4X^2}{3(X + \mathfrak{x})} + X \quad \text{und} \quad x = \frac{4X^2}{3(X - \mathfrak{x})} - X.$$

Mithin fallen diejenigen Punkte, die den steigenden Teil der Kurve vom sinkenden abgrenzen, wenn auch nicht mit aller Strenge, so doch nahezu mit den Durchschnitten der gestörten mit der ungestörten Kettenlinie zusammen, und diejenige Seite, auf welcher der Maximalpunkt liegt, vom Durchschnittspunkte an, ist im Steigen, die andere im Sinken begriffen. In jeder der Abteilungen I und II gibt es einen solchen Punkt wirklich. Jede zerfällt also in zwei Teile, einen steigenden und einen sinkenden Teil.

Hiermit hätten wir ein genügend klares Bild der Veränderungen gewonnen, die die Kettenlinie durch die störende Belastung eines einzelnen Punktes erleidet. Das Bild ist wohl nicht genau, weil den durch Reihenentwickelung gewonnenen angenäherten Werten entnommen, allein es ist der Weg, auf welchem man zu präziseren Werten gelangen kann, gezeigt, und der analytische Ausdruck derselben sogar angegeben worden, so daß man sich immerhin auch das genauere Bild, so oft man es braucht, auf dem Wege wirklicher Berechnung wird verschaffen können. Es wird von dem hier vorgeführten selbst im Falle, als die Kettenlinie eine größere Ausdehnung gewinnen und aufhören sollte eine sehr flache Kurve zu sein, voraussichtlich nur wenig verschieden ausfallen. Punkte, welche früher verbunden waren, werden sich ein wenig trennen, aber in den sichtbar hervortretenden Merkmalen wird alles ungeändert bleiben.

Da uns aber die angenäherten Werte hier wesentliche Dienste geleistet haben und auch noch zu leisten versprechen, so mögen hier auch die von $\xi_1 \zeta_2 \xi_1 \xi_2 \lambda_1 \lambda_2$, abgeleitet aus den (109) und (111) mit Hilfe der Formeln (89) des Abschnittes III, folgen.

$$\xi_1 = \frac{Q}{4mh^2}\frac{X-\mathfrak{x}}{X^3}[(X+\mathfrak{x})(X^3+x^3) - X^2(X^2-x^2)],$$

$$\xi_2 = \frac{Q}{4mh^2}\frac{X+\mathfrak{x}}{X^3}[-(X-\mathfrak{x})(X^3-x^3) + X^2(X^2-x^2)],$$

$$\xi_1 - \xi_2 = \frac{Q}{2mh^2}(x^2-\mathfrak{x}^2).$$

$$\zeta_1 = \frac{Q(X+x)(X-\mathfrak{x})}{2mhX^3}[\tfrac{3}{4}(X-x)(X+\mathfrak{x}) - X^2],$$

$$\zeta_2 = \frac{Q(X-x)(X+\mathfrak{x})}{2mhX^3}[\tfrac{3}{4}(X+x)(X-\mathfrak{x}) - X^2],$$

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \frac{Q}{mh}(\mathfrak{x}-x).$$

$$\lambda_1 = \frac{Q(X-\mathfrak{x})}{2hX}\left[\frac{3}{2}\frac{h^2}{X^2}(X+\mathfrak{x}) - x\right],$$

$$\lambda_2 = \frac{Q(X+\mathfrak{x})}{2hX}\left[\frac{3}{2}\frac{h^2}{X^2}(X-\mathfrak{x}) + x\right],$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{Qx}{h}.$$

Gehen wir jetzt, um noch ein letztes Beispiel zur gründlichen Erläuterung unserer Theorie beizubringen, an die Kurve des gleichen Widerstandes als Stützlinie, und suchen wir uns für die Störungen derselben eben solche analytische Formeln zu verschaffen, wie wir für die Kettenlinie getan. Die bereits im Abschnitte I erhaltenen Fundamentalgleichungen der in Rede stehenden Linie des allenthalben gleichen Widerstandes enthält die folgende Gruppe

$$z = -h\log\cos\frac{x}{h}, \quad s = h\log\frac{1+\sin\frac{x}{h}}{\cos\frac{x}{h}},$$

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}\frac{x}{h}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\frac{x}{h}}, \quad \frac{\lambda}{h} = \frac{c}{h\cos\frac{x}{h}} = \mu,$$

$$r = \frac{h}{\cos\frac{x}{h}}, \quad \lambda = mr, \quad m = \frac{c}{h}, \quad \frac{dx\,dz}{ds^2} = \sin\frac{x}{h}\cos\frac{x}{h},$$

$$\frac{dz^2}{dx^2} = \operatorname{tg}^2\frac{x}{h}, \quad \frac{dz^2}{dx\,ds} = \frac{\sin^2\frac{x}{h}}{\cos\frac{x}{h}} = \sin\frac{x}{h}\operatorname{tg}\frac{x}{h}, \quad \frac{dz}{ds^2} = \sin^2\frac{x}{h}.$$

Hieraus erhält man sofort die mit U, V, H und K bezeichneten unbestimmten und bestimmten Integrale

$$
(114) \quad \begin{cases}
U = \int \frac{dz^2}{ds^2} dx = \int \sin^2 \frac{x}{h} dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{h}{2}\sin\frac{2x}{h}\right), \\
V = \int \frac{dx\,dz}{ds^2} dx = \int \sin\frac{x}{h}\cos\frac{x}{h} dx = \frac{h}{2}\sin^2\left(\frac{x}{h}\right), \\
H = \int_{-X}^{X} \frac{dz^2}{ds^2} dx = \frac{1}{2}\left[2X - h\sin\frac{2X}{h}\right], \\
K = \int_{-X}^{X} \frac{dx\,dz}{ds^2} = 0 \\
U_1 = \int_{-X}^{x} \frac{dz^2}{ds^2} dx = \frac{1}{2}\left[x + X - \frac{h}{2}\sin\frac{2x}{h} - \frac{h}{2}\sin\frac{2X}{h}\right], \\
U_2 = \int_{X}^{x} \frac{dz^2}{ds^2} dx = \frac{1}{2}\left[x - X - \frac{h}{2}\sin\frac{2x}{h} + \frac{h}{2}\sin\frac{2X}{h}\right], \\
V_1 = V_2 = \int_{-X}^{x} \frac{dx\,dz}{ds^2} dx = \frac{h}{2}\left[\sin^2\frac{x}{h} - \sin^2\frac{X}{h}\right], \\
H_1 = \int_{-X}^{\mathfrak{x}} \frac{dz^2}{ds^2} dx = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{x} + X - \frac{h}{2}\sin\frac{2X}{h} - \frac{h}{2}\sin\frac{2\mathfrak{x}}{h}\right], \\
H_2 = \int_{X}^{\mathfrak{x}} \frac{dz^2}{ds^2} dx = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{x} - X - \frac{h}{2}\sin\frac{2\mathfrak{x}}{h} + \frac{h}{2}\sin\frac{2X}{h}\right], \\
K_1 = K_2 = \int_{-X}^{\mathfrak{x}} \frac{dx\,dz}{ds^2} dx = \frac{h}{2}\left[\sin^2\frac{\mathfrak{x}}{h} - \sin^2\frac{X}{h}\right].
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen enthalten bereits die Voraussetzung, daß die zum Gegenstand der Rechnung erwählte Stützlinie 2 feste Punkte in gleicher Höhe besitze, denen $x = -X$ und $x = X$ angehören, und daß die Achse der z dieselbe in 2 symmetrische Hälften zerlege. Daher hat man auch $K = K_1 - K_2 = V_1 - V_2 = 0$ und darf von den einfachen Formeln (105) zur Bestimmung von Θ_1, Θ_2 und $1 - \frac{c}{c_1}$ Gebrauch machen; sie geben:

$$
\Theta_1 = -\frac{Q}{c}\,\frac{X - \mathfrak{x} - \frac{h}{2}\sin\frac{2\mathfrak{x}}{h} + \frac{h}{2}\sin\frac{2X}{h}}{2X + h\sin\frac{2X}{h}},
$$

$$\Theta_2 = \frac{Q}{c} \frac{X + \mathfrak{x} + \frac{h}{2}\sin\frac{2\mathfrak{x}}{h} + \frac{h}{2}\sin\frac{2X}{h}}{2X + h\sin\frac{2X}{h}},$$

$$1 - \frac{c}{c_1} = \frac{hQ}{c} \frac{\sin^2\frac{X}{h} - \sin^2\frac{\mathfrak{x}}{h}}{2X - h\sin\frac{2X}{h}} = \frac{hQ}{2c} \frac{\cos\frac{2\mathfrak{x}}{h} - \cos\frac{2X}{h}}{2X - h\sin\frac{2X}{h}}.$$

VI.

Über die Störungen der Gestalt der Elemente körperlicher Bögen, die eine bestimmte Stützlinie besitzen. Differentialgleichungen dieser Störungen.

Die Stützlinien, wie wir sie betrachtet haben, waren mathematische Fiktionen: Kurven ohne Dicke, nur in der Längenrichtung elastisch und der Verlängerung oder Verkürzung selbst der kleinsten Bestandteile absolut widerstrebend, der Biegung jedoch keinen Widerstand entgegenzusetzen fähig, gleichwohl aber begabt mit Masse und der Wirkung der Schwere unterworfen. Ungeachtet nun solch ein Gebilde faktisch nicht realisierbar ist, so bildet doch die vorgetragene Theorie der Stützlinien und ihrer Störungen die Grundlage der Statik sämtlicher wirklicher Tragbögen mit drei räumlichen Dimensionen und nach allen Seiten tätiger Elastizität, vermöge welcher sie nicht nur in der Längenrichtung jeder Verkürzung oder Verlängerung, sondern auch in den Seitenrichtungen jeder Biegung widerstehen. Der Baukünstler verwendet nie einen gegebenen Körper als Tragbogen und sucht zu demselben nachträglich die Stützlinie, sondern er erwählt sich die letztere nach mechanischen oder ästhetischen Gründen und bildet dann den Tragbogen, der diese Stützlinie hat. Es ist rationell, auch in der Theorie diesen Weg zu verfolgen. Wir legen uns daher die Frage vor: Wie findet man zu einer gegebenen Stützlinie den zugehörigen Tragbogen oder die zugehörigen Tragbögen, wenn deren mehrere sind; und wie erkennt man unter denselben denjenigen, der dem jedesmaligen speziellen Zwecke am meisten entspricht.

Der erste Teil dieser Frage ist nicht schwer zu beantworten. Ist nämlich die Stützlinie gegeben, so sind es auch alle diejenigen Größen, die, in der Differentialgleichung derselben erscheinend, die Form derselben Linie begründen, namentlich die Spannung λ und das Gewicht der Kurrenteinheit des Tragbogens μ; mindestens ist die Art der etwaigen Abhängigkeit dieser Größen von einander eine gegebene.

Man lege sich also diese Stützlinie vor. Durch einen beliebigen Punkt M derselben führe man eine auf dem Elemente der Kurve ds

senkrecht stehende Normalebene. Um den Durchschnittspunkt M herum ziehe man eine beliebige Kontur, die ein ebenes Flächenstück begrenzt, dessen Schwerpunkt eben der Punkt M sein muß. Der Flächeninhalt F wird so groß verlangt, daß, wenn man auf demselben als Grundfläche einen zylindrischen oder prismatischen Körper, von der Höhe $= 1$ und demselben Materiale, aus welchem der Tragbogen zu bestehen hat, errichtet, dieser das Gewicht μ besitzt. Bewegt man nun die in Rede stehende Normalebene samt dem darauf abgegrenzten Flächenstücke längs der Kurve so, daß diese Ebene immer eine Normalebene bleibt, der Flächeninhalt des durch die Kontur abgegrenzten Stückes überall und allerorten dem dort geltenden Werte von μ proportional gebildet wird und der Schwerpunkt die Kurve nicht verläßt — so wird die Kontur eine Fläche beschreiben, die man nur mit dem Materiale des Tragbogens auszufüllen braucht, um denjenigen Körper wirklich zu erhalten, der die gegebene Stützlinie besitzt. Die derselben eigentümliche Spannung λ wird dann gleichmäßig auf die Fläche F verteilt erscheinen, womit zugleich die Tragfähigkeit des Körpers in vorteilhaftester Weise verwertet ist.

Bei der Bewegung, durch welche die Oberfläche des Tragbogens erzeugt wird, kann die erzeugende Kontur ihre Gestalt beliebig verändern, sie kann sich in mehrere beliebig zusammenhängende oder unzusammenhängende Konturen spalten, wenn nur die übrigen Bedingungen erfüllt bleiben, das heißt, wenn nur der Flächeninhalt dem μ proportional und der Schwerpunkt auf der Kurve bleibt. Mithin lassen sich zu einer jeden Stützlinie unzählige Tragbogen ausfindig machen von den mannigfaltigsten Formen der normalen Querschnitte.

Wiewohl jedoch alle diese, möglicherweise sehr komplizierten Formen sich in ihren Stützlinien nicht unterscheiden, also auch nicht in den Störungen, die diese Stützlinien durch besondere Belastung einzelner Punkte erleiden, so unterscheiden sie sich doch sehr wesentlich durch Störungen anderer Art, die bisher noch nicht zur Sprache gekommen sind, und die die Gestalt des Tragbogens selbst erleidet, und mit welchen wieder eigentümliche Störungen der inneren Spannungen verknüpft sind, deren analytisch allgemeine Bestimmung sehr wesentlich und bei der Wahl der Gestalt des Tragbogens maßgebend ist.

Gleichwie sich aber zu jeder Stützlinie unzählige Tragbögen finden lassen, so kann man sich auch zu einem jeden solchen Bogen unzählige Kurven suchen, an deren jeder die ganze Bogenmasse gewissermaßen aufgehängt gedacht werden kann. Tatsächlich vorhanden ist aber im Körper unter allen möglichen Umständen nur eine einzige bestimmte der vielen. Denn welchen Einflüssen man immer denselben ausgesetzt

denken mag, stets werden bestimmte Spannungen in seinem Inneren, als auch in jedem normalen Querschnitte davon die Folge sein. Diese werden eine vollständig bestimmte Resultante besitzen mit ebenso vollständig bestimmtem Angriffspunkte, der hier Stützpunkt heißt. Und die Reihenfolge aller dieser Stützpunkte wird eine ganz bestimmte Stützlinie bilden, die nur dann eine Veränderung erfahren kann, wenn neue Be- oder Entlastungen, Veränderungen der Temperatur oder andere Einwirkungen dazu nötigen.

Unter allen möglichen Stützlinien ist aber die zuerst zur Sprache gebrachte vorzüglich hervorzuheben, ausgezeichnet durch das besondere Merkmal, daß die in jedem normalen Querschnitte vorhandene Spannung gleichförmig auf die ganze Fläche derselben verteilt ist, so daß auf einen jeden Quadratzoll Querschnitt eine gleiche Anzahl Zentner Druck oder Spannung entfällt. Diese durch die Schwerpunkte sämtlicher Querschnitte durchgehende Stützlinie, die man besonders bei starken Belastungen zu verwirklichen versuchen wird, weil sie die Tragfähigkeit des Bogens auf das vorteilhafteste verwertet, nennen wir, um sie von allen anderen zu unterscheiden, die *Urlinie*.

Wir legen sie auch unseren gegenwärtigen Untersuchungen zugrunde, indem wir alle anderen, durch welche Veranlassungen immer hervorgerufenen Stützlinien als gestörte Urlinien ansehen. Die besondere Gestalt, die der Körper besitzt, wenn er die Urlinie zur Stützlinie hat, wird dann passend die Urgestalt heißen, und alle übrigen Gestalten, die derselben, bei welchen Veranlassungen immer annehmen kann, als gestörte Urgestalten zu betrachten sein.

Liegt nun ein Tragbogen vor in seiner Urgestalt mit der Urlinie als Stützlinie, so fragt es sich weiter: Welche Veränderungen seines gesamten Zustandes werden eintreten, wenn derselbe an irgend einem Orte mit einem Gewichte Q besonders belastet wird?

Diese Veränderungen, insofern sie ohne Rechnung angebbar sind, werden in Folgendem bestehen. Zunächst wird sich die Stützlinie ändern, und in eine von der Urlinie verschiedene Kurve übergehen, die nicht mehr durch die Schwerpunkte der sämtlichen Querschnitte geht. Hiermit werden aber auch die Spannungen sich nicht nur ändern, sondern sie hören auch auf gleichmäßig auf die Flächen der normalen Querschnitte verteilt zu sein. Hieraus entstehen dann teilweise Volumenveränderungen, nämlich die Ausdehnungen an den Stellen, wo die Spannung zunimmt oder der Druck nachläßt, und Verkürzungen, wo der Druck zunimmt oder die Spannung nachläßt. Infolgedessen werden diese im Innern vor sich gehenden Wirkungen auch äußerlich merkbar auftreten durch Veränderung der Urgestalt in eine andere, die als vor-

nehmlich darin bestehend betrachtet werden kann, daß die Schwerpunkte der normalen Querschnitte die Urlinie verlassen, und eine eigene Mittelkurve bilden, die ja nicht mit der gestörten Stützlinie verwechselt werden darf, und sich allerorten von der Urlinie nur entfernt um eine Größe, die selbst im Vergleich mit den Störungen der Stützlinie als sehr klein anzusehen ist, mithin hier als sehr kleine Größe der zweiten Ordnung zu gelten hat.

In der Urgestalt fallen also sowohl die Stützlinie, wie auch die die Querschnittsschwerpunkte verbindende Mittelkurve mit der einzigen Urlinie zusammen. Tritt aber irgend eine störende Ursache wirkend auf, so trennen sich Stützlinie und Mittelkurve von der Urlinie, oft nach verschiedenen Richtungen, und stellen drei voneinander verschiedene geometrische Gebilde dar, die wir in diesem und in dem folgenden Abschnitte zum Gegenstand unserer Untersuchungen zu machen haben.

Hiermit wird dann notwendigerweise auch die Bestimmung der in jedem normalen Querschnitte vorhandenen, aus einer gleichförmig in eine ungleichförmig, auf die Fläche verteilt, übergehenden Spannung verknüpft sein müssen. Es ist hierbei selbstverständlich, daß die zur Ermittelung der gestörten Stützlinie, der gestörten Mittelkurve und der gestörten Spannungen eingeleiteten Rechnungen womöglich ganz allgemein durchzuführen sind, so daß sie auf alle Formen der Tragbögen anwendbar sind, weil die Resultate eben für die zweckmäßige Wahl dieser Formen maßgebend sein sollen.

Nach diesen einleitenden Auseinandersetzungen gehen wir gerade ans Werk und fangen damit an, den in seiner Urgestalt mit der Urlinie als Stützlinie vorgelegten Tragbogen auf passende Weise in Elemente zu zerlegen. Dies geschieht so: Man teilt zuvörderst die Urlinie in unendlich kleine Bogenelemente ds, durch alle Teilungspunkte legt man Normalebenen, so ist zwischen je zwei nächsten Normalebenen ein Element des Tragbogens enthalten; die zwei dasselbe begrenzenden Normalebenen aber schneiden sich in einer Entfernung vom betreffenden Elemente ds, welche an diesem Orte gleich ist dem Krümmungshalbmesser der Urlinie.

Es ist hier dienlich zur vollständigen Klarheit der Anschauungen zu bemerken, daß die auf solche Weise erzeugten Körperelemente sich zwar dem Gewichte nach von den durch μds in den Differentialgleichungen der Stützlinien bezeichneten Bogengewichtselementen nicht unterscheiden, gleichwohl aber diejenigen nicht sind, die sich an die Kurvenelemente ds als Last angehängt denken lassen, weil die Schwerpunkte dieser etwas keilförmig gestalteten Elemente nicht in die Urlinie fallen.

Wünscht man die Zerlegung des Tragbogens zu machen in wirkliche Repräsentanten dieses μds, das heißt in Stücke, deren Gewicht nicht nur $= \mu ds$, sondern deren Schwerpunkt auch in der Urlinie liegt, so hat man folgendermaßen vorzugehen. Man teilt wieder die Urlinie in Bogenelemente ds, und fängt jetzt an bei dem Elemente ds im Scheitel; durch die beiden Endpunkte desselben legt man nicht Normalebenen, die sich schneiden, sondern Vertikalebenen, die zueinander parallel sind. Auch diese Vertikalen werden ein Körperelement vom Gewichte μds einschließen, dessen Schwerpunkt jedoch in die Urlinie selbst fallen wird. Und so schneidet man, vom Scheitel angefangen für jedes ds vermittelst einer auf der Koordinatenebene der xz senkrechten Ebene ein Stück vom Tragbogen ab vom Gewichte μds und mit dem Schwerpunkte in der Urlinie. Wie dies zu geschehen hat, braucht hier nicht angegeben zu werden, weil es auf die hier vorzutragende Theorie ohne Einfluß ist. Es genügt, um etwaige Bedenken zu zerstreuen, die Möglichkeit einzusehen.

Wir denken uns also die unseren Zwecken vorzugsweise zusagende Einteilung in keilförmige Elemente, deren jedes von zwei Normalebenen begrenzt wird, die sich in einer Entfernung gleich dem Krümmungshalbmesser r vom Elemente ds der Urlinie schneiden, vollbracht. Je zwei nächste dieser Normalebenen bilden an ihrem Durchschnitte einen Winkel $= \frac{ds}{r}$. Wir konzentrieren unsere Aufmerksamkeit auf das dazwischenliegende keilförmige Körperelement. Es mag dasjenige sein, welches den Schluß des Bogens s bildet, dessen Koordinaten in den bisherigen Formeln mit x und z bezeichnet erscheinen. Wir werden den Zustand, in welchem sich das in Rede stehende Körperelement befindet, in der Urgestalt des Tragbogens und in der durch welche Veranlassung immer gestörten genauer zu präzisieren suchen.

Zu diesem Ende veranstalten wir noch eine fernere Einteilung dieses Körperelementes in unendlich kleine Bestandteile, indem wir dasselbe durch ein System von schneidenden Ebenen, die senkrecht auf die Koordinatenebene der x, z und parallel zu ds geführt werden, in unendlich dünnen Lamellen zerlegt denken. Der Ort jeder dieser Lamellen werde bestimmt durch ihre Entfernung u vom Bogenelemente ds; ihre Dicke sei du, ihre Breite, worunter die auf die Ebene der xz senkrechte Dimension zu verstehen, sei v, so ist vdu der Querschnitt, und da die Summe der Querschnitte sämtlicher Lamellen den Totalquerschnitt des Bogens geben muß, so ist offenbar

$$\int v du = F.$$

Der auf die Flächeneinheit z. B. den Quadratzoll entfallende Druck oder die Spannung heiße L, so ist die Spannung in einer Lamelle $Lvdu$, und die Totalspannung in dem ganzen Querschnitte

$$\int Lvdu.$$

In der Urgestalt des Bogens findet sich die Spannung auf die gesamte Querschnittfläche gleichmäßig verteilt, daher L konstant ist; heißt λ der Totalwert, so hat man:

$$\int Lvdu = L\int vdu = LF = \lambda.$$

Die Bestandlamellen eines jeden Körperelementes haben, da letzteres konisch ist, verschiedene Längen; die mittlere hat die Länge ds, die von der Mitte in die Entfernung u fallende besitze die Länge

$$ds' = ds\left(1 + \frac{u}{r}\right).$$

Diese hier angeführten Größen bezeichnen die Dimensionen sowohl, wie auch die Spannung, also den Gesamtzustand, in welchem sich das ins Auge gefaßte Körperelement befindet in der Urgestalt des Tragbogens mit der Urlinie als Stützlinie.

Nun nehmen wir gewisse Einwirkungen an, die vorderhand nicht näher bestimmt zu werden brauchen, sei es, daß Belastungen oder Temperaturveränderungen auftreten und den bestehenden Zustand in einen anderen verwandeln, so besteht dieser andere gewöhnlich in folgendem: Die Gestalt des Tragbogens erleidet eine kleine Veränderung, so klein, daß sie äußerlich nur wenig oder gar nicht wahrgenommen werden kann, und deshalb füglich zur zweiten Größenordnung gezählt werden mag. Dagegen verändern sich die inneren Spannungen namhaft. Sie hören auf gleichförmig die Querschnittsflächen zu überziehen und können sogar in denselben einen Übergang von Spannung zu Druck erleiden. Hiermit im Zusammenhange geht die Urlinie in eine andere Stützlinie über, die sich von der ersteren um ein Stück entfernt, die, wenn Urlinie und daraus gewordene Stützlinie nicht beide fiktive, sondern wirklich wahrnehmbare Kurven wären, sehr bemerklich werden, und vielleicht sogar außer die Masse des Tragbogens hervortreten könnte.

Jedenfalls wird aber die Entfernung der neuen Stützlinie von der Urlinie hier als gegen die Dimensionen der letztgenannten Kurve klein, mit einem Worte als eine Größe der ersten Ordnung angesehen.

Mit den geänderten Spannungen ist im allgemeinen auch eine Formveränderung des Tragbogens und eines jeden Körperelementes desselben verknüpft, also auch desjenigen, welches wir zum Gegenstand unserer besonderen Aufmerksamkeit gemacht haben. Diese Formveränderung findet statt nach Gesetzen, welche für elastische Körper der Erfahrung entnommen worden sind, nämlich:

1. Wenn ein elastischer Körper seine Gestalt zu ändern gezwungen wird, so bleiben ungeachtet dieser Veränderung doch die Teilchen, welche vor derselben auf einer Normale sich befanden, auch nach der Formveränderung auf dieser Normalen. Hieraus folgt, daß auch unser keilförmiges Körperelement nach erlittener Veränderung seiner Gestalt wie vor derselben von zwei Normalebenen begrenzt, also keilförmig bleiben wird.

2. In derjenigen Richtung, in welcher der Druck im Innern eines elastischen Körpers gesteigert wird, erleiden die Fasern eine Verkürzung, die einerseits der Länge dieser Fasern, andererseits aber der Zunahme des Druckes proportional ist. Ebenso bewirkt gesteigerte Spannung eine entsprechende Verlängerung der Fasern. Da bei einem Tragbogen nur vorzugsweise Spannungen auftreten, deren Richtung durch die Stützlinie gegeben ist, die von der Urlinie nur wenig verschieden, also mit derselben aller Orten beinahe gleichlaufend vorausgesetzt wird, so bestimmt die Richtung des Elementes ds der Urlinie auch nahezu diejenige der an diesem Orte waltenden Spannungen.

Diesen Gesetzen zufolge sind wir in den Stand gesetzt, den neuen Zustand des in Rede stehenden körperlichen Elementes anzugeben. Nehmen wir an, die in Folge störender Veranlassungen auftretende neue Stützlinie entfernt sich von der Urlinie im Punkte x, z und in der Richtung der Normale um die Strecke η, die selbst wieder von x abhängig gedacht wird. Die totale Spannung oder der Totaldruck, welcher in der Urlinie λ war, gehe über in $\lambda + \lambda_1$, der Krümmungshalbmesser r, d. h. die Entfernung vom Elemente ds, in welcher sich die zwei, das keilförmige Element begrenzenden Normalebenen schneiden, gehe über in $r + r_1$. Der Elastizitätsmodulus des Stoffes, aus welchem der Bogen besteht, d. h. die Belastung, die hinreichend wäre, die Länge eines Stabes mit dem Querschnitte $= 1$ zu verdoppeln, wenn die natürliche Elastizität, d. h. Proportionalität der Verlängerung mit der Belastung so weit reichte, heiße q. Die Länge des Kurvenelementes ds endlich verwandle sich in $ds(1 \pm \Theta)$, jenachdem entweder Spannung oder Druck vorhanden ist, so kann hieraus allsogleich auch die neue Länge ds'' derjenigen Lamelle abgeleitet werden, die

sich in der Entfernung u von dem Elemente ds befindet, denn man hat:

$$r + r_1 : ds\,(1 \pm \Theta) = r + r_1 + u : ds'', \text{ also}$$

$$ds'' = ds\,(1 \pm \Theta)\left(1 + \frac{U}{r + r_1}\right).$$

Von den beiden Zeichen $\pm$ gilt das obere, wenn die in der Urlinie vorhandene Spannung, das untere, wenn der in der Urlinie vorhandene Druck durch die störende Veranlassung gesteigert wird. Die mit u bezeichnete Entfernung aber wird positiv gedacht auf der konvexen und negativ auf der konkaven Seite der Kurve.

Im Falle vorhandener Spannung erleidet nun offenbar die in Betracht gezogene Lamelle eine Ausdehnung $ds'' - ds'$, die auf die Längeneinheit zurückgeführt einen Betrag ausweist:

$$\frac{ds'' - ds'}{ds'} = \frac{ds''}{ds'} - 1 = (1 + \Theta)\left(1 + \frac{r_1}{r + u}\right)\frac{r}{r + r_1} - 1,$$

oder, wenn man die Glieder höherer Ordnung wegläßt,

$$\frac{ds''}{ds'} - 1 = \Theta - \frac{r_1 u}{r\,(r + u)}.$$

Hiermit wird aber die Spannung an dieser Stelle gesteigert um die folgende auf die Flächeneinheit bezogene Größe:

$$q\left(\frac{ds''}{ds'} - 1\right) = q\left(\Theta - \frac{r_1 u}{r\,(r + u)}\right),$$

und da ihr ursprünglicher Wert in der Urlinie L war, so wird vermöge der erlittenen Störung die an jedem beliebigen Punkte waltende, auf die Flächeneinheit bezogene Spannung sein

$$L + q\left(\Theta - \frac{r_1 u}{r\,(r + u)}\right).$$

Da indessen der Querschnitt der in Rede stehenden Lamelle nicht $= 1$, sondern $= v du$ ist, so besteht nunmehr in derselben die Spannung:

$$\left[L + q\left(\Theta - \frac{r_1 u}{r\,(r + u)}\right)\right] v du.$$

Mithin wird man in allen zu einem und demselben Querschnitt gehörigen Lamellen die Totalspannung antreffen:

$$(115) \qquad \lambda + \lambda_1 = \int v du \left[L + q\left(\Theta - \frac{r_1 u}{r\,(r + u)}\right)\right].$$

Im entgegengesetzten Falle vorhandenen Druckes tritt eine Verkürzung der oftgenannten Lamelle ein im Betrage: $ds' - ds''$; das gibt eine

Verkürzung der Maßeinheit um $1 - \frac{ds''}{ds'}$, dem wieder eine Steigerung des Druckes entspricht, der auf die Flächeneinheit entfällt, von

$$q\left(1 - \frac{ds''}{ds'}\right) = q\left(\Theta + \frac{r_1 u}{r(r+u)}\right),$$

so daß dieser Druck, der früher L gewesen, nunmehr übergeht in

$$L + q\left(\Theta + \frac{r_1 u}{r(r+u)}\right).$$

Dieser Ausdruck mit $v du$ multipliziert, gibt den Druck auf den Querschnitt einer Lamelle, und dann integriert, denjenigen auf die gesamte Querschnittsfläche des Tragbogens

$$\lambda + \lambda_1 = \int v du \left[L + q\left(\Theta + \frac{r_1 u}{r(r+u)}\right)\right]. \tag{116}$$

Die hier zur Sprache gebrachten lamellenweis verteilten Spannungen bilden in jedem Querschnitte ein System paralleler Kräfte, welchen ein einziger Mittel- oder Stützpunkt angehört; dieser ist vorausgesetztermaßen in der Urlinie der Punkt x, z dieser Kurve, in der gestörten Stützlinie aber ein anderer, von dem x, z in der Richtung der Normale um die Strecke η entfernter Punkt. Um diese beiden Punkte also müssen sich die parallelen Kräfte im ungestörten, und im gestörten Tragbogen im Gleichgewichte befinden, also eine Momentensumme Null geben.

Es ist aber im ungestörten Bogen die Spannung in einer Lamelle $Lvdu$, ihr Moment $Lvudu$, also die Momentensumme $\int Lvudu = 0$.

Im gestörten Bogen geht die in der Lamelle vorhandene Spannung oder der allda vorfindliche Druck entweder in die (115) oder in die (116) über, und man erhält das Moment dieser Kräfte durch Multiplikatiou derselben mit $u - \eta$; man hat also entweder:

$$\int \left[L + q\left(\Theta - \frac{r_1 u}{r(r+u)}\right)\right](u - \eta)\, v du = 0 \tag{117}$$

oder

$$\int \left[L + q\left(\Theta + \frac{r_1 u}{r(r+u)}\right)\right](u - \eta)\, v du = 0, \tag{118}$$

je nachdem entweder Spannung oder Druck vorhanden ist. Auch η wird so wie u positiv gedacht auf der konvexen Seite der Urlinie, und negativ auf der konkaven.

Da die Kenntnis der veränderten Form des konischen Körperelementes der Zweck dieser Betrachtungen ist, und da diese durch die

Größen Θ und r_1 bedingt wird, so sind die Werte von Θ und r_1 der eigentliche Zweck der bisherigen Betrachtungen. Man entnimmt sie den Gleichungen (115) und (116) oder den (117) und (118), bei deren Entwickelung Integrale nach der Variablen u erscheinen, die sämtlich auf den ganzen, durch den Punkt x, z gehenden Querschnitt auszudehnen sind, und die der Kürze wegen bezeichnet werden:

$$\int v\,du = F \qquad \int uv\,du = 0$$

$$\int \frac{uv\,du}{r+u} = -G, \text{ so ist } \int \frac{u^2 v\,du}{r+u} = rG.$$

Um die Richtigkeit der letzten Formel einzusehen bemerke man, daß

$$\int \frac{u^2 v\,du}{r+u} + \int \frac{ruv\,du}{r+u} = \int \frac{(r+u)\,uv\,du}{r+u} = \int uv\,du = 0,$$

das heißt

$$\int \frac{u^2 v\,du}{r+u} - rG = 0, \text{ also } \int \frac{u^2 v\,du}{r+u} = rG,$$

was zu beweisen war.

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen gehen die für Spannung geltenden Formeln (115) und (117) über in

$$\lambda + \lambda_1 = LF + q\Theta F + \frac{qr_1}{r}\,G$$

$$0 = -qr_1 G - \eta\,(\lambda + \lambda_1),$$

woraus mit Rücksicht auf $\lambda = LF$ folgt

$$r_1 = -\frac{(\lambda+\lambda_1)\,\eta}{qG}, \quad \Theta = \frac{{}_1 r\lambda + (\lambda+\lambda_1)\,\eta}{qrF}. \tag{119}$$

Und ebenso zieht man aus den für Druck geltenden Gleichungen (116) und (118)

$$r_1 = \frac{(\lambda+\lambda_1)\,\eta}{qG}, \quad \Theta = \frac{r\lambda_1 + (\lambda+\lambda_1)\,\eta}{qrF}. \tag{120}$$

Hiermit wäre alles bestimmt, was der Formveränderung der Körperelemente angehört, und es ist weiter zu untersuchen, welcher neue Tragbogen sich aus seinen so geänderten Bestandteilen zusammensetze, und in was der geänderte Bogen seiner Form nach von dem ursprünglichen unterschieden sei. In der Richtung der Normalen findet nun eine erhebliche Änderung nicht statt, weil in dieser Richtung keine bedeutenderen Kräfte, d. h. keine mit der inneren Spannung λ vergleichbaren vorhanden sind. Die ganze Veränderung, die der Tragbogen erleidet, ist mithin im wesentlichen darauf zurückzuführen, daß die

Mittelkurve, welche die Schwerpunkte sämtlicher Querschnitte verbindet, sich von der Urlinie trennt um die Größe τ, die den hier gemachten Voraussetzungen gemäß zur zweiten Ordnung im allgemeinen gehörig ist.

Zieht man zu den entsprechenden Punkten der Urlinie und der daraus hervorgegangenen Mittelkurve Tangenten, so werden diese einen sehr kleinen Winkel mit einander machen, welcher φ heißen möge; τ und φ sind mithin der nächste Gegenstand unserer Untersuchung.

Es besteht zwischen ihnen ein analytischer Zusammenhang, gegeben durch die Gleichung

$$\varphi = \frac{d\tau}{ds}, \tag{121}$$

τ ist also, sowie auch η, gewissermaßen eine Ordinate, die auf die Urlinie als krummlinige Abszissenachse Bezug nimmt, und auch so wie η in der Richtung der Normale gezählt, und auf der konvexen Seite der Kurve positiv angenommen wird. φ hat das Zeichen von $\frac{d\tau}{ds}$.

Um nun eine Gleichung für φ zu gewinnen, denken wir uns den Tragbogen in der Urgestalt sowohl, wie auch gleichzeitig in der gestörten, ersteren aus seinen keilförmigen Urelementen, letzteren aus seinen veränderten Bestandteilen allmählich zusammengesetzt; mithin auch die Urlinie aus ihren Bogenelementen ds, und gleichzeitig die Mittelkurve aus den ihrigen $ds\,(1 \pm \Theta)$ zusammengefügt. Diese Arbeit sei bis zur Spitze M des Bogens s der Urlinie gediehen, welcher die Koordinaten x und z angehören, und bis zu dem entsprechenden Punkte M' der Mittelkurve, den man sich, um etwas Präziseres vor Augen zu haben, auf der konvexen Seite der Urlinie denken mag; zu M und M' führe man die Tangenten MT und $M'T'$, die unter sich den Winkel φ einschließen. An den Endpunkt M des Urbogens setze man nun das folgende keilförmige Körperelement an, also auch das folgende Bogenelement ds der Urlinie; diese wird im Bereiche dieses $ds = MN$ eine Wendung um den Winkel $\frac{ds}{r}$ vollbringen, so daß die zum Punkte N gezogene Tangente NS mit der MT einen Winkel $\frac{ds}{r}$, also mit der $M'T'$ einen Winkel $\varphi + \frac{ds}{r}$ bilden wird.

Endlich setze man auch an das Ende M' des gestörten Bogens das folgende keilförmige Körperelement, und damit auch das folgende Bogenelement $ds\,(1 \pm \Theta) = M'N'$ der Mittelkurve an. Diese vollbringt hier im Bereiche dieses Bogenelementes und in demselben Sinne, wie die Urlinie eine Wendung um den Winkel $\frac{ds\,(1 \pm \Theta)}{r + r_1}$, so zwar, daß die zum Punkte N' der Mittelkurve gezogene Tangente $N'S'$ mit der $M'T$

einen Winkel $\frac{ds(1+\Theta)}{r\pm r_1}$ einschließen wird. Offenbar ist also der zwischen die Tangenten NS und $N'S'$ fallende Winkel

$$\varphi + d\varphi = \varphi + \frac{ds}{r} - \frac{ds(1\pm\Theta)}{r+r_1}$$

also

$$d\varphi = \frac{ds}{r} - \frac{ds(1\pm\Theta)}{r+r_1} = \mp\frac{\Theta ds}{r} + \frac{r_1 ds}{r^2}.$$

Oder wenn man die bereits ermittelten Werte (119) oder (120) für Θ und r_1 einführt

$$d\varphi = \mp\left[\frac{\lambda_1}{qrF} + \frac{(\lambda+\lambda_1)\eta}{qr^2}\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{G}\right)\right]ds. \tag{122}$$

Das obere der beiden Zeichen $\mp$ gilt für Spannung, das untere für Druck. Dieser Gleichung wird man auf dem Wege der Integration φ entnehmen. Dann wird aber die Gleichung (121) auf demselben Wege

$$\tau = \int\varphi ds = \varphi s - \int s d\varphi$$

liefern. Und hiermit wird man alles haben, was zur Bestimmung der gestörten Gestalt des Tragbogens erforderlich ist. Nur ist hier zu bemerken, daß meistenteils nicht die in der Richtung der Normale gezählte Entfernung η der gestörten Stützlinie von der Urlinie als gegebene Größe oder Resultat vorangegangener Rechnung erscheint, sondern daß gewöhnlich die Verschiebungen, die der Punkt x, z erleidet, etwa ξ_1 und ζ_1, oder auch der in der Richtung der x Achse gemessene Abstand dieses Punktes von der gestörten Kurve, ζ genannt, die Daten der Aufgabe vorstellen.

Diese letzteren hängen durch die Gleichungen (111a) des Abschnittes V. zusammen, nämlich

$$\zeta = \zeta_1 - \frac{dz}{dx}\xi_1,$$

und sind leicht mit dem η unserer vorliegenden Formeln in Verbindung zu bringen.

Es ist nämlich η die Projektion des ζ auf die Normale und wird erhalten, wenn man das in der Richtung der z Achse gezählte ζ mit dem Kosinus des Winkels multipliziert, den die z Achse mit der Normale einschließt, und welcher dem zwischen der x Achse und der Tangente gleich, mithin $\frac{dx}{ds}$ ist. Nur ist hierbei nicht aus den Augen zu verlieren, daß wir ζ auf der konkaven Seite der Kurve bisher immer positiv hatten, η dagegen vorausgesetztermaßen auf der konvexen Seite positiv ist. Man hat also

$$\eta = -\zeta\frac{dx}{ds} = \xi_1\frac{dz}{ds} - \zeta_1\frac{dx}{ds}.$$

Irgend einen dieser beiden Werte also, denjenigen, zu welchem man eben gelangt, wird man anstatt η in der Formel (122) verwenden; λ_1 ist ebenfalls in den meisten Fällen eine gegebene Größe.

G jedoch ist ein durch Integration nach U abzuleitendes Element von r abhängig und, wenn man in geschlossener Form integrieren will, versehen mit einem Logarithmus. Zieht man nun in Erwägung, daß dieser Logarithmus in den Nenner fällt, und daß man den so gestalteten Ausdruck noch zweimal der Integration zu unterwerfen hat, so erscheint es sehr wünschenswert, diese Transzendente zu beseitigen. Dies geschieht gleich von Haus aus durch Entwicklung des Bruches $\frac{1}{r+u}$ in eine Reihe, die sehr konvergiert, weil u gegen r jederzeit sehr klein vorausgesetzt werden kann. Es ist

$$\frac{1}{r+u} = \frac{1}{r} - \frac{u}{r^2} + \frac{u^2}{r^3} - \frac{u^3}{r^4} + \frac{u^4}{r^5} - \cdots$$

mithin

$$-G = \frac{1}{r}\int uv\,du - \frac{1}{r^2}\int u^2 v\,du + \frac{1}{r^3}\int u^3 v\,du - \frac{1}{r^4}\int u^4 v\,du + \cdots$$

Das erste dieser Integrale ist immer der Null gleich, aber auch die anderen mit dem Zeichen + vorkommenden und mit ungeraden Potenzen von u und r versehenen sind kleinen aus positiven und negativen Gliedern zusammengesetzten Summen äquivalent und verschwinden in aller Strenge, wenn alle Querschnitte des Tragbogens symmetrisch ober und unter der Urlinie angeordnete Flächengestalten sind. In diesem Falle also hat man

$$G = \frac{1}{r^2}\int u^2 v\,du + \frac{1}{r^4}\int u^4 v\,du + \cdots$$

Suchen wir über die vorzüglichsten dieser symmetrischen Formen und die ihnen entsprechenden Werte von F und G eine kleine Übersicht zu gewinnen. Der Querschnitt des Tragbogens sei also:

1. ein rechtwinkliges Parallelogramm mit der Breite v, in der Höhenrichtung von $u = -k$ bis $u = k$ ausgedehnt, also die Höhe $2k$ besitzend, was die Querschnittsfläche $F = 2vk$ gibt; da überdies

$$\int_{-k}^{k} u^2 v\,du = \frac{2}{3} vk^3 \quad \text{und} \quad \int_{-k}^{k} u^4 v\,du = \frac{2}{2} vk^5,$$

daher

$$F = 2vk, \quad G = \frac{1}{15}\frac{Fk^2}{r^4}(5r^2 + 3k^2$$

so ergibt sich daraus

$$\frac{1}{F} + \frac{1}{G} = \frac{1}{F}\frac{15r^4 + 5k^2r^2 + 3k^4}{k^2(5r^2 + 3k^2)}.$$

Wir multiplizieren hier Zähler und Nenner mit $5r^2 - rk^2$ und lassen die Glieder von der Ordnung k^4 gegen r^4 weg, so erhalten wir den geschmeidigeren Ausdruck

$$(123) \qquad \frac{1}{F} + \frac{1}{G} = \frac{1}{Fk^2}(3r^2 - \tfrac{4}{5}k^2), \quad F = 2vk.$$

Diese Formeln gelten für ein volles rechtwinkliges Parallelogramm als Querschnitt. Diese Form ist für alle Querschnitte des obenerwähnten Charakters allgemein gültig. In der Tat setze man

$$\int u^2 v\,du = p, \quad \int u^4 v\,du = q,$$

so wird

$$G = \frac{p}{r^2} + \frac{q}{r^4} = \frac{pr^2 + q}{r^4},$$

also

$$\frac{1}{F} + \frac{1}{G} = \frac{1}{F} + \frac{r^4}{pr^2 + q} = \frac{1}{F} + \frac{r^4(pr^2 - q)}{p^2r^4 - q^2}.$$

Vernachlässigt man jetzt q^2 gegen p^2r^4 und bezeichnet überdies

$$C = \frac{1}{p}, \quad D = \frac{q}{p^2} - \frac{1}{F},$$

so wird

$$\frac{1}{F} + \frac{1}{G} = Cr^2 - D,$$

ein in der Regel genügend angenäherter Wert, mit welchem auch (123) in der Form übereinstimmt. Der Querschnitt sei nun

2. Ein mit dem Halbmesser ϱ beschriebener Kreis, dessen Mittelpunkt in der Urlinie liegt. Die Gleichung eines solchen Kreises ist

$$u^2 + \frac{v^2}{4} = \varrho^2, \text{ also } v = 2\sqrt{\varrho^2 - u^2}$$

$$p = 2\int_{-\varrho}^{\varrho} u^2\sqrt{\varrho^2 - u^2}\cdot du, \quad q = 2\int_{-\varrho}^{\varrho} u^4 du\sqrt{\varrho^2 - u^2}.$$

Hier kann man allenfalls eine neue Veränderliche einführen mittelst der Substitution

$$u = \varrho\sin\psi, \quad \sqrt{\varrho^2 - u^2} = \varrho\cos\psi, \quad du = \varrho d\varphi\cos\psi$$

$$p = 2\varrho^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\psi\cos^2\psi d\psi = \frac{\varrho^4}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\psi\, d\psi = \frac{\varrho^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\psi)\, d\psi = \tfrac{1}{4}\pi\varrho^4$$

$$q = 2\varrho^6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\psi\cos^2\psi\, d\psi = \tfrac{1}{8}\pi\varrho^6$$

hieraus

$$(124)\qquad \begin{cases} C = \frac{1}{p} = \frac{4}{\pi\varrho^4}, \quad D = \frac{q}{p^2} - \frac{1}{F} = \frac{1}{\pi\varrho^2} \\ F = \pi\varrho^2, \quad \frac{1}{F} + \frac{1}{G} = \frac{1}{F\varrho^2}(4r^2 - \varrho^2) \end{cases}$$

Diese Formeln gelten für den kreisförmigen Querschnitt und zwar für den vollen mit dem Halbmesser ϱ beschriebenen Kreis. Nun kommt

3. der elliptische Querschnitt. Seine vertikale Halbachse mag mit a, die horizontale mit b bezeichnet werden. Die Gleichung der Kontur ist

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{4b^2} = 1, \quad v = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - u^2},$$

also

$$p = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a} u^2 du \sqrt{a^2 - u^2}, \quad q = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a} u^4 du \sqrt{a^2 - u^2},$$

und auf demselben Wege der Rechnung wie beim Kreise

$$(125)\qquad \begin{aligned} &p = \tfrac{1}{4}\pi a^3 b, \quad q = \tfrac{1}{8}\pi a^5 b, \quad F = \pi ab, \\ &C = \frac{1}{p} = \frac{4}{\pi a^3 b} = \frac{4}{Fa^2}, \quad D = \frac{q}{p^2} - \frac{1}{F} = \frac{1}{F} \\ &\frac{1}{F} = \frac{1}{\pi ab}, \quad \frac{1}{F} + \frac{1}{G} = \frac{1}{Fa^2}\left[4r^2 - a^2\right]. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten für die volle Ellipse.

Nun nehmen wir noch

4. der Tragebogen bestehe aus einem Rohre, dessen Querschnitt ein kreisförmiger Ring mit dem Halbmesser ϱ der äußeren, und ϱ' der inneren Fläche, also der Wanddicke $\varrho - \varrho'$ ist.

Es ist nicht notwendig, die auf diesen Fall bezüglichen F, p, q durch Integration zu bestimmen, es genügt zu bemerken, daß, wenn man von den auf den äußeren mit dem Halbmesser ϱ beschriebenen Kreis bezüglichen Werten F, p, q diejenigen subtrahiert, die dem inneren mit dem Halbmesser ϱ' verzeichneten Kreise angehören, offenbar die F, p, q für den ringförmigen Querschnitt als Rest übrig bleiben müssen. Mithin ist für den Ring

$$(126)\qquad \begin{aligned} &p = \tfrac{1}{4}\pi(\varrho^4 - \varrho'^4) = \tfrac{1}{4}F(\varrho^2 + \varrho'^2), \\ &q = \tfrac{1}{8}\pi(\varrho^6 - \varrho'^6) = \tfrac{1}{8}F(\varrho^4 + \varrho^2\varrho'^2 + \varrho'^4) \\ &C = \frac{4}{F(\varrho^2 + \varrho'^2)}, \quad D = \frac{2(\varrho^4 + \varrho^2\varrho'^2 + \varrho'^4)}{F(\varrho^2 + \varrho'^2)^2} - \frac{1}{F} = \frac{\varrho^4 - \varrho'^4}{F(\varrho^2 + \varrho'^2)^2} \\ &F = \pi(\varrho^2 - \varrho'^2), \quad \frac{1}{F} + \frac{1}{G} = \frac{1}{F(\varrho^2 + \varrho'^2)}\left[4r^2 - \frac{\varrho^4 + \varrho'^4}{\varrho^2 + \varrho'^2}\right]. \end{aligned}$$

Die Formeln gelten für den kreisrunden Ring als Querschnitt.

Jetzt wollen wir

5. den Tragbogen aus zweien zusammensetzen, deren jeder einen kreisförmigen Querschnitt, mit dem gleichen Radius ϱ beschrieben, besitzen soll. Die Mittelpunkte dieser Kreise befinden sich in gleichen Abständen k von der Urlinie und ober und unter derselben, sodaß der Schwerpunkt, wie es sein muß, in die Urlinie fällt. Der Flächeninhalt F des Gesamtquerschnittes ist die Summe zweier Kreisflächen $= 2\pi\varrho^2$, und p sowohl wie q erscheint als Summe von zwei Integralen, nämlich:

$$p = \int\limits_{-k-\varrho}^{-k+\varrho} u^2 v_1\, du + \int\limits_{k-\varrho}^{k+\varrho} u^2 v_2\, du, \quad q = \int\limits_{-k-\varrho}^{-k+\varrho} u^4 v_1\, du + \int\limits_{k-\varrho}^{k+\varrho} u^4 v_2\, du.$$

Die Gleichungen der zwei Kreise, des oberen und unteren, sind aber

$$(u-k)^2 + \frac{v_2^2}{4} = \varrho^2 \text{ und } (u+k)^2 + \frac{v_1^2}{4} = \varrho^2,$$

$$v_2 = 2\sqrt{\varrho^2 - (u-k)^2}, \quad v_1 = 2\sqrt{\varrho^2 - (u+k)^2}.$$

Nachdem diese Werte von v_2 und v_1 in die Formeln für p und q eingeführt worden, ändert man die Variable u in eine andere w um, und zwar in einem jeden ersten der die Werte von p und q bildenden Integrale durch die Substitution $u = w - k$, im zweiten durch $u = k + w$, so wird

$$p = 2\int\limits_{-\varrho}^{\varrho} (w+k)^2 \sqrt{\varrho^2 - w^2}\, dw + 2\int\limits_{-\varrho}^{\varrho} (w-k)^2 \sqrt{\varrho^2 - w^2}\, dw$$

$$= 4\int\limits_{-\varrho}^{\varrho} (k^2 + w^2)\sqrt{\varrho^2 - w^2}\, dw.$$

$$q = 2\int\limits_{-\varrho}^{\varrho} (w+k)^4 \sqrt{\varrho^2 - w^2}\, dw + \int\limits_{-\varrho}^{\varrho} (w-k)^4 \sqrt{\varrho^2 - w^2}\, dw$$

$$= 4\int\limits_{-\varrho}^{\varrho} (k^4 + 6k^2w^2 + w^4)\sqrt{\varrho^2 - w^2}\, dw.$$

Man integriere hier nach Belieben, etwa wieder durch Einführung trigonometrischer Funktionen $w = \varrho \sin\psi$, und man wird erhalten

$$p = 2\pi\varrho^2(k^2 + \tfrac{1}{4}\varrho^2), \quad q = 2\pi\varrho^2(k^4 + \tfrac{3}{2}k^2\varrho^2 + \tfrac{1}{8}\varrho^4),$$

$$(127) \qquad C = \frac{1}{F(k^2 + \frac{1}{4}\varrho^2)}, \quad D = \frac{1}{F}\,\frac{k^2\varrho^2 + \frac{1}{16}\varrho^4}{\left(k^2 + \frac{\varrho^2}{4}\right)^2},$$

$$F = 2\pi\varrho^2, \quad \frac{1}{F} + \frac{1}{G} = \frac{1}{F(k^2 + \frac{1}{4}\varrho^2)}\left[r^2 - \frac{\varrho^2(k^2 + \frac{1}{16}\varrho^2)}{k^2 + \frac{1}{4}\varrho^2}\right].$$

Diese Werte gelten für den vollen Doppelbogen mit kreisförmigem Querschnitte. Es versteht sich von selbst, daß man sich die beiden Bestandbögen solidarisch, etwa durch ein zweckmäßig konstruiertes Gitter verbunden denken muß, wenn sie einen einzigen Tragbogen vorstellen sollen. Dieses Gitter wird aber nicht als tragfähiger Bestandteil aufgefaßt, sondern kommt nur als Last in Rechnung.

6. Wenn dieselben in der Entfernung k von der Urlinie verlaufenden Bestandbögen Rohre sind, mit kreisrundem Querschnitte mit dem Halbmesser ϱ der äußeren, ϱ' der inneren Fläche, also $\varrho - \varrho'$ die Wanddicke, so ist es wieder nicht notwendig F, p, q durch eine neue Integration zu ermitteln, sondern man zieht nur von den Integralwerten, die sich auf die äußere Oberfläche beziehen, diejenigen ab, die der inneren Fläche angehören, und erhält

$$F = 2\pi(\varrho^2 - \varrho'^2), \quad p = 2\pi\varrho^2(k^2 + \tfrac{1}{4}\varrho^2) - 2\pi\varrho'^2(k^2 + \tfrac{1}{4}\varrho'^2)$$
$$= 2\pi(\varrho^2 - \varrho'^2)[k^2 + \tfrac{1}{4}(\varrho^2 + \varrho'^2)],$$
$$q = 2\pi\,(\varrho^2 - \varrho'^2)\,[k^4 + \tfrac{3}{2}k^2\,(\varrho^2 + \varrho'^2) + \tfrac{1}{8}\,(\varrho^4 + \varrho^2\varrho'^2 + \varrho'^4)]$$

$$C = \frac{1}{F(k^2 + \frac{1}{4}(\varrho^2 + \varrho'^2))}, \quad D = \frac{1}{F}\,\frac{k^2(\varrho^2 + \varrho'^2) + \frac{1}{16}(\varrho^4 + \varrho'^4)}{[k^2 + \frac{1}{4}(\varrho^2 + \varrho'^2)]^2},$$
$$(128) \qquad F = 2\pi(\varrho^2 - \varrho'^2),$$
$$\frac{1}{F} - \frac{1}{G} = \frac{1}{F(k^2 + \frac{1}{4}(\varrho^2 + \varrho'^2))}\left[r^2 - \frac{k^2(\varrho^2 + \varrho'^2) + \frac{1}{16}(\varrho^4 + \varrho'^4)}{k^2 + \frac{1}{4}(\varrho^2 + \varrho'^2)}\right].$$

Diese Werte gelten für das Doppelrohr als Tragbogen.

7. Der Tragbogen bestehe wieder aus zwei getrennten Bögen, die in der Entfernung $k - v$ von der Urlinie ober und unter derselben parallel laufen, beide dem Querschnitte nach quadratisch mit der Höhe und Breite v, also dem Totalquerschnitte $F = 2v^2$. Auch hier erhält man p und q ohne Integration, indem man von den Werten $\frac{2}{3}vk^3$, und $\frac{2}{5}vk^5$, die zum Parallelogramm von der Höhe $2k$, Breite v gehörig sind, die zur Höhe $2(k - v)$ gehörigen $\frac{2}{3}v(k - v)^3$ und $\frac{2}{5}v(k - v)^5$ subtrahiert, sodaß

$$p = \tfrac{2}{3}v(k^3 - (k - v)^3) = \tfrac{2}{3}v^2(3k^2 - 3kv + v^2) = F(k^2 - kv + \tfrac{1}{3}v^2)$$
$$q = \tfrac{2}{5}v(k^5 - (k - v)^5) = \tfrac{2}{5}(5k^4 - 10k^3v + 10k^2v^2 - 5kv^3 + v^4)$$
$$q = F(k^4 - 2k^3v + 2k^2v^2 - kv^3 + \tfrac{1}{5}v^4)$$

$$(129) \qquad C = \frac{1}{F(k^2 - kv + \frac{1}{3}v^2)}, \quad D = \frac{\frac{1}{3}v^2(k^2 - kv + \frac{4}{15}v^2)}{F(k^2 - kv + \frac{1}{3}v^2)^2}$$
$$F = 2v^2, \quad \frac{1}{F} + \frac{1}{G} = \frac{1}{F(k^2 - kv + \frac{1}{3}v^2)}\left[r^2 - \frac{\frac{1}{3}v^2(k^2 - kv + \frac{4}{15}v^2)}{k^2 - kv + \frac{1}{3}v^2}\right].$$

Diese Formeln gelten für den vollen Doppelbogen von quadratischem Querschnitte.

Es wäre leicht, die beispielsweise angeführten Querschnittsformen noch um eine beliebige Zahl komplizierterer zu vermehren. Wir sehen aber aus ihnen allen, daß das in der Fundamentalgleichung (123) vorkommende Binom $\frac{1}{F} + \frac{1}{G}$ jederzeit einen Wert erhält, der die folgende Gestalt trägt

$$\frac{1}{F} + \frac{1}{G} = \frac{1}{F}(\mathfrak{a} r^2 + \mathfrak{b}).$$

Führt man diesen ein in die (122), so geht sie über in die folgende Differentialgleichung

$$d\varphi = \pm \frac{ds}{qFr^2}[\lambda_1 r + (\lambda + \lambda_1)(\mathfrak{a} r^2 + \mathfrak{b})\eta], \tag{130}$$

die, sowie die (122) mit dem oberen Zeichen für Spannung, mit dem unteren hingegen für Druck gilt.

Die aufmerksame Betrachtung dieser Fundamentalgleichung macht einigermaßen den Nutzen ersichtlich, den die Entwickelung des mit G bezeichneten Integrales in Reihen nach absteigenden Potenzen von r gewährt, und der nicht nur darin besteht, daß der ferneren Integration hinderliche Transzendenten vermieden werden, sondern, was noch wichtiger ist, auch noch darin, daß im Falle die Kettenlinie Stützlinie ist, F, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ konstant ausfallen, oder mindestens angenommen werden können. Wenn dagegen die Linie des gleichen Widerstandes, in welcher F dem λ proportional ist, als Stützlinie gewählt wird, so werden $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ infolge passender Anordnung der Dimensionen zu konstanten Größen gemacht werden können.

Dies gestattet aber für eine jede Stützlinie und die unendlich vielen, verschieden gestalteten Tragbögen, die diese Stützlinie gemeinschaftlich besitzen, die ganze Rechnung allgemein mit unbestimmt gelassenen Konstanten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zu Ende zu führen, und erst im letzten Resultate die jeder Form des Querschnittes entsprechenden Werte von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zu substituieren.

Es dient sehr zum genauen Verständnisse der Formel (123) zu bemerken, daß für eine und dieselbe Stützlinie die mit F, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichneten Größen noch unendlich viele konstante und veränderliche Werte anzunehmen vermögen, sodaß man beinahe sagen kann, sie seien von einander abhängig. Das geringe Maß ihrer Abhängigkeit rührt aber großenteils auch daher, daß gewöhnlich jeder Tragbogen noch eine besondere permanente und zufällige, nicht tragfähige Last auferlegt erhält, die das Gewicht des eigentlichen Tragbogens überbietet.

Demzufolge besteht also das Gewicht des dem Kurvenelemente ds entsprechenden Körperelementes, welches wir Mds nennen wollen,

aus dem Gewichte des eigentlichen Tragbogenelementes und dem Gewichte der toten Belastung, d. h. aller nicht tragfähigen Teile $\mu' ds$. Man hat also $M = \mu + \mu'$. Nun begründet z. B. ein konstantes M die Kettenlinie als entsprechende Stützlinie, deshalb braucht aber weder μ noch der demselben proportionale Querschnitt F des Tragbogens konstant zu sein, sondern es kann μ und F mit x wachsen oder abnehmen, wenn nur μ' in demselben Maße mit x abnimmt oder wächst, sodaß $\mu + \mu' = M$ konstant bleibt.

Also, die Kettenlinie kann z. B. Stützlinie bleiben, während F der Spannung λ proportional besteht, oder auch einem anderen Gesetze folgt, wenn nur durch passende Wahl von μ' das M konstant erhalten bleibt. Die in der Baukunst wichtige Frage: Wie muß das Bauwerk belastet werden, um seine Stützlinie, mithin seine Stabilität möglichst zu wahren? tritt uns hier in einer neuen Gestalt vor die Augen.

Die Gleichungen (115) und (116), die die Störungen der Gestalt in sich tragen, sind noch ganz allgemein und bestimmen den störenden Einfluß nur dahin, daß dadurch die innere Spannung λ in eine andere viel oder wenig verschiedene $\lambda + \lambda_1$ übergeht und ein jeder Punkt der Urlinie eine Verschiebung η in der Richtung der Normale erleidet. Solche Veränderungen können durch die mannigfaltigsten Ursachen hervorgerufen werden, namentlich

1. Durch eine gleichförmige Mehrbelastung oder auch Entlastung des Tragbogens in seiner ganzen Ausdehnung.

2. Durch eine gleichförmig über alle Teile verbreitete Temperaturänderung. Diesen beiden Ursachen entsprechen stetige Störungen.

3. Durch besondere Belastung eines einzelnen Punktes. Die hieraus hervorgehenden Störungen der Stützlinie sind, wie wir wissen, unstetige, und somit werden die ihnen entsprechenden Störungen der Gestalt ebenfalls unstetiger Natur sein.

VII.

Über die stetigen Störungen der Gestalt, hervorgerufen durch gleichförmige Be- oder Entlastung, oder Temperaturänderungen der Stützlinie.

Beginnen wir mit der Untersuchung derjenigen Veränderungen, die an den Stützlinien infolge eingetretener Temperaturunterschiede zu Tage treten. Sie sind hier so aufzufassen, daß unter dem Einflusse der Wärme jedes Bogenelement ds eine Verlängerung in $ds\left(1 + \frac{t}{n}\right)$ erleidet, wo t die Temperatur in Graden, n eine nach dem Materiale des Bogens sich richtende, meist große Zahl bedeutet. Hierdurch wird

aber weder der analytische Charakter der Stützlinie, noch die symmetrische Anordnung zu beiden Seiten derselben z Achse beeinflußt; die übrigen Kurvenelemente erleiden aber Störungen, die hier der Berechnung zu unterziehen sein werden.

Zu diesem Zwecke legen wir uns von den Urgleichungen jeder beliebigen Stützlinie vorderhand nur zwei, nämlich die für z und s vor. Sie enthalten nebst x noch als konstanten Parameter den Krümmungshalbmesser R im Scheitel, auf welchen jeder Temperaturunterschied mittelbar Einfluß nimmt. Es seien also diese zwei Gleichungen, um ganz allgemein zu Werke zu gehen

$$z = f(x, R) \quad \text{und} \quad s = \varphi(x, R). \tag{131}$$

Die eingetretene Erhöhung der Temperatur um t Grade verwandelt nun allerdings z in z_1 und s in s_1, während R übergehen mag in $R + \varrho$, läßt aber den analytischen Charakter der Kurve, mithin die Formen der Funktionen f und φ unangetastet.

Man hat mithin in der gestörten Kurve

$$z_1 = f(x, R + \varrho) \quad \text{und} \quad s_1 = \varphi(x, R + \varrho).$$

Hierbei hat sich aber ein jeder Punkt der Kurve, also namentlich der Punkt xz um ein kleines Stückchen ζ gesenkt; der Anfangspunkt der Koordinaten ist zwar auf derselben z Achse geblieben, hat sich aber längs dieser Achse um ein Stückchen b verschoben. Man kann annehmen nach abwärts; gibt es dann die Rechnung negativ, so wird es heißen nach aufwärts.

Es wird also:

$$\begin{aligned} z_1 &= z + b - \zeta = f(x, R + \varrho) = f(x, R) + \frac{df(x, R)}{dR}\varrho \\ s_1 &= s + \sigma = \varphi(x, R + \varrho) = \varphi(x, R) + \frac{d\varphi(x, R)}{dR}\varrho \end{aligned} \tag{132}$$

und zieht man hiervon die (131) ab, so ergibt sich:

$$b - \zeta = \frac{df(x, R)}{dR}\varrho \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{d\varphi(x, R)}{dR}\varrho. \tag{133}$$

So weit geht die allgemeine Analysis, und dies sind die allgemeinen Gleichungen. Will man die Rechnung weiter fortsetzen, so hat man die anderen noch vorhandenen Bedingungen heranzuziehen. Z. B. der Bogen ist ein Hängebogen, repräsentiert die Stützlinie selbst, und hat zwei feste Punkte in gleicher Höhe für $x = \pm X$; für dieses x ist auch $s = \pm S$ und $z = Z$, und da diese festen Punkte sich nicht bewegen können unter dem Einflusse der Temperatur, so ist für dieselben $\zeta = 0$, und σ bedeutet die totale Verlängerung, die der Bogen S erlitten

hat unter dem Einflusse der Temperatur t. Da nun dadurch jede Länge S übergeht in $S\left(1+\frac{t}{n}\right)$, so ist für $x = \pm X$ offenbar $\sigma = \frac{\pm St}{n}$, speziell für $x = X$, $\sigma = \frac{St}{n}$.

Dies eingeführt in die Gleichungen (133), gibt:

$$b = \frac{df(X, R)}{dR}\varrho \quad \text{und} \quad \frac{St}{n} = \frac{d\varphi(X, R)}{dR}\varrho, \text{ also}$$

$$\varrho = \frac{\frac{St}{n}}{\frac{d\varphi(X, R)}{dR}},$$

$$b = \frac{\frac{St}{n}\frac{df(X, R)}{dR}}{\frac{d\varphi(X, R)}{dR}},$$

$$\zeta = \frac{\frac{St}{n}}{\frac{d\varphi(X, R)}{dR}}\left[\frac{df(X, R)}{dR} - \frac{df(x, R)}{dR}\right],$$

$$\sigma = \frac{\frac{St}{n}\frac{d\varphi(x, R)}{dR}}{\frac{d\varphi(X, R)}{dR}}.$$

Da aber hier offenbar

$$f(x, R) = z, \quad f(X, R) = Z, \quad \varphi(x, R) = s, \quad \varphi(X, R) = S$$

ist, so wird man diese letzten Formeln auch so schreiben können:

$$\varrho = \frac{\frac{St}{n}}{\frac{dS}{dR}}, \qquad b = \frac{\frac{St}{n}\frac{dZ}{dR}}{\frac{dS}{dR}},$$

$$\text{(134)} \qquad \zeta = \frac{\frac{St}{n}\frac{d(Z-z)}{dR}}{\frac{dS}{dR}}, \quad \sigma = \frac{\frac{St}{n}\frac{ds}{dR}}{\frac{dS}{dR}}.$$

Man ersieht aus denselben ganz allgemein, daß die durch Temperaturwechsel bewirkten Veränderungen an den als Hängebogen betrachteten Stützlinien der Temperatur proportional sind, denn der Faktor t kommt bei allen vier vor. In welcher Abhängigkeit von den übrigen Elementen diese Veränderungen stehen, ebenso welche Störungen der Spannung, des allgemeinen Krümmungshalbmessers und der Bogenrichtung daraus hervorgehen, kann nur eine detaillierte Diskussion lehren, zu welcher wir also schreiten wollen.

Es sei also ersten Ortes die Parabel Stützlinie; aus den für sie geltenden Formeln heben wir zuvörderst die für s heraus, nämlich:

$$s = \frac{R}{2}\frac{x}{R}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2}} + \frac{R}{2}\log\left[\frac{x}{R} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2}}\right].$$

Lassen wir für einen Augenblick wieder φ als ein Funktionszeichen gelten, und nehmen $\frac{x}{R} = w$ an, so wird:

$$s = \frac{R}{2}\varphi(w), \text{ wo } \varphi(w) = w\sqrt{1 + w^2} + \log\left[w + \sqrt{1 + w^2}\right]$$

bestehen. Es ist jetzt:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{R}{2}\varphi'(w)\frac{dw}{dx} = \tfrac{1}{2}\varphi'(w),$$

$$\frac{ds}{dR} = \tfrac{1}{2}\varphi(w) + \frac{R}{2}\varphi'(w)\frac{dw}{R} = \tfrac{1}{2}\varphi(w) - \frac{x}{2R}\varphi'(w), \quad \text{also}$$

$$\frac{ds}{dR} = \frac{s}{R} - \frac{x}{R}\frac{ds}{dx};$$

nun ist aber:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + p^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2}},$$

also schließlich

$$\frac{ds}{dR} = \frac{s}{R} - \frac{x}{R}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2}}.$$

Setzt man aber $x = X$, so wird $s = S$, und man hat:

$$\frac{dS}{dR} = \frac{S}{R} - \frac{X}{R}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2}}.$$

Da vermöge der ersten der Formeln (19),

$$z = \frac{x^2}{2R}$$

ist, so ist auch:

$$Z = \frac{X^2}{2R}$$

und:

$$Z - z = \frac{X^2 - x^2}{2R},$$

also:

$$\frac{dZ}{dR} = -\frac{X^2}{2R^2}, \quad \text{und} \quad \frac{d(Z - z)}{dR} = -\frac{X^2 - x^2}{2R^2}.$$

Mit diesen Werten ergeben sich aus den Formeln (134):

$$(135)\quad \begin{cases} \varrho = \dfrac{\dfrac{St}{n}R}{S - X\sqrt{1 + \dfrac{X^2}{R^2}}}, & b = -\dfrac{\dfrac{St}{n}\dfrac{X^2}{2R}}{S - X\sqrt{1 + \dfrac{X^2}{R^2}}}, \\[2ex] \zeta = -\dfrac{\dfrac{St}{n}\dfrac{X^2 - x^2}{2R}}{S - X\sqrt{1 + \dfrac{X^2}{R^2}}}, & \sigma = \dfrac{\dfrac{St}{n}\left(s - x\sqrt{1 + \dfrac{x^2}{R^2}}\right)}{S - X\sqrt{1 + \dfrac{X^2}{R^2}}}. \end{cases}$$

So einfach diese Formeln sind, so machen sie doch eines, und zwar das wichtigste nicht recht ersichtlich, nämlich die Art der Abhängigkeit dieser vier Störungen vom Krümmungshalbmesser R.

Um diesen kennen zu lernen, sehen wir uns genötigt, zu Reihenentwickelungen unsere Zuflucht zu nehmen. Es liegt zwar in unserer Tendenz, Reihenentwickelungen bei den Originalstützlinien sowohl, wie auch bei den Störungen derselben möglichst zu vermeiden; wenn es sich indessen nicht um eine exakte Berechnung, sondern nur um eine angenäherte, rohe aber klare Übersicht handelt, so mögen sie immerhin gestattet sein.

Wir entwickeln also den gemeinschaftlichen Nenner der vier Werte von ϱ, b, ζ, σ in eine Reihe. Es ist zu diesem Behufe kraft der Binomialformel:

$$(136)\quad \begin{cases} \dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1+\dfrac{x^2}{R^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{R^2} - \dfrac{1}{8}\dfrac{x^4}{R^4} + \dfrac{1}{16}\dfrac{x^6}{R^6} - \cdots, \\ s = \displaystyle\int dx\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2}} = x + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{x^3}{R^2} - \frac{1}{40}\frac{x^5}{R^4} + \frac{1}{7\cdot 16}\frac{x^7}{R^6} - \cdots, \\ s - x\sqrt{1+\dfrac{x^2}{R^2}} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{x^3}{R^2} + \dfrac{1}{10}\dfrac{x^5}{R^4} - \dfrac{3}{7\cdot 8}\dfrac{x^7}{R^6} + \cdots, \text{ also} \\ S - X\sqrt{1+\dfrac{X^2}{R^2}} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{X^3}{R^2} + \dfrac{1}{10}\dfrac{X^5}{R^4} - \dfrac{3}{7\cdot 8}\dfrac{X^7}{R^6} + \cdots. \end{cases}$$

Reduzieren wir diesen Wert des gemeinschaftlichen Nenners zuerst auf sein erstes Glied, so ergeben sich mit demselben die folgenden einfachen Ausdrücke für die vier Störungen:

$$(137)\qquad \varrho = -\frac{3St}{n}\frac{R^3}{X^3}, \qquad b = \frac{3St}{2n}\frac{R}{X},$$
$$\zeta = \frac{3St}{2n}\frac{R}{X}\left(1 - \frac{x^2}{X^2}\right), \qquad \sigma = \frac{St}{n}\frac{x^3}{X^3}.$$

Sie lehren, daß die Variation ϱ des Krümmungshalbmessers R von eben diesem R am meisten abhängig sei, indem sie mit R im kubischen Verhältnisse zunimmt. Zudem ist ϱ für positive t negativ, für negative hingegen positiv; der Krümmungshalbmesser wächst mithin bei abnehmender, und nimmt ab bei zunehmender Wärme, ganz entgegengesetzt dem habituellen Verhalten der Körperwelt.

Die folgenden zwei Störungen: b und ζ, wachsen mit R im geraden Verhältnisse und sind positiv für positive, negativ für negative t, d. h. die Stützlinie sowohl, wie auch der Anfangspunkt ihrer Koordinaten senken sich bei abnehmender Temperatur. Die Störung der Bogenlänge σ ist endlich von R ganz unabhängig. Diese Wirkungen waren alle wohl vorauszusehen, und nur um das Maß derselben zu bestimmen, mußte die Rechnung zu Hilfe genommen werden.

Die Formeln (137) stellen aber selbstverständlich nur eine erste rohe Annäherung vor. Will man die Genauigkeit etwas weiter treiben, so kann man den gemeinschaftlichen Nenner der Formeln (136) auf seine zwei ersten Glieder ausdehnen; nämlich

$$s - x\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2}} = -\frac{1}{3}\frac{x^3}{R^2} + \frac{1}{10}\frac{x^5}{R^4} = -\frac{1}{3}\frac{x^3}{R^2}\left(1 - \frac{3}{10}\frac{x^2}{R^2}\right),$$

und somit

$$S - X\sqrt{1 + \frac{X^2}{R^2}} = -\frac{1}{3}\frac{X^3}{R^2} + \frac{1}{10}\frac{X^5}{R^4} = -\frac{1}{3}\frac{X^3}{R^2}\left(1 - \frac{3}{10}\frac{X^2}{R^2}\right).$$

Führt man diese binomischen Werte in die Formel (135) ein, multipliziert allenthalben Zähler und Nenner mit $1 + \frac{3}{10}\frac{X^2}{R^2}$, und läßt die Glieder mit X^7, die ja ohnehin nicht berücksichtigt worden sind, weg, so bekommt man neue genauere Störungswerte

$$(138) \qquad \varrho = -\frac{3St}{n}\frac{R^3}{X^3}\left[1 + \frac{3}{10}\frac{X^2}{R^2}\right], \quad b = \frac{3St}{2n}\frac{R}{X}\left[1 + \frac{3}{10}\frac{X^2}{R^2}\right],$$

$$\zeta = \frac{3St}{2n}\frac{R}{X}\left[1 + \frac{3}{10}\frac{X^2}{R^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{X^2}\right], \quad \sigma = \frac{St}{n}\frac{x^3}{X^3}\left[1 + \frac{3}{10}\frac{X^2 - x^2}{R^2}\right].$$

Sie erscheinen sämtlich gegen die früheren noch etwas gesteigert, im übrigen bleiben aber die Resultate doch wesentlich dieselben.

Es wird vielleicht nicht ganz unnütz sein, hier namentlich inbezug auf die durch σ bezeichnete Störung eine Bemerkung beizufügen, die zwar für jeden, der unseren Deduktionen mit Aufmerksamkeit gefolgt ist, überflüssig weil selbstverständlich ist, dessen ungeachtet aber zur Bewahrung vollständiger Klarheit und Vermeidung von Mißverständnissen dienlich sein kann. Es ist nämlich σ keineswegs eine durch Temperaturänderung herbeigeführte Veränderung der Bogenlänge s, denn diese ist einfach $= \frac{st}{n}$, sondern $s + \sigma$ ist in der gestörten Kurve der Bogen, der vom Scheitel bis zum Punkte x, z reicht, sowie in der ungestörten Kurve s der Bogen ist, der vom Scheitel bis zum Punkte x, z reicht. Mit anderen Worten: s und $s + \sigma$ sind die einerlei Abszisse x entsprechenden Bogenlängen in der ungestörten und in der gestörten Kurve. Es ist also durch Temperaturwechsel nicht $s + \sigma$ aus s faktisch hervorgegangen, sondern $s\left(1 + \frac{t}{n}\right)$, und es sind σ wie auch ζ zwar Störungen, aber nicht Störungen der Position bestimmter Punkte. Diese feine Unterscheidung zu machen, findet sich öfter Gelegenheit.

Es sind jetzt nur noch die Störungen zu berechnen, welche die Elemente p, r, λ durch Temperaturänderungen erleiden. Man nenne sie

δp, δr, $\delta\lambda$ und ziehe sie aus den Formeln (6, 10, 11) des Abschnittes I. In diesen kommt aber nur ein einziges, der Veränderung durch Wärmeeinflüsse fähiges Element vor, nämlich R, welches in $R+\varrho$ übergeht. Man setze mithin $R+\varrho$ anstatt R und entwickele die so erhaltenen Ausdrücke mittelst der Taylorschen Formel, nur das Glied mit der ersten Potenz von ϱ beibehaltend, so ergibt sich

$$\delta p = -\frac{x}{R^2}\varrho, \quad \delta\lambda = \frac{M\varrho}{\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2}}}, \quad \delta r = \left[1-\frac{2x^2}{R^2}\right]\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2}}\cdot\varrho.$$

Substituiert man hier anstatt ϱ zuvörderst den exakten Wert aus der ersten der Gleichungen (135), so erhält man die folgenden exakten Werte

$$(139) \qquad \begin{aligned} \delta p &= -\frac{\frac{St}{n}x}{R\left[S-X\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2}}\right]}, \\ \delta\lambda &= \frac{\frac{St}{n}MR}{\left[S-X\sqrt{1+\frac{X^2}{R^2}}\right]\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2}}}, \\ \delta r &= \frac{\left[1-\frac{2x^2}{R^2}\right]\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2}}\,\frac{St}{n}R}{S-X\sqrt{1+\frac{X^2}{R^2}}}, \end{aligned}$$

die aber einigermaßen an Undurchsichtigkeit leiden. Wir wenden uns daher auch hier wieder, um eine klare Übersicht zu gewinnen, zur ersten, rohesten Approximation, und um zu sehen, wie viel beiläufig und in welcher Richtung diese von der Wahrheit abweiche, fügen wir noch eine zweite Annäherung hinzu. Entnehmen wir also den Wert von ϱ den Gleichungen (137) erster Approximation, so haben wir die in den Formeln für $\delta\lambda$ und δr vorkommenden Faktoren

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2}}} = 1-\frac{x^2}{2R^2}+\cdots,$$

$$\left[1-\frac{2x^2}{R^2}\right]\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2}} = 1-\frac{3x^2}{2R^2}+\cdots$$

auch auf ihr erstes Glied, nämlich die Einheit, zu reduzieren; dies gibt

$$(140) \quad \delta p = \frac{3St}{n}\frac{Rx}{X^3}, \quad \delta\lambda = -\frac{3St}{n}\frac{MR^3}{X^3}, \quad \delta r = -\frac{3St}{n}\frac{R^3}{X^3} = \varrho.$$

Die erste dieser angenäherten Formeln lehrt, daß die Winkel, welche die Tangenten zu irgend einem Punkte der Kurve mit der Abszissenachse einschließen, bei zunehmender Temperatur im Wachsen, bei abnehmender im Abnehmen begriffen sind, und zwar um eine Differenz, die einesteils der Abszisse x, anderenteils dem Krümmungshalbmesser R proportional ist. Die beiden anderen besagen, da in ihnen x nicht vorkommt, daß im ganzen Bereiche der Kurve der Krümmungshalbmesser r und die Spannung λ einerlei Steigerung erfahren, welche der dritten Potenz von R proportional ist.

Dies sind aber nur die Resultate der ersten rohen Annäherung. Um etwas genauere Werte zu gewinnen, entnehmen wir ϱ der ersten der angenäherten Formeln (138), und reduzieren gleichzeitig die obenerwähnten zwei Faktoren auf ihre ersten zwei Anfangsglieder, so ergeben sich die folgenden angenäherten Werte

$$\text{(141)} \qquad \begin{aligned} \delta p &= \frac{3St}{n}\frac{Rx}{X^3}\left[1+\frac{3}{10}\frac{X^2}{R^2}\right], \\ \delta\lambda &= -\frac{3St}{n}\frac{MR^3}{X^3}\left[1+\frac{3X^2-5x^2}{10R^2}\right], \\ \delta r &= -\frac{3St}{n}\frac{R^3}{X^3}\left[1+\frac{3X^2-15x^2}{10R^2}\right]. \end{aligned}$$

Sie lassen mit den früheren (139) verglichen im allgemeinen eine kleine Steigerung für kleine x, für größer werdende x hingegen eine kleine Abnahme wahrnehmen. Die daraus gezogenen Folgerungen jedoch bleiben im wesentlichen dieselben.

Von der Parabel wenden wir uns jetzt zu einer zweiten Stützlinie, der Kettenlinie, für welche nämlich die Formeln (107) des Abschnittes V gelten. Wir nehmen zunächst diejenigen für z und s vor, nämlich

$$z=\frac{R}{2}\left[e^{\frac{x}{R}}+e^{-\frac{x}{R}}\right], \quad s=\frac{R}{2}\left[e^{\frac{x}{R}}-e^{-\frac{x}{R}}\right].$$

Hieraus durch Differenzieren

$$\frac{dz}{dR}=\frac{z}{R}-\frac{sx}{R^2}, \quad \frac{ds}{dR}=\frac{s}{R}-\frac{xz}{R^2}, \quad \frac{ds}{dx}=\frac{z}{R}.$$

Also auch, wenn man $x=X$ setzt, wodurch z in Z und s in S übergehen,

$$\frac{dZ}{dR}=\frac{Z}{R}-\frac{SX}{R^2}, \quad \frac{dS}{dR}=\frac{S}{R}-\frac{XZ}{R^2},$$

$$\frac{d(Z-z)}{dR}=\frac{Z-z}{R}-\frac{SX-sx}{R^2}.$$

Diese Werte führen wir in die allgemeine Formel (134) für die vier Fundamentalstörungen ein und erhalten

$$(142)\qquad \varrho = \frac{\frac{St}{n}R^2}{SR - XZ}, \qquad b = \frac{\frac{St}{n}[ZR - SX]}{SR - XZ},$$

$$\zeta = \frac{\frac{St}{n}[R(Z - z) - SX + sx]}{SR - XZ}, \quad \sigma = \frac{\frac{St}{n}[sR - xz]}{SR - XZ}.$$

Daß diese Störungen der Temperatur proportional sind, sieht man. Um jedoch zu erkunden, wie dieselben von R abhängen, wird es abermals ersprießlich sein, zu Reihenentwickelungen zu schreiten.

Es ist also

$$z = R\left[1 + \frac{x^2}{2R^2} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot R^4} + \cdots\right],$$

$$s = x\left[1 + \frac{x^2}{2\cdot 3\cdot R^2} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot R^4} + \cdots\right],$$

$$sR - xz = -\frac{1}{3}\frac{x^3}{R} - \frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 5\cdot R^3} - \cdots,$$

$$zR - sx = R_2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot R^2} - \cdots,$$

und weil für $x = X$, z in Z, s in S übergeht:

$$Z = R\left[1 + \frac{X^2}{2R^2} + \frac{X^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot R^4} + \cdots\right],$$

$$S = X\left[1 + \frac{X^2}{2\cdot 3\cdot R^2} + \frac{X^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot R^4} + \cdots\right],$$

$$SR - XZ = -\frac{1}{3}\frac{X^3}{R} - \frac{X^5}{2\cdot 3\cdot 5\cdot R^3} - \cdots = -\frac{1}{3}\frac{X^3}{R}\left[1 + \frac{X^2}{10R^2}\right] - \cdots,$$

$$ZR - SX = R^2 - \tfrac{1}{2}X^2 - \frac{X^4}{2\cdot 4\cdot R^2} - \cdots = R^2\left[1 - \frac{X^2}{2R^2}\right] - \cdots,$$

$$R(Z - z) - SX + sx = -\tfrac{1}{2}(X^2 - x^2) - \frac{X^4 - x^4}{2\cdot 4\cdot R^2} - \cdots$$

$$= -\tfrac{1}{2}(X^2 - x^2)\left[1 + \frac{X^2 + x^2}{4R^2}\right] - \cdots.$$

Reduziert man, um zur ersten rohen Approximation zu gelangen, diese Werte auf ihr erstes Glied, und substituiert man sie in die Gleichungen (142), so erhält man

$$\varrho = -\frac{3St}{n}\frac{R^3}{X^3}, \quad b = -\frac{3St}{n}\frac{R^3}{X^3} = \varrho,$$

$$(143)\qquad \zeta = \frac{3St}{2n}\frac{R}{X}\left[1 - \frac{x^2}{X^2}\right], \quad \sigma = \frac{St}{n}\frac{x^3}{X^3},$$

Ausdrücke, die mit dem bei der Parabel erhaltenen kongruent sind, bis auf den Wert von b, bei welchem die Analysis in diesem Grade

der Annäherung den Umstand festzustellen scheint, daß bei der Kettenlinie der Anfangspunkt der Koordinaten unter dem Scheitel in einer Entfernung gleich dem Krümmungshalbmesser, hier $R + \varrho$, zu liegen habe.

Dieser Umstand ist aber rein geometrischer Natur und nimmt weder auf die Gestalt, noch auf die Spannungen in der Kurve Einfluß, so daß man sagen kann, ein Temperaturwechsel mache auf beide Stützlinien, die Parabel wie die Kettenlinie, einerlei Wirkung. Weil aber die Temperaturänderung in unserer Theorie nur als ein Agens betrachtet wird, welches den Bogen und auch die Bogenelemente um einen aliquoten Teil ihrer Länge ausdehnt, so gelten unsere Formeln für alle Agentien, die Gleiches tun, und nicht bloß für die Wärme.

Schreiten wir jetzt zur zweiten Approximation, und dehnen zu diesem Zwecke die obigen Reihenentwickelungen aus auf ihre zwei ersten Anfangsglieder, substituieren sie in die Formeln (143), multiplizieren allenthalben Zähler und Nenner mit $1 - \frac{X^2}{10R^2}$ und lassen die Glieder höherer Ordnung weg, so erhalten wir in gleicher Annäherung

$$\varrho = -\frac{3St}{2n}\frac{R^3}{X^3}\left[1 - \frac{X^2}{10R^2}\right], \quad b = -\frac{3St}{n}\left[1 - \frac{3X^2}{5R^2}\right]\frac{R^2}{X^2}$$

$$\zeta = \frac{3St}{2n}\frac{R}{X}\left[1 - \frac{x^2}{X^2}\right]\left[1 + \frac{3X^2 + 5x^2}{20R^2}\right], \quad \sigma = \frac{St}{n}\frac{x^3}{X^3}\left[1 - \frac{X^2 - x^2}{10R^2}\right].$$

Hier gehen bereits Parabel und Kettenlinie trotz ihrer großen Ähnlichkeit erheblich auseinander.

Jetzt haben wir noch die rückständigen drei Störungen der Bogenrichtung p, der Spannung λ und des Krümmungshalbmessers r, nämlich δp, $\delta\lambda$, δr, der Berechnung zu unterziehen. Dies geschieht aus den Formeln (6, 10, 11) des Abschnittes I, die von überraschender Einfachheit sind, nämlich

$$p = \frac{s}{R}, \quad \lambda = mz, \quad r = \frac{z^2}{R}.$$

Da in ihnen nur ein dem Einflusse der Wärme mittelbar unterworfenes Element vorhanden ist, nämlich R, welches unter diesem Einflusse in $R + \varrho$ übergeht, so gibt die Taylorsche Formel

$$\text{(144)} \quad \begin{aligned} \delta p &= \frac{dp}{dR}\varrho = -\left[\frac{s}{R^2} - \frac{1}{R}\frac{ds}{dR}\right]\varrho = -\frac{xz}{R^3}\varrho \\ \delta\lambda &= \frac{d\lambda}{dR}\varrho = \frac{m}{R^2}[2R - sx]\varrho \\ \delta r &= \frac{dr}{dR}\varrho = \left[-\frac{z^2}{R^2} + \frac{2z}{R}\frac{dz}{dR}\right]\varrho = \frac{z}{R^3}[zR - 2sx]\varrho, \end{aligned}$$

oder wenn man anstatt ϱ den Wert aus der ersten der exakten Formeln (142) substituiert,

$$(145)\quad \delta p = -\frac{\frac{St}{n} xz}{R[SR - XZ]}, \quad \delta\lambda = \frac{\frac{mSt}{n}[zR - sx]}{SR - XZ}, \quad \delta r = \frac{\frac{St}{n}\frac{z}{R}[zR - 2sx]}{SR - XZ}.$$

Dies sind nun allerdings exakte Formeln und jedesmal zu verwenden, wenn man zur wirklichen Berechnung genauer Störungswerte schreitet, leiden aber doch an einiger Undurchsichtigkeit, und lassen namentlich die Art der Abhängigkeit vom Urelemente R nicht klar genug erkennen. Um also eine lichtvolle Übersicht zu gewinnen, reduzieren wir mit Hilfe der Reihenentwickelung diese Formeln zuerst in roher Annäherung auf ihr erstes Glied, dann weiter approximierend auf die zwei ersten Glieder. Es ist zu diesem Behufe

$$\frac{xz}{R^3} = \frac{x}{R^2}\left[1 + \frac{x^2}{2R^2}\right] + \cdots$$

$$\frac{zR - sx}{R^2} = -\frac{x^2}{2R^2} - \frac{x^4}{2\cdot 4R^4} - \cdots$$

$$\frac{zR - 2sx}{R^2} = 1 - \frac{3x^2}{2R^2} - \frac{7x^4}{2\cdot 3\cdot 4R^4} - \cdots$$

$$\frac{z}{R} = 1 + \frac{x^2}{2R^2} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4R^4} + \cdots$$

$$\frac{z}{R}(zR - 2sx) = R^2\left[1 - \frac{x^2}{R^2} - \frac{x^4}{R^4} - \cdots\right],$$

und hiermit in erster Approximation

$$\delta p = \frac{3St}{n}\frac{Rx}{X^3}, \qquad \delta\lambda = -\frac{3St}{n}\frac{mR^3}{X^3}, \qquad \delta r = -\frac{3St}{n}\frac{R^3}{X^3} = \varrho,$$

genau dieselben Werte wie bei der Parabel; δp auch hier dem x sowohl, wie auch dem R proportional, $\delta\lambda$ und δr hingegen von x abhängig, also im ganzen Bereiche der Kette dieselben der dritten Potenz von R proportionalen Störungen.

Die zweite Annäherung gibt

$$\delta p = \frac{3St}{n}\frac{Rx}{X^3}\left[1 + \frac{5x^2 - X^2}{10R^2}\right]$$

$$\delta\lambda = -\frac{3St}{n}\frac{mR^3}{X^3}\left[1 - \frac{5x^2 + X^2}{10R^2}\right]$$

$$\delta r = -\frac{3St}{n}\frac{R^3}{X^3}\left[1 - \frac{10x^2 + X^2}{10R^2}\right],$$

Gleichungen, die von den bei der Parabel erhaltenen (141) einigermaßen verschieden sind.

Es ist aber nicht außer acht zu lassen, daß Parabel und Kettenlinie, die wir hier unter Voraussetzung desselben X und R als einander vollkommen entsprechende Kurven von einerlei Dimensionen behandelt haben, eben in diesen Dimensionen und namentlich in der Größe des Pfeiles und der totalen Bogenlänge nicht vollständig kongruieren, mithin auch in den Störungen nicht völlig übereinstimmen können. Fassen wir, um dies genau einzusehen, die ζ, ϱ, Z, S genannten Größen nur inbezug auf den Scheitelpunkt $x = 0$ gehörig ins Auge, und nennen die der Parabel angehörigen: ζ_p, ϱ_p, Z_p, S_p, und die der Kettenlinie entsprechenden: ζ_k, ϱ_k, Z_k, S_k so ist eben für $x = 0$

$$\zeta_p = \frac{3St}{n}\frac{R}{X}\left[1 + \frac{3}{10}\frac{X^2}{R^2}\right],$$

$$\varrho_p = -\frac{3St}{n}\frac{R^3}{X^3}\left[1 + \frac{3}{10}\frac{X^2}{R^2}\right],$$

$$Z_p = \frac{X^2}{2R}, \quad S_p = X + \frac{X^3}{2\cdot 3 R^2} - \frac{X^5}{40 R^4} + \cdots$$

$$\zeta_k = \frac{3St}{n}\frac{R}{X}\left[1 + \frac{3}{20}\frac{X^2}{R^2}\right]$$

$$\varrho_k = -\frac{3St}{n}\frac{R^3}{X^3}\left[1 - \frac{X^2}{10 R^2}\right]$$

$$Z_k = R + \frac{X^2}{2R} + \frac{X^4}{2\cdot 3\cdot 4 R^3} + \cdots$$

$$S_k = X + \frac{X^3}{2\cdot 3 R^2} + \frac{X^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 R^4} + \cdots,$$

also subtrahierend

$$\zeta_p - \zeta_k = \frac{9St}{20n}\frac{X}{R},$$

$$\varrho_p - \varrho_k = -\frac{12St}{10n}\frac{R}{X},$$

$$Z_p - Z_k + R = -\frac{X^4}{2\cdot 3\cdot 4 R^3} - \cdots$$

$$S_p - S_k = -\frac{X^5}{2\cdot 3\cdot 5 R^4} - \cdots$$

Es ist also der Pfeil bei der Parabel und auch die Bogenlänge kleiner als bei der Kettenlinie, also die Parabel die flacher gespannte Kurve; es kann also nicht Wunder nehmen, wenn sie durch den Temperatureinfluß etwas tiefer einsinkt.

Man kann also in der Tat annehmen, daß diese beiden krummen Linien, die allen Eigenschaften nach einander so sehr ähnlich sind,

auch den Einflüssen der Temperatur gegenüber so ziemlich dasselbe Verhalten offenbaren. Ob dies auch bei der nächstfolgenden Stützlinie, der Linie des gleichen Widerstandes, der Fall sein wird, muß die einzuleitende Untersuchung lehren.

Wir nehmen also als drittes Beispiel die Kurve des gleichen Widerstandes vor, für welche die Formeln des Abschnittes I zu gelten haben. Wir legen uns zunächst die zwei für s und z vor, nämlich

$$s = R \log \frac{1 + \sin \frac{x}{R}}{\cos \frac{x}{R}} \quad \text{und} \quad z = -R \log \cos \frac{x}{R}.$$

In beiden kommt ein Faktor R vor, multipliziert mit einer Funktion von $\frac{x}{R}$, welche R nur im Bruche $\frac{x}{R}$ enthält. Schreiben wir also $\frac{x}{R} = w$, und lassen für einen Augenblick φ als Funktionszeichen gelten, so kann s folgendermaßen dargestellt werden

$$s = R\varphi(w), \quad \frac{ds}{dx} = R\varphi'(w)\frac{dw}{dx} = \varphi'(w)$$

$$\frac{ds}{dR} = \varphi(w) + R\varphi'(w)\frac{dw}{dR} = \frac{s}{R} - \frac{x}{R}\frac{ds}{dx},$$

$$\text{da aber } \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+p^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{R}} = \frac{1}{\cos \frac{x}{R}},$$

ist:

$$\frac{ds}{dR} = \frac{s}{R} - \frac{x}{R \cos \frac{x}{R}}.$$

Auf dieselbe Weise ist,

$$z = R\psi(w), \quad \frac{dz}{dx} = p = \operatorname{tg} \frac{x}{R},$$

$$\frac{dz}{dR} = \psi(w) + R\psi'(w)\frac{dw}{dR} = \frac{z}{R} - \frac{x}{R} \operatorname{tg} \frac{x}{R}.$$

Und da für $x = X$ auch z in Z und s in S übergeht, so hat man auch

$$S = R \log \frac{1 + \sin \frac{X}{R}}{\cos \frac{X}{R}}, \quad Z = -R \log \cos \frac{X}{R},$$

$$\frac{dS}{dR} = \frac{S}{R} - \frac{X}{R \cos \frac{X}{R}}, \quad \frac{dZ}{dR} = \frac{Z}{R} - \frac{X}{R} \operatorname{tg} \frac{R}{R},$$

$$\frac{d(Z-z)}{dR} = \frac{Z-z}{R} - \frac{1}{R}\left[X \operatorname{tg} \frac{X}{R} - x \operatorname{tg} \frac{x}{R}\right].$$

Substituiert man diese Werte in die obigen allgemeinen Formeln (134), so ergeben sich die gesuchten Störungen

$$\varrho = \frac{\frac{St}{n} R}{S - X \sec \frac{X}{R}}, \qquad b = \frac{\frac{St}{n}\left[Z - X \operatorname{tg} \frac{X}{R}\right]}{S - X \sec \frac{X}{R}},$$

(146)
$$\zeta = \frac{\frac{St}{n}\left[Z - z - X \operatorname{tg} \frac{X}{R} + x \operatorname{tg} \frac{x}{R}\right]}{S - X \sec \frac{X}{R}},$$

$$\sigma = \frac{\frac{St}{n}\left[s - x \sec \frac{x}{R}\right]}{S - X \sec \frac{X}{R}}.$$

Zur wirklichen genauen Rechnung, wenn eine solche benötigt wird, sind diese Gleichungen ebenfalls bequem genug, eine klare, wenn auch nur oberflächliche Übersicht schaffen sie aber nicht. Man greift daher auch hier wieder zu dem allgemeinen Mittel der Reihenentwickelung und hat zu diesem Zwecke

$$z = \frac{x^2}{3R} + \frac{x^4}{3 \cdot 4 \cdot R^3}, \qquad s = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot R^2} + \frac{x^5}{4 \cdot 6 \cdot R^4} + \cdots,$$

$$x \operatorname{tg} \frac{x}{R} = \frac{x^2}{R} + \frac{x^4}{3R^3}, \qquad x \sec \frac{x}{R} = x + \frac{x^3}{2R^2} + \frac{5x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot R^4} + \cdots,$$

$$s - x \sec \frac{x}{R} = \frac{x^3}{3R^2}\left[1 + \frac{x^2}{2R^2}\right], \qquad S - X \sec \frac{X}{R} = -\frac{X^3}{3R^2}\left[1 + \frac{X^2}{2R^2}\right],$$

$$z - x \operatorname{tg} \frac{x}{R} = -\frac{x^2}{2R}\left[1 + \frac{x^2}{2R^2}\right], \qquad Z - X \operatorname{tg} \frac{X}{R} = -\frac{X^2}{2R}\left[1 + \frac{X^2}{2R^2}\right],$$

$$\frac{d(Z-z)}{dR} = \frac{1}{R}\left[Z - z - X \operatorname{tg} \frac{X}{R} + x \operatorname{tg} \frac{x}{R}\right] = -\frac{X^2 - x^2}{2R^2}\left[1 + \frac{X^2 + x^2}{2R^2}\right] - \cdots,$$

$$Z - z = \frac{X^2 - x^2}{2R}\left[1 + \frac{X^2 + x^2}{2 \cdot 3 \cdot R^2}\right] + \cdots.$$

Reduzieren wir, um wieder die Störungswerte in erster Annäherung zu erhalten, alle die eben gewonnenen Ausdrücke auf ihr erstes Glied, so ergeben sich folgende Formeln

$$\varrho = -\frac{3St}{n}\frac{R^2}{X^3}, \qquad b = \frac{3St}{2n}\frac{R}{X},$$

$$\zeta = \frac{3St}{2n}\frac{R}{X}\left[1 - \frac{x^2}{X^2}\right], \qquad \sigma = \frac{St}{n}\frac{x^3}{X^3}.$$

Es sind buchstäblich dieselben wie bei der Parabel.

Wenn nun diese Identität der Wärmewirkungen natürlich erschien bei Parabel und Kettenlinie wegen der übereinstimmenden Eigenschaften dieser Kurven, so erweist sie sich hier bei der Linie des gleichen

Widerstandes schon einigermaßen merkwürdig, weil ja diese letztere Eigenschaften besitzt, die von jenen der Parabel und Kettenlinie wesentlich verschieden sind; namentlich hat die Kurve des gleichen Widerstandes zwei parallele, in demselben Abstande befindliche Asymptoten, zwischen welchen sie eingeschlossen ist. Parabel und Kettenlinie hingegen besitzen zwar auch parallele Asymptoten, aber in unendlicher Entfernung. Mit der einen dieser Kurve läßt sich nur ein beschränkter Raum überspannen, mit den beiden anderen, wenn sonst nichts hindern würde, ein unendlicher; und trotz dieser radikalen Verschiedenheit ist doch der Einfluß der Temperatur bei allen derselbe.

Selbstverständlich gilt dies nur für die erste Approximation; in zweiter Annäherung bekommt man für dieselben Störungen folgende einfache, zweigliedrige Ausdrücke

$$\varrho = -\frac{3St}{n}\frac{R^3}{X^3}\left[1-\frac{X^2}{2R^2}\right],\qquad b = \frac{3St}{n}\frac{R}{X},$$

$$\zeta = \frac{3St}{n}\frac{R}{X}\left[1+\frac{X^2}{R^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{X^2}\right],\qquad \sigma = \frac{St}{n}\frac{x^3}{X^3}\left[1-\frac{X^2-x^2}{2R^2}\right].$$

Jetzt sind noch die Störungen von p, r und λ anzugeben. Die Gleichungen dafür (14, 18) sind so einfach, wie bei der Kettenlinie, nämlich

$$p = \operatorname{tg}\frac{x}{R},\qquad r = \frac{R}{\cos\frac{x}{R}},\qquad \lambda = mr,$$

und aus ihnen zieht man sofort

$$\delta p = \frac{dp}{dR}\varrho = -\frac{x}{R^2}\sec^2\frac{x}{R}\varrho,\qquad \delta r = \frac{dr}{dR}\varrho = \sec\frac{x}{R}\left[1+\frac{x}{R}\operatorname{tg}\frac{x}{R}\right]\varrho,$$

$$\delta\lambda = m\delta r = m\sec\frac{x}{R}\left[1+\frac{x}{R}\operatorname{tg}\frac{x}{R}\right]\varrho,$$

oder nach Substitution des unter (146) vorfindlichen exakten Wertes

$$\delta p = -\frac{\frac{St}{n}\frac{x}{R}\sec^2\frac{x}{R}}{S-X\sec\frac{X}{R}},$$

$$(147)\qquad \delta r = \frac{\frac{St}{n}R\sec\frac{x}{R}\left[1+\frac{x}{R}\operatorname{tg}\frac{x}{R}\right]}{S-X\sec\frac{X}{R}}$$

$$\delta\lambda = \frac{\frac{St}{n}mR\sec\frac{x}{R}\left[1+\frac{x}{R}\operatorname{tg}\frac{x}{R}\right]}{S-X\sec\frac{X}{R}}$$

Die Reihenentwickelung und Reduktion auf die ersten Glieder führt auch hier zu den Formeln (140), denen wir bei der Parabel begegnet sind; bei der zweiten Annäherung aber kommt man zu folgenden zweigliedrigen Werten

$$\delta p = \frac{3St}{n}\frac{Rx}{X^3}\left[1+\frac{2x^2-X^2}{2R^2}\right]$$

$$\delta r = -\frac{3St}{n}\frac{R^2}{X^3}\left[1+\frac{3x^2-X^2}{2R^2}\right]$$

$$\delta\lambda = -\frac{3St}{n}\frac{mR^2}{X^3}\left[1+\frac{3x^2-X^2}{2R^2}\right].$$

Diese in erster Annäherung in merkwürdiger Weise kongruenten, in der zweiten hingegen bereits etwas verschiedenen Resultate haben aber lediglich ein theoretisches Interesse, da sie unbelastete Hängebogen betreffen, die in natura nur höchstens bei Telegraphendrähten anzutreffen sind. Alle sonstigen Bögen aber sind belastete Tragbögen.

Zu diesen wichtigeren Gebilden wenden wir uns also jetzt und nehmen zunächst die belastete Linie des gleichen Widerstandes vor, für welche die Formeln (37) des Abschnittes II gelten. Wir müssen uns aus ihnen auch hier zuvörderst die für z und s vorlegen, um sie der Differenzierung nach R zu unterwerfen, und stutzen vor dem gewaltigen Formelriesen, der den Wert von s angibt.

Die Schwierigkeit jedoch, die derselbe dem Rechner entgegenzusetzen scheint, wird leicht umgangen durch den sowohl bei der Parabel, wie auch bei der unbelasteten Kurve des gleichen Widerstandes gebrauchten Kunstgriff, der hier erst in seinem vollen Werte erscheint, und auf den Umstand gegründet ist, das z sowohl, wie auch s Produkte sind aus R in eine Funktion von $\frac{x}{kR}$, die mit Ausnahme des Bruches weiter kein x und auch kein R enthält. Wir setzen also für einen Augenblick $\frac{x}{kR} = w$, und lassen φ ein Funktionszeichen bedeuten, so stellt sich uns der sehr weitläufige Wert von s dar in der einfachen Form

$$s = R\varphi(w),$$

hieraus

$$\frac{ds}{dx} = R\varphi'(w)\frac{dw}{dx} = \frac{1}{k}\varphi'(w) = \sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2\frac{x}{kR}}$$

$$\frac{ds}{dR} = \varphi(w) + R\varphi'(w)\frac{dw}{dR} = \varphi(w) - \frac{x}{kR}\varphi'(w) = \varphi(w) - \frac{x}{R}\frac{ds}{dx}$$

$$= \frac{s}{R} - \frac{x}{R}\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2\frac{x}{kR}}.$$

Auf dieselbe Weise leiten wir die Differentiation von z ein, wir setzen nämlich

$$z = R\psi(w), \quad \frac{dz}{dx} = p = R\psi'(w)\frac{dw}{dx} = \frac{1}{k}\psi'(w)$$

$$\frac{dz}{dR} = \psi(w) + R\psi'(w)\frac{dw}{dR} = \psi(w) - \frac{x}{kR}\psi'(w) = \frac{z}{R} - \frac{px}{R} = \frac{z}{R} - \frac{kx}{R}\operatorname{tg}\frac{x}{kR},$$

und da für $x = X$, z in Z und s in S übergeht, so hat man auch

$$\frac{dS}{dR} = \frac{S}{R} - \frac{X}{R}\sqrt{1 + k^2\operatorname{tg}^2\frac{X}{kR}}, \quad \frac{dZ}{dR} = \frac{Z}{R} - \frac{kX}{R}\operatorname{tg}\frac{X}{kR}$$

$$\frac{d(Z-z)}{dR} = \frac{Z-z}{R} - \frac{k}{R}\left[X\operatorname{tg}\frac{X}{kR} - x\operatorname{tg}\frac{x}{kR}\right].$$

Hiermit bilden wir die Werte der vier Fundamentalstörungen ϱ, b, ζ und σ aus den Formeln (134). Sie sind

$$\varrho = \frac{\frac{St}{n}R}{S - X\sqrt{1 + k^2\operatorname{tg}^2\frac{X}{R}}},$$

$$b = \frac{\frac{St}{n}\left[Z - kX\operatorname{tg}\frac{X}{kR}\right]}{S - X\sqrt{1 + k^2\operatorname{tg}^2\frac{X}{kR}}},$$

$$\zeta = \frac{\frac{St}{n}\left[Z - z - k\left(X\operatorname{tg}\frac{X}{R} - x\operatorname{tg}\frac{x}{R}\right)\right]}{S - X\sqrt{1 + k^2\operatorname{tg}^2\frac{X}{kR}}},$$

$$\sigma = \frac{\frac{St}{n}\left[s - x\sqrt{1 + k^2\operatorname{tg}^2\frac{x}{kR}}\right]}{S - X\sqrt{1 + k^2\operatorname{tg}^2\frac{X}{kR}}}.$$

Setzt man hier $M = 0$, was $k = 1$ gibt, so gehen diese Gleichungen in die für die unbelastete Kurve des gleichen Widerstandes geltenden (147) über, wie dies auch sein muß....

Über Wirbelbildung in reibungslosen Flüssigkeiten mit Anwendung auf die Analogie der hydrodynamischen Erscheinungen mit den elektrostatischen.

Von V. BJERKNES in Stockholm.

I. Einleitung.

1. Zwischen pulsierenden Kugeln, die sich in einer homogenen, inkompressiblen und reibungslosen Flüssigkeit befinden, treten scheinbare Wirkungen in die Ferne ein. Alles deutet darauf hin, daß diese Wirkungen nur auf den pulsierenden Bewegungen beruhen, nicht dagegen auf der zur Vereinfachung der Rechnung vorausgesetzten Kugelform, und der damit folgenden Starrheit der Körper gegen Deformation. Alles macht es also im voraus wahrscheinlich, daß dieselben Fernwirkungen auch zwischen beliebig geformten pulsierenden Partien *der Flüssigkeit selbst* auftreten würden.

Diese Bemerkung ist wichtig, weil sie uns die Möglichkeit erblicken läßt, durch einfachere und allgemeinere Methoden die Theorie der hydrodynamischen Fernkräfte zu entwickeln. Anstatt eines aus Flüssigkeit und fremden Körpern bestehenden zusammengesetzten Systemes muß es voraussichtlich möglich sein, ein einfaches flüssiges System zu betrachten und die ganze Theorie direkt aus den Bewegungsgleichungen der Flüssigkeit zu folgern.

2. Ein Plan für die Durchführung einer Untersuchung in dieser Richtung ergibt sich durch die folgende Überlegung: Wenn eine pulsierende Flüssigkeitsmasse als Folge der Anziehung eine Bewegung durch die umgebende Flüssigkeit angenommen hat, so findet ein Gleiten an derjenigen Fläche statt, welche die pulsierende Flüssigkeitsmasse von der umgebenden nicht pulsierenden Flüssigkeit trennt. Jedes Gleiten kann aber als der Grenzfall eines Wirbelns aufgefaßt werden. Es hat also eine *Wirbelbildung* stattgefunden, und es muß möglich sein, aus den Gesetzen der Wirbelbildung in reibungslosen Flüssigkeiten Schlüsse allgemeiner Art über die auf dem Flüssigkeitsdruck beruhenden scheinbaren Fernwirkungen zu ziehen.

Den somit angedeuteten Weg habe ich völlig gangbar gefunden, nachdem ich erst das Vorurteil, das ich hegte, daß in einer Flüssigkeit Wirbel überhaupt nicht entstehen oder vergehen konnten, überwunden

hatte.[1]) Es zeigte sich in der Tat sehr leicht, eine Reihe von einfachen Sätzen über Wirbelbildung herzuleiten. Diese Sätze habe ich schon früher publiziert, und nachher besonders die Anwendung eines derselben für die Diskussion der Luft- und Meeresbewegungen entwickelt.[2]) Ich kehre hier zu derjenigen Anwendung zurück, durch welche ich zu der Untersuchung der Wirbelbildung geführt wurde, nämlich zu der eben angedeuteten Anwendung auf hydrodynamische Fernkräfte. Dabei gebe ich zunächst den anzuwendenden Wirbelbildungssatz in neuer, unabhängiger Ableitung.

---

1) Das gewöhnliche kategorische Hervorheben der Erhaltung der Wirbel in reibungslosen Flüssigkeiten, die Parallelisierung dieses Resultates mit dem Prinzipe von der Erhaltung der Energie und der Vergleich der ewigen Wirbelringe mit den ewigen Atomen, alles ohne ausdrückliches Betonen der in der Ableitung benutzten spezialisierenden Voraussetzungen, hat dem genannten Vorurteil gewiß eine sehr allgemeine Verbreitung geschafft und dadurch unvorteilhaft auf die hydrodynamische Forschung im allgemeinen zurückgewirkt. Ausgedehnte Gebiete, wo doch Resultate zu ernten sind, die sich gleich viel durch ihren theoretischen Reiz wie durch ihren praktischen Nutzen auszeichnen, sind in dieser Weise als die theoretische Hydrodynamik nicht angehend betrachtet worden. Besonders ist es zu bedauern, daß durch diesen Umstand die Hydrodynamiker von einer regeren Teilnahme in der meteorologischen Forschung abgehalten worden sind. Wahrscheinlich im instinktiven Gefühl des sonst zu auffallenden Widerspruches mit der stetig vor sich gehenden atmosphärischen Wirbelbildung, formuliert man den Satz oft in der Weise, daß Flüssigkeitswirbel „durch konservative Vorgänge" nicht erzeugt werden können. Dieses ist aber ganz unzutreffend. Denn die Wirbelbildung durch den Flüssigkeitsdruck ist an sich ein Vorgang durchaus konservativer Natur, und wenn die Wirbelbildung fortfällt, so beruht es einzig und allein auf gewissen inneren Eigenschaften der Flüssigkeit, daß sie nämlich entweder homogen und inkompressibel ist, oder auch daß ihre Dichte eine Funktion nur des Druckes sei. Da diese Voraussetzungen bei den natürlichen Flüssigkeiten nie genau zutreffen, sind die Sätze über die Erhaltung der Wirbel reine Abstraktionen, obwohl sehr nützliche Abstraktionen, da die genannten Bedingungen unter Umständen mit sehr großer Annäherung erfüllt sein können. Dagegen ist es natürlich für die Fortdauer der Wirbelbildung von wesentlicher Bedeutung, ob stetig Energie aus einer Energiequelle geschöpft werden kann. Bei einem konservativen Systeme kann sich die Wirbelbildung nicht dauernd in gleicher Richtung fortsetzen, durch die Beihilfe einer Energiequelle wird aber dieses möglich, wie wir es bei den atmosphärischen Bewegungen sehen.

2) V. Bjerknes: Über die Bildung von Zirkulationsbewegungen und Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten, Videnskabsselskabets Skrifter, Christiania 1898. Über einen hydrodynamischen Fundamentalsatz und seine Anwendung auf die Mechanik der Atmosphäre und des Weltmeeres, K. Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar, Stockholm 1898. Das dynamische Prinzip der Zirkulationsbewegungen in der Atmosphäre, Meteorologische Zeitschrift 1900. Zirkulation relativ zu der Erde, Öfversigt af K. Vetenskaps-Akad. Förhandl. 1901. Met. Zeitschr. 1902.

II. Die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen.

3. Ich bezeichne im folgenden durch u die Geschwindigkeit, durch p den Druck und durch q die Dichte der Flüssigkeit. Neben der Dichte führe ich auch das spezifische Volumen

(a) $$k = \frac{1}{q}$$

oder die „Beweglichkeit" der Flüssigkeit ein. Weiter führe ich neben der Geschwindigkeit auch das Produkt von Geschwindigkeit und Dichte

(b) $$\bar{u} = qu,$$

die spezifische Bewegungsgröße oder die „hydrodynamische Feldintensität" als Vektorgröße für die Beschreibung der Flüssigkeitsbewegung ein. Endlich werde ich mit f die auf die Einheit der Masse, mit $\bar{f}$ die auf die Einheit des Volumens bezogene Kraft bezeichnen, welche die einzelnen Flüssigkeitspartikelchen angreifen. Zwischen $\bar{f}$ und f besteht eine ähnliche Relation wie zwischen Feldintensität und Geschwindigkeit, nämlich

(c) $$\bar{f} = qf.$$

4. Wenn ich mit angehängten Indices x, y, z die Komponenten bezeichne, welche die genannten Vektorgrößen längs den drei rechtwinkligen Achsen x, y, z haben, so lassen sich die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen in der Form

(a) $$\begin{cases} \dfrac{du_x}{dt} = f_x - \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{du_y}{dt} = f_y - \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{du_z}{dt} = f_z - \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

schreiben. Dazu kommt noch die Kontinuitätsgleichung

(b) $$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{q}\frac{dq}{dt} = 0.$$

In diesen Gleichungen hat das $\frac{d}{dt}$ die bekannte Bedeutung

(c) $$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y} + u_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Dabei bezieht sich $\frac{d}{dt}$ auf die Veränderungen, die man an einem und demselben bewegten Flüssigkeitspartikelchen, $\frac{\partial}{\partial t}$ dagegen auf die Veränderungen, die man an einem und demselben Orte im Raume beobachtet.

5. In seiner klassischen Abhandlung über die Erhaltung der Wirbel setzt Helmholtz die Dichte q der Flüssigkeit konstant voraus, und bildet aus den Gleichungen 4, (a) eine neue, indem er die letzte Gleichung nach y, die vorletzte nach z differenziert, und die Differenz bildet. Dadurch entsteht eine Gleichung, welche den Druck p nicht mehr enthält, und welche in Verbindung mit zwei ähnlich gebildeten Gleichungen das Prinzip von der Erhaltung der Wirbel ausspricht.

Wenn man dagegen jede spezialisierende Voraussetzung über die Dichte fallen läßt, so wird der Druck aus den in dieser Weise gebildeten neuen Gleichungen nicht herausfallen. Anstatt zu dem Helmholtzschen Satz über die Erhaltung der Wirbel kommt man dann zu einem allgemeineren, welcher das Gesetz der Wirbelbildung in ihrer Abhängigkeit von der Dichtigkeits- und Druckverteilung gibt. Der Satz hat besonders Bedeutung für die Diskussion der atmosphärischen Wirbel, und das Beibehalten des Druckes in der Formel ist vorteilhaft, weil der Druck durch die Barometerbeobachtungen als bekannt angesehen werden kann.

Bei den Anwendungen, die ich hier vorhabe, kann aber keine primäre Kenntnis der Druckverteilung vorausgesetzt werden. Die Elimination des Druckes ist wesentlich und gelingt, wenn man vor der Differenziation die Gleichungen 4, (a) mit der Dichte q multipliziert. Die Sätze, auf welche man in dieser Weise kommt, nehmen aber erst dann ihre einfachste Gestalt an, wenn man die Flüssigkeitsbewegung durch die hydrodynamische Feldintensität anstatt durch die Geschwindigkeit beschreibt.

Zunächst führen wir also die hydrodynamische Feldintensität in den allgemeinen Bewegungsgleichungen ein. Zufolge 3, (b) haben wir

$$q\frac{du_x}{dt} = \frac{d\bar{u}_x}{dt} - u_x\frac{dq}{dt} = \frac{d\bar{u}_x}{dt} - \bar{u}_x\frac{1}{q}\frac{dq}{dt}.$$

Der Faktor von $\bar{u}_x$ in dem letzten Gliede rechts kommt in der Kontinuitätsgleichung vor. Es ist nach 3, (a) und 4, (b)

$$-\frac{1}{q}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{k}\frac{dk}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Jeder dieser drei äquivalenten Ausdrücke hat die Bedeutung der kubischen Ausdehnungsgeschwindigkeit pro Volumeinheit des bewegten Flüssigkeitspartikelchens. Zur Abkürzung werden wir diese Größe durch e bezeichnen, und also die Kontinuitätsgleichung künftig in der Form

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = e$$

oder nach einer bekannten Bezeichnung der modernen Vektoranalysis in der Form

(a′) $$\operatorname{div} u = e$$

schreiben. Es wird dann

$$q\frac{du_x}{dt} = \frac{d\bar{u}_x}{dt} + e\bar{u}_x,$$

und die erste Gleichung 4, (a) läßt sich

(b) $$\frac{d\bar{u}_x}{dt} + e\bar{u}_x = \bar{f}_x - \frac{\partial p}{\partial x}$$

schreiben.

6. Aus dieser Gleichung und aus den zwei entsprechenden, die sich auf $\bar{u}_y$ und $\bar{u}_z$ beziehen, sollen nun die Gleichungen abgeleitet werden, die sich auf den Wirbel $\bar{\xi}$ des Vektors $\bar{u}$ beziehen. Dieser Wirbel hat die Komponenten

(a) $$\begin{cases} \bar{\xi}_x = \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z} \\ \bar{\xi}_y = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} - \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \\ \bar{\xi}_z = \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \end{cases}$$

und wird in der modernen Vektoranalysis durch

(a′) $$\bar{\xi} = \operatorname{curl} \bar{u}$$

bezeichnet.

Dieser Wirbel $\bar{\xi}$ der Feldintensität ist von dem Wirbel $\xi = \operatorname{curl} u$ der Geschwindigkeit wohl zu unterscheiden. Wenn die Dichte q der Flüssigkeit räumlich konstant ist, so sind $\bar{\xi}$ und ξ überall gleichgerichtet und an Zahlenwert proportional,

(a″) $$\bar{\xi} = q\xi,$$

und es besteht kein wesentlicher Unterschied mehr zwischen den Feldern der Geschwindigkeit und der Feldintensität. Wir haben aber eben den allgemeinen Fall im Auge, wo die Dichte nach Raum und Zeit beliebig veränderlich sein kann, und der Feldintensitätswirbel kann dann sowohl an Richtung wie an Größe beliebig viel von dem Geschwindigkeitswirbel abweichen.

Die Differenziation der ersten Gleichung (a) nach x, der zweiten nach y und der dritten nach z und Addition gibt die bekannte Relation

(b) $$\frac{\partial \bar{\xi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\xi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\xi}_z}{\partial z} = 0,$$

welche allgemein für jeden Vektor gilt, der als der Wirbel eines anderen Vektors dargestellt werden kann.

7. Um die schließliche Ableitung der für die Wirbelbildung gültigen Gleichungen zu erleichtern, können wir die allgemeine dynamische Gleichung 5, (b) noch etwas umformen.

Wenn wir die Eulersche Entwickelung 4, (c) der Zeitableitung benutzen, so nimmt das erste Glied links der Gleichung 5, (b) die Form

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}$$

an. Wie man leicht erkennt, läßt sich dieses auch in der Form

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \left(u_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x}\right) + u_z \bar{\xi}_y - u_y \bar{\xi}_z$$

schreiben. Wenn wir im eingeklammerten trinomischen Glied nach 3, (a) und (b) $u_x = k\bar{u}_x$, etc. einführen, so nimmt der Ausdruck die Form

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \tfrac{1}{2} k \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}_x^2 + \bar{u}_y^2 + \bar{u}_z^2) + u_z \bar{\xi}_y - u_y \bar{\xi}_z$$

oder noch einfacher

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \tfrac{1}{2} k \frac{\partial \bar{u}^2}{dx} + u_z \bar{\xi}_y - u_y \bar{\xi}_z$$

an. Die Gleichung 5, (b) wird dann

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \tfrac{1}{2} k \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + u_z \bar{\xi}_y - u_y \bar{\xi}_z + e\bar{u}_x = \bar{f}_x - \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Die zwei anderen Gleichungen ergeben sich durch zyklische Vertauschung der x, y, z. Wenn wir gleichzeitig die Glieder etwas umstellen, ergibt sich also die folgende Form der allgemeinen hydrodynamischen Bewegungsgleichungen

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + u_z \bar{\xi}_y - u_y \bar{\xi}_z = \bar{f}_x - \dfrac{\partial p}{\partial x} - e\bar{u}_x - \tfrac{1}{2} k \dfrac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \bar{u}_y}{\partial t} + u_x \bar{\xi}_z - u_z \bar{\xi}_x = \bar{f}_y - \dfrac{\partial p}{\partial y} - e\bar{u}_y - \tfrac{1}{2} k \dfrac{\partial \bar{u}^2}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} + u_y \bar{\xi}_x - u_x \bar{\xi}_y = \bar{f}_z - \dfrac{\partial p}{\partial z} - e\bar{u}_z - \tfrac{1}{2} k \dfrac{\partial \bar{u}^2}{\partial z} \end{cases}$$

wobei an die Relationen 3, (a) und (b) und 6, (a) zu erinnern ist.

Diese drei Gleichungen lassen sich durch eine einzige Vektorgleichung darstellen, nämlich

$$\text{(a')} \qquad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\operatorname{curl} \bar{u}) \times u = \bar{f} - \nabla p - e\bar{u} - \tfrac{1}{2} k \nabla \bar{u}^2$$

∇ ist dann das Zeichen für die Hamiltonsche Differentialoperation mit den drei Differenziationskomponenten $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, und das Zeichen

$\times$ steht nach Gibbs zwischen den beiden Faktoren eines Vektorproduktes.[1])

III. Der allgemeine Wirbelbildungssatz.

8. Wir bilden jetzt nach Helmholtz' Vorgang aus den Gleichungen 7, (a) eine neue, indem wir die dritte nach y, die zweite nach z differenzieren und subtrahieren. Zunächst nimmt die linke Seite der neuen Gleichung unter Beachtung von 6, (a) die Form

$$\frac{\partial \bar{\xi}_x}{\partial t} + u_y \frac{\partial \bar{\xi}_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial \bar{\xi}_x}{\partial z} - u_x \left(\frac{\partial \bar{\xi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\xi}_z}{\partial z} \right)$$
$$+ \bar{\xi}_x \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \bar{\xi}_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - \bar{\xi}_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

an. Wenn wir das Glied $u_x \frac{\partial \bar{\xi}_x}{\partial x}$ addieren und subtrahieren und die Relationen 4, (c) und 6, (b) benutzen, so reduziert sich dieses auf

$$\frac{d \bar{\xi}_x}{dt} + \bar{\xi}_x \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \bar{\xi}_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - \bar{\xi}_z \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Die gesuchte Gleichnng wird dann die folgende, wenn wir nur das Glied $\frac{d \bar{\xi}_x}{dt}$ auf der linken Seite beibehalten

$$\text{(a)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d \bar{\xi}_x}{dt} = & - \bar{\xi}_x \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \bar{\xi}_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \bar{\xi}_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ & + \frac{\partial \bar{f}_z}{\partial y} - \frac{\partial \bar{f}_y}{\partial z} \\ & - \left(\frac{\partial (e \bar{u}_z)}{\partial y} - \frac{\partial (e \bar{u}_y)}{\partial z} \right) \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial z} - \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial y} \right). \end{aligned} \right.$$

Die zwei anderen Gleichungen ergeben sich durch zyklische Vertauschung der x, y, z. Diese Gleichungen enthalten die allgemeinsten Gesetze der Wirbelbewegung in reibungslosen Flüssigkeiten, vorausgesetzt daß man mit Wirbel den Wirbel $\bar{\xi}$ der hydrodynamischen Feldintensität meint, nicht den Wirbel ξ der Geschwindigkeit.

Zur Erleichterung der Diskussion schreiben wir nun

$$\text{(b)} \qquad \frac{d \bar{\xi}_x}{dt} = \left(\frac{d \bar{\xi}_x}{dt} \right)_{\mathrm{I}} + \left(\frac{d \bar{\xi}_x}{dt} \right)_{\mathrm{II}} + \left(\frac{d \bar{\xi}_x}{dt} \right)_{\mathrm{III}} + \left(\frac{d \bar{\xi}_x}{dt} \right)_{\mathrm{IV}}$$

---

1) Die Graßmannsche Parenthesbezeichnung hat den Übelstand, daß Parenthesen schon so viele andere Anwendungen haben; durch die Hamiltonsche Bezeichnung geht ein für andere Zwecke nützlicher Buchstabe, das V, verloren. Von allen bis jetzt vorgeschlagenen Bezeichnungen scheint mir deshalb die von Gibbs die zweckmäßigste. (Vergl. Gibbs-Wilson: Vector Analysis, New-York 1902.)

und untersuchen einzeln die vier Gleichungen

$$(\text{b}_{\text{I}}) \qquad \left(\frac{d\bar{\xi}_x}{dt}\right)_{\text{I}} = -\bar{\xi}_x\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \bar{\xi}_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + \bar{\xi}_z\frac{\partial u_x}{\partial z}$$

$$(\text{b}_{\text{II}}) \qquad \left(\frac{d\bar{\xi}_x}{dt}\right)_{\text{II}} = \frac{\partial \bar{f}_z}{\partial y} - \frac{\partial \bar{f}_y}{\partial z}$$

$$(\text{b}_{\text{III}}) \qquad \left(\frac{d\bar{\xi}_x}{dt}\right)_{\text{III}} = -\left(\frac{\partial(e\bar{u}_z)}{\partial y} - \frac{\partial(e\bar{u}_y)}{\partial z}\right)$$

$$(\text{b}_{\text{IV}}) \qquad \left(\frac{d\bar{\xi}_x}{dt}\right)_{\text{IV}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial z} - \frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial \bar{u}^2}{dy}\right),$$

welche die verschiedenen Umstände angeben, die auf die Wirbelbewegung Einfluß haben.

IV. Erhaltung der Wirbel.

9. Wenn wir zunächst die Gleichung 8, (b_{I}) und die zwei daraus durch zyklische Vertauschung von x, y, z folgenden aufschreiben, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$(\text{a}) \qquad \begin{cases} \left(\frac{d\bar{\xi}_x}{dt}\right)_{\text{I}} = -\bar{\xi}_x\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \bar{\xi}_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + \bar{\xi}_z\frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \left(\frac{d\bar{\xi}_y}{dt}\right)_{\text{I}} = \quad \bar{\xi}_x\frac{\partial u_y}{\partial x} - \bar{\xi}_y\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) + \bar{\xi}_z\frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \left(\frac{d\bar{\xi}_z}{dt}\right)_{\text{I}} = \quad \bar{\xi}_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + \bar{\xi}_y\frac{\partial u_z}{\partial y} - \bar{\xi}_z\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \end{cases}$$

Wenn zu der betrachteten Zeit keine Wirbel existieren, also $\bar{\xi}_x = \bar{\xi}_y = \bar{\xi}_z = 0$, so verschwinden die rechten, und also auch die linken Seiten dieser Gleichungen. Wenn also Wirbel nicht schon bestehen, so geben diese Gleichungen an, daß auch keine Neubildung von Wirbeln stattfindet. Sie geben folglich nur Modifikationen an, welche eine schon bestehende Wirbelbewegung unter Umständen erleidet.

Die Art dieser Modifikationen erkennt man leicht, wenn man sich der bekannten kinematischen Bedeutung der auf der rechten Seite auftretenden Differenzialausdrücke erinnert. Bekanntlich bedeuten

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

die Ausdehnungsgeschwindigkeiten pro Flächeneinheit von Flächen, die zur x-, y- oder z-Achse beziehungsweise senkrecht stehen. Die in der Diagonale stehenden, mit dem negativen Vorzeichen versehenen Glieder geben also an, wie das Wirbeln um jede der betreffenden Achsen abnimmt, wenn eine Ausdehnung der wirbelnden Flüssigkeitsmassen in

der Ebene senkrecht zu der Achse stattfindet, wie es wegen der Zunahme des Trägheitsmomentes der rotierenden Massen zu erwarten ist.

Andererseits hat der Differenzialquotient $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ die Bedeutung der Winkelgeschwindigkeit, mit der ein zur y-Achse paralleles Linienelement der Flüssigkeit sich um die z-Achse dreht. Das Glied $\bar{\xi}_y \frac{\partial u_x}{\partial y}$ und die übrigen, ähnlich gebildeten Glieder geben also die Veränderungen der einzelnen Wirbelkomponenten an, welche aus der Richtungsänderung der Wirbelachse relativ zu dem Koordinatensysteme folgen.

Die Gleichungen (a) sagen also genau dasselbe über diese Wirbel $\bar{\xi}$ der hydrodynamischen Feldintensität aus, was die bekannten Helmholtzschen Gleichungen über die Wirbel ξ in den homogenen und inkompressiblen Flüssigkeiten aussagen. Reduzieren sich die allgemeinen Wirbelgleichungen (8, a) ausschließlich auf die Gleichungen (a), so findet Erhaltung der schon bestehenden Wirbel und keine Wirbelbildung statt.

10. Man verifiziert auch leicht, daß sich die Gleichungen 9, (a) auf die gewöhnlichen Helmholtzschen Gleichungen für die Erhaltung der Wirbel reduzieren, wenn die Flüssigkeit homogen und inkompressibel wird.

Ist die Flüssigkeit zunächst inkompressibel, so erfüllt die Geschwindigkeit die Bedingung

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Mit Hilfe dieser Relation läßt sich die erste Gleichung 9, (a) in die Form

$$\text{(a)} \qquad \left(\frac{d\bar{\xi}_x}{dt}\right)_{\text{I}} = \bar{\xi}_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \bar{\xi}_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \bar{\xi}_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

bringen. Diese Gleichung zugleich mit den beiden entsprechenden, die sich auf die Achsen y und z beziehen, sind für inkompressible Flüssigkeiten gültig, die aber immer noch heterogen sein können, wie etwa eine Mischung von salzigem Wasser und Süßwasser, oder wie eine Mischung von Öl und Wasser.

Ist die Flüssigkeit zugleich homogen, und die Dichte q also räumlich konstant, so ist der Feldintensitätswirbel $\bar{\xi}$ dem Geschwindigkeitswirbel ξ einfach proportional (6, a''), und nach Entfernen des konstanten Faktors q erhält man

$$\text{(b)} \qquad \frac{d\xi_x}{dt} = \xi_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \xi_z \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Diese Gleichung läßt sich auch in die Form

$$\text{(b')} \qquad \frac{d\xi_x}{dt} = \xi_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + \xi_z \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

umschreiben. Die Gleichung (b) mit den entsprechenden für die y- und z-Achse geben die eine, die Gleichung (b′) mit den entsprechenden für die y- und z-Achse geben die andere Form der ursprünglichen Helmholtzschen Gleichungen für die Erhaltung der Wirbel.[1])

Wenn nun die äußere Kraft konservativ ist und die Flüssigkeit wie vorausgesetzt homogen und inkompressibel, so werden alle unten zu diskutierenden Glieder der allgemeinen Gleichungen der Wirbelbewegung verschwinden (Vergl. unten 11, 13, 15). Die allgemeine Gleichung 8, (a) reduziert sich auf die Form (b) oder (b′), und wir kommen auf das Helmholtzsche Resultat zurück.

V. Wirbelbildung durch äußere Kräfte.

11. Die Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \left(\frac{d\bar{\xi}_x}{dt}\right)_{\text{II}} = \frac{\partial \bar{f}_z}{\partial y} - \frac{\partial \bar{f}_y}{\partial z}$$

mit den entsprechenden Gleichungen für die beiden anderen Achsen beschreibt die selbstverständlich immer mögliche Wirbelbildung durch die äußeren Kräfte.

Besonders hervorzuheben ist aber, daß die äußeren Kräfte auch dann wirbelbildend wirken können, wenn sie konservative sind. Eine Kraft ist konservativ, wenn sich ihr Betrag f pro *Masseneinheit* durch eine Potentialfunktion Φ darstellen läßt,

$$\text{(b)} \qquad f_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad f_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Die Komponenten der auf *die Einheit des Volumens* bezogenen Kraft sind dann

$$\text{(b')} \qquad \bar{f}_x = q\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \bar{f}_y = q\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \bar{f}_z = q\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Wenn man dieses in (a) einführt, so wird

$$\text{(c)} \qquad \left(\frac{d\bar{\xi}_x}{dt}\right)_{\text{II}} = \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Der Ausdruck rechts ist die erste Komponente eines Vektorproduktes, und die Gleichung (c) in Verbindung mit den zwei ent-

1) Wissenschaftliche Abhandlungen I, S. 110—111.

sprechenden für die beiden anderen Achsen läßt sich durch die einzige Vektorgleichung

$$(c') \qquad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{II} = \nabla q \times \nabla \Phi$$

darstellen.

Der Vektor ∇q steht senkrecht auf den Flächen gleicher Dichte $q = \text{const.}$, und zeigt in die Richtung zunehmender Werte der Dichte. Genau entsprechend steht der Vektor $\nabla \Phi$ auf den Flächen $\Phi = \text{const.}$ senkrecht, und zeigt in die Richtung zunehmender Werte der Potentialfunktion Φ. Als Vektorprodukt dieser Vektoren steht $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{II}$ auf beiden senkrecht. Die Achsen der Wirbelbildung sind folglich längs den Schnittlinien der Flächenscharen $q = \text{const.}$ und $\Phi = \text{const.}$ gerichtet, und die Drehungsrichtung ist diejenige, welche auf dem kürzesten Wege von dem ersten Vektorfaktor ∇q zu dem zweiten $\nabla \Phi$ führt. Also:

(I, A.) *Es findet Wirbelbildung um die Schnittlinien der äquidensen Flächen $q = \text{const.}$ und der äquipotentiellen Flächen $\Phi = \text{const.}$ statt, und zwar in der Richtung von dem Dichtigkeitsvektor ∇q zu dem Potentialvektor $\nabla \Phi$.*

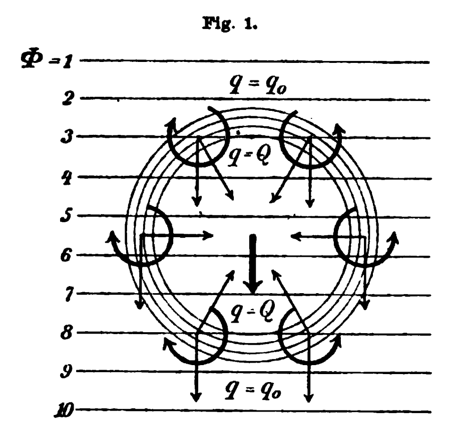
Nach diesem Gesetze wird also beispielsweise in der Atmosphäre eine Wirbelbildung um die Schnittlinien der äquidensen Flächen und Niveauflächen der Schwerkraft stattfinden. Wenn f die Beschleunigung der Schwere ist, und Φ nach der Definition (b) das Potential der Schwere, so zeigt der Vektor $\nabla \Phi$ vertikal abwärts. Zeigt nun der Dichtigkeitsvektor seitwärts, so wird die Drehung von dem Dichtigkeitsvektor nach dem Potentialvektor eine Bewegung sein, bei der die dichteren Massen auf der einen Seite heruntersinken, die dünneren auf der anderen Seite in die Höhe steigen, wie man es gleich erwartet. Der Satz kann für die Ableitung und für das quantitative Studium der atmosphärischen Wirbelbildung verwertet werden in genau derselben Weise wie der Satz, welcher diese Wirbelbildung auf die Dichtigkeitsverteilung in Verbindung mit der Druckverteilung zurückführt. Auf Anwendungen dieser Art soll jedoch bei dieser Gelegenheit nicht eingegangen werden.

Ist die Flüssigkeit homogen und inkompressibel, so ist der Vektor ∇q und damit auch das Vektorprodukt (c') gleich Null. In der homogenen und inkompressiblen Flüssigkeit findet also Wirbelbildung durch äußere konservative Kräfte nicht statt (Vergl. 10).

12. Besonders erläuternd für die nachfolgenden Diskussionen wird die Betrachtung des folgenden Spezialfalles sein.

In einer homogenen Flüssigkeit von der Dichte $q = q_0$ befinde sich eine begrenzte Flüssigkeitsmasse, welche die größere Dichte $q = Q$ hat und welche wir kurz als den *Körper* im Gegensatz zu der umgebenden Flüssigkeit bezeichnen werden. In einer Übergangsschicht soll die sonst konstante Dichte Q dieses Körpers stetig aber schnell von dem Wert Q zu dem Wert q_0 heruntersinken. Fig. 1 soll einen Vertikalschnitt durch den Körper und die Flüssigkeit darstellen. In der Übergangsschicht sieht man eine Anzahl dicht an einander verlaufender äquidenser Flächen, welche von den horizontalen Niveauflächen der Schwerkraft geschnitten werden. Nur in dieser Übergangsschicht hat der Dichtigkeitsvektor ∇q einen von Null verschiedenen Wert, und nur hier findet Wirbelbildung statt. Die in der Richtung von dem Potentialvektor zu dem Dichtigkeitsvektor aufkommenden Wirbel sind aber, wie man durch die Betrachtung der Figur gleich sieht, nur in der Weise möglich, daß der Körper eine Bewegung abwärts relativ zu der umgebenden Flüssigkeit annimmt. Hat andererseits der flüssige Körper kleinere Dichte als die umgebende Flüssigkeit, so wird der Vektor ∇q in der Übergangsschicht die entgegengesetzte Richtung haben, die Wirbelbildung findet in entgegengesetzter Richtung statt, und der Körper muß eine Bewegung aufwärts relativ zu der umgebenden Flüssigkeit annehmen.

Fig. 1.



Nichts hindert uns nun Kräfte einzuführen, welche die einzelnen Punkte des homogenen Inneren des flüssigen Körpers in fester gegenseitiger Lage zu einander halten. Denn diese Kräfte würden konservativ sein, und im homogenen Inneren des flüssigen Körpers nicht wirbelbildend wirken und also keine Modifikation unserer Resultate zur Folge haben. Mit anderen Worten, wir können den inneren homogenen Kern des flüssigen Körpers auch durch einen festen Körper ersetzen. Weiter hindert uns nichts, die Übergangsschicht immer dünner zu machen, bis wir zu dem Grenzfall kommen, daß die Dichte plötzlich von dem Wert Q auf den Wert q_0 sich verändert und das Wirbeln an dieser Diskontinuitätsfläche in ein Gleiten übergeht. Als Konsequenz der Wirbeltheorie finden wir also das Resultat:

(I, B.) *Relativ zu der umgebenden schweren Flüssigkeit wird ein*

dichterer Körper eine Bewegung abwärts, ein weniger dichter Körper eine Bewegung aufwärts annehmen.

Dieses ist nichts anderes als die bekannte Erfahrung, welche man sonst mit Hilfe des Archimedischen Prinzipes erklärt. Wir stellen es hier des Vergleiches halber mit den unten abzuleitenden Sätzen hin. Es ist jedoch wichtig hervorzuheben, daß das Resultat (I, B) durch dynamische Betrachtungen gewonnen ist, und deshalb in der Tat eine weit größere Tragweite hat als das gewöhnliche, welches man aus dem Archimedischen Prinzipe durch statische Betrachtungen ableitet. Das Resultat (I, B) ist gültig, welche Bewegungen auch vom Anfang an der Körper und die Flüssigkeit relativ zu einander besitzen. In allen Fällen leitet man aus (I, B) eine Zuschlagsbewegung ab, welche sich auf die früheren superponiert.

VI. Wirbelbildung durch Volumveränderung in einem Stromfelde.

13. Die Gleichung

$$\text{(a)}\qquad \left(\frac{d\bar{\xi}_x}{dt}\right)_{\text{III}} = -\left(\frac{\partial(e\bar{u}_z)}{\partial y} - \frac{\partial(e\bar{u}_y)}{\partial z}\right)$$

in Verbindung mit den zwei entsprechenden, die sich auf die Achsen y und z beziehen, lassen sich durch die einzige Vektorgleichung

$$\text{(a')}\qquad \left(\frac{d\bar{\xi}}{dt}\right)_{\text{III}} = -\operatorname{curl} e\bar{u}$$

darstellen. Wenn der Vektor $e\bar{u}$ nach der Terminologie der Vektoranalysis einen Wirbel hat, tritt also dynamische Wirbelbildung ein.

Der Vektor $e\bar{u}$ verschwindet identisch, wenn die Expansionsgeschwindigkeit e gleich Null ist. In homogener und inkompressibler Flüssigkeit fällt also diese Ursache der Wirbelbildung fort (vergl. 10).

Wir gehen gleich zu der Betrachtung des besonders wichtigen Spezialfalles der *primären* Wirbelbildung über. Wenn zu der Anfangszeit $\bar{\xi} = 0$, so läßt sich die hydrodynamische Feldintensität $\bar{u}$ durch ein Potential darstellen.

$$\text{(b)}\qquad \bar{u}_x = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}, \quad \bar{u}_y = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}, \quad \bar{u}_z = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}.$$

Durch Einsetzen in (a) ergibt sich

$$\text{(c)}\qquad \left(\frac{d\bar{\xi}_x}{dt}\right)_{\text{III}} = -\left(\frac{\partial e}{\partial y}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z} - \frac{\partial e}{\partial z}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}\right).$$

Zwei andere Gleichungen ergeben sich durch zirkuläre Vertauschung von x, y, z. Die drei Gleichungen sind die Komponentengleichungen der Vektorgleichung

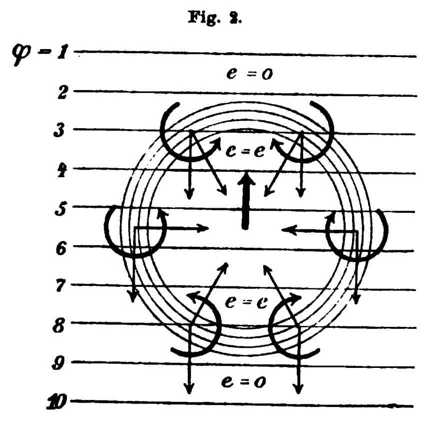
$$\text{(c')}\qquad \left(\frac{d\bar{\xi}}{dt}\right)_{\text{III}} = -\nabla e \times \nabla\bar{\varphi}.$$

Dieses Wirbelbildungsgesetz wird also dem vorhergehenden 11, (c′) genau ähnlich. Man braucht sich nur in 11, (c′) die kubische Expansionsgeschwindigkeit e an Stelle der Dichte q, das Potential $\overline{\varphi}$ der hydrodynamischen Feldintensität an Stelle des Potentiales Φ der Schwerkraft zu denken und sich des entgegengesetzten Vorzeichens zu erinnern, um aus dem Satze (I, A) gleich den folgenden abzuleiten:

(II, A.) *Es findet Wirbelbildung um die Schnittlinien der Äquiexpansionsflächen $e = const.$ und der Äquipotentialflächen $\overline{\varphi} = const.$ statt, und zwar in der Richtung von dem Potentialvektor $\nabla \overline{\varphi}$ zu dem Expansionsvektor ∇e.*

14. Man schließt hieraus gleich weiter, daß ein sich expandierender oder kontrahierender flüssiger Körper sich in einem potentiellen Stromfelde ähnlich verhalten wird, wie ein schwerer oder ein leichter Körper nach dem Archimedischen Prinzipe in einer schweren Flüssigkeit. Der sich expandierende Körper habe in seinem Inneren eine konstante Expansionsgeschwindigkeit. In einer Übergangsschicht gehe aber die Expansionsgeschwindigkeit rasch auf den Wert Null herab. In dieser Übergangsschicht verlaufen dann eine Anzahl von Äquiexpansionsflächen dicht nebeneinander, und nur in dieser Schicht hat der Vektor ∇e einen von Null verschiedenen Wert. In dieser Grenzschicht ist also die Wirbelbildung begrenzt. Da der Vektor ∇e nach innen zeigt, wird das Wirbeln in der Richtung von dem Potentialvektor zu dem Expansionsvektor eine relative Bewegung des expandierenden Körpers entgegen der Richtung des Potential vektors zur Folge haben (Fig. 2). Wenn der Körper sich kontrahiert, hat der Expansionsvektor in der Übergangsschicht die entgegengesetzte Richtung, die Wirbelbildung tritt in der entgegengesetzten Richtung ein, und der sich kontrahierende Körper sucht relativ zu der umgebenden Flüssigkeit eine Bewegung in der Richtung des Potentialvektors anzunehmen.

Fig. 2.



Da die Richtung des Potentialvektors dieselbe wie die Richtung des Stromes ist, läßt sich das Resultat auch in der folgenden Weise aussprechen:

(II, B.) *Relativ zu der umgebenden bewegten Flüssigkeit betrachtet wird ein sich kontrahierender Körper eine Bewegung mit dem Strome, ein sich expandierender eine Bewegung entgegen demselben annehmen.*

Wir haben das Resultat von der Formel 13, (c′) abgeleitet, welche eine wirbelfreie Verteilung der hydrodynamischen Feldintensität voraussetzt. Dieses will sagen, daß der volumändernde Körper im voraus eine ganz bestimmte Bewegung relativ zu der Flüssigkeit hat. Der Satz (II, B) gibt also an, daß zu dieser Bewegung eine Zuschlagsbewegung hinzukommt. Man erkennt aber leicht durch Diskussion der allgemeinen Formel 13, (a′), daß das Resultat in der Form (II, B) ganz allgemein gültig ist. Es ist nur die Beziehung der Wirbelbildung zu den Schnittlinien der zwei Flächenscharen (II, A), welche wegfällt, in demselben Augenblicke, als die äquipotentiellen Flächen zu existieren aufhören.

Das Resultat (II, B) enthält das dynamische Prinzip, welches der Anziehung oder der Abstoßung pulsierender Kugeln zugrunde liegt[1]), nur ist es jetzt ganz allgemein, ohne jede Beschränkung in bezug auf die Form des pulsierenden Körpers abgeleitet.

VII. Wirbelbildung durch Beweglichkeitsunterschiede im Stromfelde.

15. Die Gleichung 8, (b_{IV})

$$\left(\frac{d\bar{\xi}_x}{dt}\right)_{IV} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial z} - \frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial y}\right) \tag{a}$$

in Verbindung mit den entsprechenden Gleichungen für die zwei anderen Achsen sind die Komponentengleichungen der Vektorgleichung

$$\left(\frac{d\bar{\xi}}{dt}\right)_{IV} = -\tfrac{1}{2}\nabla k \times \nabla \bar{u}^2. \tag{a′}$$

Diese Gleichung hat wieder dieselbe Form wie 11, (c′) und 13, (c′), und wir erhalten also ein zweites dynamisches Analogon zu der einfachen Wirbelbildung durch konservative äußere Kräfte.

Wenn wir den Vergleich mit der Formel 11, (c′) durchführen, so findet man Unterschiede in den folgenden drei Punkten: Erstens kommt rechts ein negatives Vorzeichen vor; zweitens ist an Stelle der Dichte q das spezifische Volumen k oder die reziproke Dichte getreten; drittens ist an Stelle des Potentiales Φ der Schwerkraft das Quadrat der hydrodynamischen Feldintensität $\bar{u}$ getreten. Der Satz verändert sich also in den folgenden:

(III, A.) *Es findet Wirbelbildung um die Schnittlinien der Flächen $k = const.$ gleichen spezifischen Volumens und die Flächen $\bar{u}^2 = const.$*

1) V. Bjerknes: Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknes' Theorie. Leipzig 1900—1902. B. I., S. 198, B. II, S. 8 — Im folgenden wird auf dieses Werk durch die Buchstaben H. F. hingewiesen.

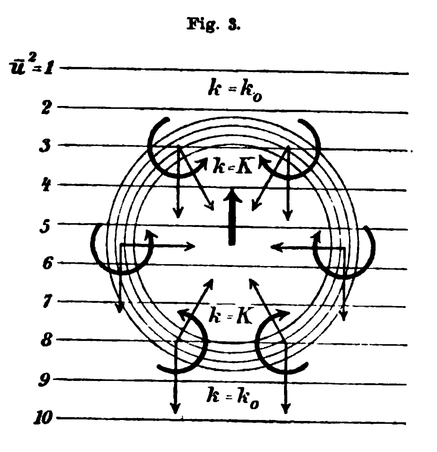
gleicher Werte des Quadrates der hydrodynamischen Feldintensität statt, und zwar in der Richtung von dem Vektor $\nabla \bar{u}^2$ zu dem Vektor ∇k.

Wenn $\nabla k = 0$, und also die Flüssigkeit homogen ist, hört diese Wirbelbildung auf (vergl. 10).

16. Wenn wir dieses Resultat auf eine bewegte Flüssigkeit anwenden, in dem sich ein flüssiger Körper anderen spezifischen Volumens befindet, so erhalten wir ein zweites dynamisches Analogon zu der Bewegung eines schweren Körpers in einer schweren Flüssigkeit nach dem Archimedischen Prinzipe.

Der flüssige Körper (Fig. 3) habe zunächst größeres spezifisches Volumen als die umgebende Flüssigkeit. In einer Übergangsschicht soll das spezifische Volumen stetig aber schnell von dem Werte $k = K$ auf den Wert $k = k_0$ abnehmen, welches in der umgebenden Flüssigkeit hat. Nur in dieser Übergangsschicht existiert dann ein Vektor ∇k. Da dieser Vektor nach innen zeigt, wird die in der Richtung von dem Vektor $\nabla \bar{u}^2$ zu dem Vektor ∇k eintretende Wirbelbildung eine Bewegung des Körpers relativ zu der umgebenden Flüssigkeit zur Folge haben, welche der Richtung des Vektors $\nabla \bar{u}^2$ entgegengesetzt ist.

Fig. 3.



Hat der Körper kleineres spezifisches Volumen als die umgebende Flüssigkeit, so zeigt der Vektor ∇k in der Übergangsschicht in die entgegengesetzte Richtung, und das entgegengesetzt gerichtete Wirbeln hat eine relative Bewegung des Körpers in der Richtung des Vektors $\nabla \bar{u}^2$ zur Folge. In der umgebenden homogenen Flüssigkeit wird nun das Quadrat der hydrodynamischen Feldintensität der kinetischen Energie des Stromes proportional sein, und wir können sagen, daß der Vektor $\nabla \bar{u}^2$ in der Richtung zunehmender Energie des Stromfeldes zeigt. Das Resultat wird also das folgende:

(III, B.) *Relativ zu dem umgebenden Strome wird ein Körper größeren spezifischen Volumens in der Richtung abnehmender, ein Körper kleineren spezifischen Volumens in der Richtung zunehmender Energie des Stromes getrieben.*

Eine strenge Ableitung dieses Resultates ist früher nur für kugelförmige Körper geführt worden.[1]) Die jetzt gegebene Ableitung ist von jeder Beschränkung in bezug auf die Form des Körpers frei.

1) H. F., I., S. 108.

VIII. Analogie der wirbelbildenden Kräfte in der Flüssigkeit mit den ponderomotorischen Kräften im elektrostatischen Felde.

17. Wir kehren zu der allgemeinen Gleichung der Wirbelbildung 8, (a) zurück. Wir können uns die Vorstellung machen, daß die äußere Kraft so abgepaßt ist, daß sie die aus dynamischen Gründen in der Flüssigkeit vor sich gehende Wirbelbildung aufhebt. Unter diesen Umständen werden wir also dauernd

(a) $$\bar{\xi}_x = \bar{\xi}_y = \bar{\xi}_z = 0$$

haben. Die linke Seite der Gleichung 8, (a) verschwindet dann identisch. Ebenfalls fallen auf der rechten Seite die Glieder aus, die sich auf die Erhaltung des Wirbels beziehen. Endlich wird zufolge (a) die hydrodynamische Feldintensität dauernd von einem Potentiale $\bar{\varphi}$ abhängen. Die dritte Zeile rechts der Gleichung 8, (a) nimmt deshalb die Form 13, (c) an. Die Gleichung läßt sich dann in der Form

$$\frac{\partial \bar{f}_z}{\partial y} - \frac{\partial \bar{f}_y}{\partial z} = \frac{\partial e}{\partial y}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} - \frac{\partial e}{\partial z}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial z} - \frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial y}\right)$$

schreiben. Zwei andere Gleichungen erhält man durch zyklische Vertauschung der Buchstaben x, y, z, und alle drei lassen sich durch die einzige Vektorgleichung

(b) $$\operatorname{curl} \bar{f} = \nabla e \times \nabla \bar{\varphi} + \tfrac{1}{2}\nabla k \times \nabla \bar{u}^2$$

darstellen.

Diese Gleichung muß also die äußere Kraft erfüllen, welche die Wirbelbildung in der Flüssigkeit verhindert. Die entgegengesetzt gleiche Kraft

$$\bar{f}_e = -\bar{f}$$

können wir folglich als die Kraft definieren, welche in der Flüssigkeit wirbelbildend wirkt und also von den äußeren Kräften aufgehoben werden muß. Die vorhergehende Diskussion hat gezeigt, wie diese Kraft progressive Bewegungen teils der pulsierenden, teils der leichten oder der schweren Flüssigkeitsmassen durch das umgebende Stromfeld zur Folge hat. $\bar{f}_e$ ist mit anderen Worten die Kraft, welche C. A. Bjerknes für den Fall kugelförmiger Körper die hydrodynamische Energiekraft genannt hat.[1]) Für die hydrodynamische Energiekraft gilt also die Vektorgleichung

(c) $$\operatorname{curl} \bar{f}_e = -\nabla e \times \nabla \bar{\varphi} - \tfrac{1}{2}\nabla k \times \nabla \bar{u}^2,$$

oder wenn wir keinen Gebrauch mehr von der Hilfsgröße $\bar{\varphi}$ machen, und also $\nabla \bar{\varphi}$ durch $\bar{u}$ ersetzen

(c′) $$\operatorname{curl} \bar{f}_e = -\nabla e \times \bar{u} - \tfrac{1}{2}\nabla k \times \nabla \bar{u}^2.$$

1) H. F., I., S. 133, II, S. 20.

18. Andererseits kennen wir die ponderomotorischen Kräfte, welche die einzelnen materiellen Volumeinheiten im elektrostatischen Felde angreifen. Zu dem leichteren Vergleiche mit den entsprechenden hydrodynamischen Formeln bezeichne ich die einander entsprechenden elektrischen und hydrodynamischen Größen durch dieselben Buchstaben. Wenn dann $\bar{u}$ die elektrostatische Feldintensität bedeutet, k die Dielektrizitätskonstante (die Polarisierbarkeit) und e die wahre elektrische Dichte, so wird die ponderomotorische Kraft $\bar{f}$ pro Volumeinheit die Komponenten

$$\bar{f}_x = e\bar{u}_x - \tfrac{1}{2}\bar{u}^2\frac{\partial k}{\partial x}$$
$$\bar{f}_y = e\bar{u}_y - \tfrac{1}{2}\bar{u}^2\frac{\partial k}{\partial y}$$
$$\bar{f}_z = e\bar{u}_z - \tfrac{1}{2}\bar{u}^2\frac{\partial k}{\partial z}$$

haben, wie es jetzt allgemein angenommen zu sein scheint.[1])

Wenn wir nun den Wirbel dieser Kraft bilden und uns an die Bedingung erinnern, daß die elektrostatische Feldintensität $\bar{u}$ ein wirbelfreier Vektor ist, so kommen wir auf die Gleichung 17, (c′) nur mit dem entgegengesetzten Vorzeichen für die Glieder auf der rechten Seite. Es ist also

$$\operatorname{curl} \bar{f} = -\operatorname{curl} \bar{f}_e.$$

Also:

Die ponderomotorischen Kräfte im elektrostatischen Felde und die Energiekräfte im hydrodynamischen Stromfelde haben entgegengesetzt gleiche Wirbel.

Aus dieser Beziehung zwischen den Wirbeln der beiden zu vergleichenden Kräfte kann man nicht ohne weiteres auf die Beziehung zwischen den Kräften selbst schließen. Die zwei Kräfte könnten sich eventuell noch um eine nicht wirbelnde, also um eine potentielle Partie von einander unterscheiden. Wie es sich damit verhält, kann aus der entwickelten Theorie der Wirbelbildung in Flüssigkeiten nicht geschlossen werden. Der praktische Inhalt des Resultates über die entgegengesetzt gleichen Wirbel der zwei Kräfte wird aber nach der oben in den Einzelnheiten durchgeführten Diskussionen klar sein. Die Bewegung eines Körpers durch ein umgebendes Medium ist notwendig mit einer Wirbelbildung in der Grenzschicht zwischen dem Körper und dem Medium verbunden. Und umgekehrt, das Auftreten eines Wirbels

1) Vergl. hierüber z. B. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen I, S. 811; Kirchhoff, Vorlesungen über Elektrizität und Magnetismus, S. 180; Heaviside, Electromagnetic Theory I, S. 107; E. Cohn; Das elektromagnetische Feld, S. 87.

in einer solchen Grenzschicht ist notwendig mit einer Bewegung des Körpers durch das umgebende Medium verbunden. Die entgegengesetzte Gleichheit der zwei Wirbel führt also zu dem folgenden Resultate:

Die Energiekräfte im hydrodynamischen Stromfelde und die ponderomotorischen Kräfte im elektrostatischen Felde erzeugen entgegengesetzt gleiche Bewegungen der betreffenden Körper durch die Felder.

Dagegen wäre es eventuell noch möglich, daß die zwei Kräfte sich verschieden verhalten könnten in bezug auf solche Deformationen eines Körpers, welche man nicht mehr als Bewegungen des Körpers als Ganzen durch das umgebende Medium bezeichnen kann.

IX. Analogie der elektrostatischen und der hydrodynamischen Erscheinungen.

19. Wir können nun die hydrodynamischen Formeln zusammenstellen, die sich auf den Fall beziehen, daß passende äußere Kräfte den hydrodynamischen Energiekräften das Gleichgewicht halten. Ebenfalls können wir die Formeln für das elektrostatische Feld zusammenstellen, und dabei dieselbe Voraussetzung machen, daß passende äußere Kräfte den ponderomotorisch bewegenden elektrischen Kräften das Gleichgewicht halten.

Die Bedingungen, welche wir somit den äußeren Kräften in den zwei Fällen auferlegen, entsprechen einander genau. Denn werden die hydrodynamischen Energiekräfte nicht durch äußere Kräfte aufgehoben, so werden Wirbel der hydrodynamischen Feldintensität $\bar{u}$ auftreten. Werden andererseits die ponderomotorischen Kräfte des elektrischen Systemes nicht aufgehoben, so wird es nicht mehr ein streng statisches System sein, und es müssen nach Maxwells Theorie Wirbel der elektrischen Feldintensität auftreten.

Die beiden Formelsysteme werden unter einander identisch, nur von dem Unterschied der Vorzeichen der Formeln abgesehen, welche sich auf die ponderomotorischen Kräfte beziehen. Indem wir die einander entsprechenden Größen mit gleichen Buchstaben bezeichnen, wird es dann nicht nötig sein, das Formelsystem zweimal aufzuschreiben, wir können ein einziges schreiben, das sich in zweifacher Weise interpretieren läßt.

Zunächst ist also unter den gemachten Voraussetzungen die hydrodynamische Feldintensität eine wirbelfreie Vektorgröße,

$$\text{(a)} \qquad \operatorname{curl} \bar{u} = 0.$$

Dieselbe Gleichung gilt für die elektrische Feldintensität $\bar{u}$, welche nach Maxwells Theorie unter statischen Verhältnissen immer eine wirbelfreie Vektorgröße ist.



Durch Multiplikation der hydrodynamischen Feldintensität mit dem spezifischen Volumen oder der Beweglichkeit k der Flüssigkeit erhält man einen neuen Vektor, die Geschwindigkeit u. Durch Multiplikation der elektrischen Feldintensität mit der Dielektrizitätskonstante oder der Polarisierbarkeit k des Mediums erhält man eine neue Vektorgröße, die elektrische Polarisation (Induktion) u,

$$u = k\bar{u}. \tag{b}$$

Die Divergenz der Geschwindigkeit gibt die kubische Ausdehnungsgeschwindigkeit pro Volumeinheit e (5, a'). Die Divergenz der Polarisation gibt die wahre elektrische Dichte e[1]):

$$\operatorname{div} u = e. \tag{c}$$

Das elektrostatische Feld ist bekanntlich eindeutig bestimmt, wenn die wahren Dichten e und die Werte der Dielektrizitätskonstanten k überall gegeben sind. Da das Gleichungssystem dasselbe ist, wird folglich auch notwendig das hydrodynamische Stromfeld eindeutig bestimmt, wenn die kubische Ausdehnungsgeschwindigkeit e und die Werte des spezifischen Volumens k überall gegeben sind. Dadurch gewinnt man das folgende allgemeine Resultat:

Es sei in einem hydrodynamischen Systeme das spezifische Volumen genau so verteilt, wie in einem elektrostatischen Felde die Dielektrizitätskonstante, und es sei im hydrodynamischen Systeme die kubische Ausdehnungsgeschwindigkeit pro Volumeinheit genau so verteilt, wie im elektrostatischen Felde die wahre elektrische Dichte. Es wird dann die Geschwindigkeit im hydrodynamischen Systeme genau so im Raume verteilt sein, wie im elektrischen die Polarisation, und es wird die hydrodynamische Feldintensität genau so im Raume verteilt sein wie die elektrische Feldintensität.

In diesen beiden Systemen, welche also in geometrischer Hinsicht nicht von einander zu trennen sind, treten gewisse Kräfte auf, welche von äußeren Kräften aufgehoben werden müssen, damit die Bedingung von der nicht wirbelnden Natur der Feldintensität dauernd erfüllt werden kann. Den Ausdruck dieser Kräfte kennen wir noch nicht in beiden Fällen. Wir kennen aber ihre Wirbel,

$$\operatorname{curl} \bar{f}_e = \pm \nabla e \times \bar{u} \pm \tfrac{1}{2} \nabla k \times \nabla \bar{u}^2, \tag{d}$$

wobei sich das obere Vorzeichen auf den elektrostatischen, das untere auf den hydrodynamischen Fall bezieht.

---

1) Ich wende durchgehend das Heavisidesche „rationelle Einheitssystem" für elektrische Größen an. Vergleiche H. F., II, S. 288—294.

20. Da das eine System ein wirklich statisches ist, jedenfalls was die unseren Sinnen zugänglichen Bewegungen anlangt, während das andere sich bewegt, wird die Analogie gewöhnlich nur für einen Moment bestehen können, nämlich nur für den Moment, wo das bewegte System durch eine ganz bestimmte Konfiguration passiert. Wenn aber eine schwingende Bewegung um diese Lage vorliegt, so wird die Analogie dauernd bestehen können. Verlaufen die Schwingungen mit unmerkbar kleinen Amplituden, so wird die Analogie auch insofern in äußerer Hinsicht vollständig, als das hydrodynamische System für äußerliche Beobachtung ein streng statisches System zu sein scheint.

Für die Beschreibung des Durchschnittszustandes dieses schwingenden Systemes kann man dasselbe Gleichungssystem 18, (a) bis (d) oben anwenden, welches für den augenblicklichen Bewegungszustand gilt, nur daß man die Größen des Feldes als die von der Zeit unabhängigen quadratischen Mittelwerte derjenigen Größen, welche sie ursprünglich darstellten, interpretiert. In dieser Hinsicht verhält sich natürlich alles genau so, wie es im speziellen Falle von kugelförmigen Körpern entwickelt worden ist.[1])

X. Schlußbemerkungen.

21. Die entwickelte Theorie der Wirbelbildung in reibungslosen Flüssigkeiten hat uns also gestattet, eine ausgedehnte Verallgemeinerung der früher bekannten Resultate über die Analogie hydrodynamischer Erscheinungen mit elektrischen oder magnetischen zu gewinnen. Doch sind nicht alle früher bekannten Resultate Gegenstand der Verallgemeinerung gewesen. Außer den hydrodynamischen Fernwirkungen, welche entweder auf pulsierenden Bewegungen der Körper oder auf Dichtigkeitsunterschieden zwischen Körper und Flüssigkeit beruhen, gibt es auch solche, die von translatorischen Eigenbewegungen der Körper herrühren. Selbständig oszillierende Kugeln verhalten sich bekanntlich wie permanente Magnete, nur von dem durchgehenden Unterschied im Vorzeichen der ponderomotorischen Kraft abgesehen. Über Wirkungen dieser Art hat uns aber die entwickelte Wirbeltheorie keine Erläuterungen gegeben.

Damit ist nicht gesagt, daß die Wirbeltheorie dieses nicht leisten kann. Durch die Voraussetzung, daß die äußeren Kräfte jedes Auftreten von Wirbeln der Feldintensität verhindern sollten (17), ist der Fall der *selbständigen* Eigenbewegungen der Körper ausgeschlossen. Nur ganz bestimmte Eigenbewegungen können vorkommen, welche

1) H. F., I., S. 30, 64 und 190.

solche Wirbel der Feldintensität nicht zur Folge haben. Andere Methoden als die hier entwickelten, auf Wirbelbetrachtungen beruhenden, sind aber vorzuziehen, wenn man diese selbständigen Eigenbewegungen mit berücksichtigen will, sei es daß diese Eigenbewegungen durch fremde nicht hydrodynamische Kräfte erzeugt sind, oder sei es, daß sie auf der Wirkung hydrodynamischer Energiekräfte beruhen, indem für die Gegenwirkung dieser keine äußeren Kräfte eingeführt worden sind, und zwar sind andere Methoden absolut erforderlich, um die Frage nach der Analogie mit Elektrizität und Magnetismus vollständig zu beantworten. Denn die Wirbeltheorie gibt nur den Wirbel der gesuchten ponderomotorischen Kraft, nicht den Ausdruck dieser Kraft selbst.

Die neuen Methoden werden aber immer in der Diskussion von Flüssigkeitsbewegungen unter solchen Umständen bestehen, wo Wirbelbildung stattfindet, und die Diskussion der Wirbelbildung an sich kann als eine zweckmäßige einleitende Aufgabe betrachtet werden.

Bücherschau.

Frischauf, J. Grundriß der theoretischen Astronomie und der Geschichte der Planetentheorien. Zweite, vermehrte Auflage. Mit 22 Figuren im Text. 8°. XV u. 199 S. Leipzig, W. Engelmann 1903. Preis geh. Mk. 5.00, geb. Mk. 6.00.

Vor 32 Jahren erschien die erste Auflage dieses nützlichen Werkchens, und wenn es auch seitdem in vielen Exemplaren vor allem unter den Studierenden der Astronomie Verbreitung gefunden, so scheint es uns doch angemessen, mit einigen Worten den Inhalt des kurz und klar in das Wesen der Hauptprobleme der theoretischen Astronomie einführenden Buches zu skizzieren.

Es gliedert sich in drei Teile, von denen die beiden ersten in enger Anlehnung an Gauß' „Theoria motus“ und Olbers' „Leichteste und bequemste Methode“ das behandeln, was zur vollständigen Berechnung einer elliptischen oder parabolischen Bahn erforderlich ist. Der erste Teil dient den Auseinandersetzungen der Beziehungen zwischen den die Bewegung der Himmelskörper um die Sonne bestimmenden Größen. Die Ableitungen lassen hier an Durchsichtigkeit kaum etwas zu wünschen übrig, eine Bemerkung, die in fast noch höherem Maße von dem zweiten Teil gilt, der sich der engeren Aufgabe, Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, widmet.

Den Anfang macht die Berechnung einer Planetenbahn aus drei vollständigen Beobachtungen. Im Vorwort (S. VI) weist der Verfasser auf die Gleichung (11), S. 37 hin, deren allzu geringe Beachtung er wohl mit

Recht beklagt, da sie doch geeignet ist, die Unbekannte x' — und damit die kurtierte Distanz ϱ' und den Radiusvektor r' — leichter zu ermitteln, als die Gaußische Größe z der Gleichung (IV) im Art. 141 der Theoria motus. Der zweite Abschnitt des zweiten Teiles lehrt die Bestimmung einer parabolischen Kometenbahn nach dem Olbersschen Verfahren, der dritte die Herleitung einer elliptischen Planetenbahn aus vier Beobachtungen, von denen nur zwei vollständig sind. — Wir halten es hier am Platze, auf die bequeme und einfache Methode hinzuweisen, die A. Berberich in seiner Abhandlung „Abgekürzte Berechnung einer elliptischen Planetenbahn aus vier Beobachtungen" (Veröff. d. kgl. astron. Recheninst. zu Berlin Nr. 20) auf knapp 6 Seiten gelehrt und an einem Beispiel erläutert hat. — Der vierte Abschnitt bespricht die Vorbereitungsrechnungen, die sich auf Verwandlung von Rektascension und Deklination in Länge und Breite, Parallaxe, Aberration, Präzession und Nutation beziehen. Unterweisungen über die Herstellung einer Ephemeride, Vergleichung von Beobachtungen mit der Ephemeride, Bildung von Normalörtern und Verbesserung der Ausgangselemente der Bahn schließen sich an, und endlich folgt noch ein sechster Abschnitt, der sich die Darstellung der Auswertung von speziellen Störungen nach der Bond-Enckeschen Methode zur Aufgabe setzt. Wie die anderen Kapitel, die Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen ausgenommen, so wird auch jenes durch ein in extenso durchgerechnetes numerisches Beispiel erläutert. — Auf die trefflichen „Tafeln zur theoretischen Astronomie" von Bauschinger ist allenthalben gebührend verwiesen.

Im dritten Hauptteil hat auf 50 Seiten eine knappe, die wichtigsten Phasen der Entwicklung heraushebende Geschichte der Planetentheorien Platz gefunden. Doch, meinen wir, sollte auch in diesem Abriß der Name des hervorragendsten unter den antiken Vorläufern des Kopernicus nicht fehlen dürfen, der Name des Aristarch von Samos, der um 270 a. Ch. blühte.

Die Anmerkungen und Zusätze des 46 Seiten umfassenden Anhanges wären unseres Erachtens sehr viel besser in den Lehrgang des Buches verwoben worden; Schwierigkeiten erwüchsen daraus an keiner Stelle. Beachtenswert sind übrigens hier die auf 7 Seiten gegebenen Auseinandersetzungen über die Anwendung der Hyperbelfunktionen auf die Bewegung in einer hyperbolischen Bahn, die Untersuchungen über die Genauigkeit der Größen P und Q und die Gibbsschen Näherungsformeln für die Dreiecksverhältnisse.

Hinweise auf die wichtigsten Werke aus der Literatur der Bahnbestimmung finden sich als Fußnoten unter dem Inhaltsverzeichnis. Es stieß uns hier auf, daß S. XI Frischauf „Bahnbestimmung des Planeten Asia" in einer Reihe mit Gauß, Euler und Olbers aufgeführt wird.

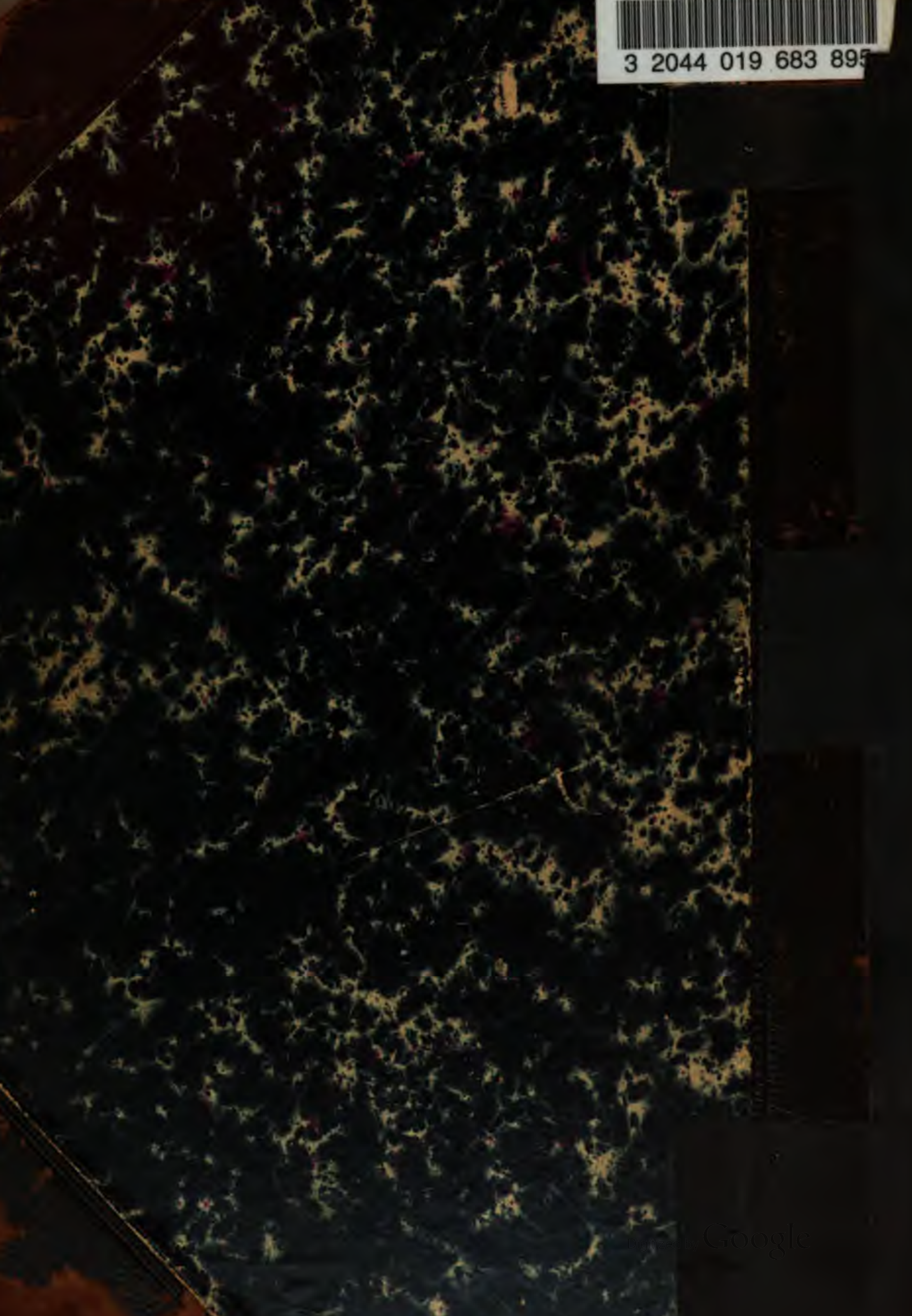
In den nachgeprüften Formeln komplizierteren Charakters finden sich keine Druckfehler; es scheint daher auf korrekten Satz der nötige Wert gelegt worden zu sein.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.








3 2044 019 683 895